АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXV 1979 Вып. 5

УДК 534.22

ОБОБЩЕННАЯ ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ НОРМАЛЬНЫХ МОД КОЛЕБАНИЙ СЛОИСТЫХ ПЬЕЗОПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

Б. А. Касаткин

Получены соотношения обобщенной ортогональности нормальных мод колебаний по толщине преобразователя в виде пьезопластины с системой пассивных слоев. Соотношения применены для решения задачи Коши и родственных задач по отысканию импульсных и переходных характеристик пьезопреобразователя.

При анализе переходных процессов в пьезопреобразователе достаточно универсален подход, изложенный в работе [1] на примере односторонне нагруженного пьезопреобразователя в виде пластины, совершающей колебания по толщине. Суть подхода сводится к представлению импульсной характеристики пьезопреобразователя в виде разложения в ряд по собственным функциям некоторого несамосопряженного оператора, соответствующего заданным краевым условиям.

В настоящей работе рассматривается более сложный случай слоистого преобразователя, в котором между пьезопластиной и рабочей средой помещена система пассивных слоев.

Пусть известны толщина пьезопластины $2l$, занимающей область $x=\{-l, l\}$, плотность ρ, модуль упругости C_{33} при постоянном поле E, пьезопостоянная e_{33}, диэлектрическая проницаемость при постоянной деформации ε_{33} материала пьезопластины, проводимость $Y_э$ электрической нагрузки, подключенной к пьезопластине, толщина d_2 пассивного слоя, занимающего область $x=\{l, l_2\}$, плотность ρ_2 и скорость звука c_2 в слое, волновые сопротивления Z^-, Z_3 акустических нагрузок на гранях $x=-l$, $x=l_2$ преобразователя.

Сама граничная задача записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^2\xi_1}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\xi_1}{\partial t^2}-\frac{e_{33}}{C_{33}}\frac{\partial E}{\partial x}=0, \tag{1}$$

$$\mathscr{D}=\varepsilon_{33}E+e_{33}\frac{\partial\xi_1}{\partial x}, \qquad \frac{\partial D}{\partial x}=0, \qquad x=\{-l,l\},$$

$$\frac{\partial^2\xi_2}{\partial x^2}-\frac{1}{c_2{}^2}\frac{\partial^2\xi_2}{\partial t^2}=0, \qquad x=\{l, l_2\},$$

$$x=-l, \qquad C_{33}\frac{\partial\xi_1}{\partial x}-e_{33}E-Z^-\frac{\partial\xi_1}{\partial t}=0,$$

$$x=l, \qquad \xi_1=\xi_2, \qquad C_{33}\frac{\partial\xi_1}{\partial x}-e_{33}E=Z_2c_2\frac{\partial\xi_2}{\partial x}; \qquad Z_2=\rho_2c_2,$$

$$x=l_2, \qquad Z_2c_2\frac{\partial\xi_2}{\partial x}+Z_3\frac{\partial\xi_2}{\partial t}=0,$$

$$S\frac{\partial D}{\partial t}+Y_э\int_{-l}^{l}E\,dx=0,$$

где ξ — смещение в упругой волне, $\mathscr{D}$ — электрическая индукция, S — площадь пьезопластины, $c=\sqrt{C_{33}/\rho}$ — скорость звука в материале пьезопластины.

Для приведения задачи (1) к операторному виду введем, как это сделано в работе [1], многомерные векторы $\mathbf{u}^{(1)}$, $\mathbf{u}^{(2)}$ такие, что дифференциальные операторы, записанные относительно компонент векторов, не содержат второй производной по времени, а граничные условия не содержат первой производной по времени:

$$u_1^{(1)}=\frac{\partial\xi_1}{\partial x},\quad u_2^{(1)}=\frac{1}{c}\frac{\partial\xi_1}{\partial t},\quad u_3^{(1)}=\sqrt{\beta}\frac{E\varepsilon_{33}}{e_{33}},\quad u_4^{(1)}=\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t_1},$$

$$u_5^{(1)}=\sqrt{\beta}\frac{-\partial u_1^{(1)}}{\partial t_1},\quad u_6^{(1)}=\frac{\sqrt{\beta}}{e_{33}}\frac{\partial D}{\partial t_1},\quad u_7^{(1)}=\frac{\partial u_4^{(1)}}{\partial t_1},\quad u_8^{(1)}=\frac{\partial u_5^{(1)}}{\partial t_1},$$

$$u_9^{(1)}=\frac{\partial u_6^{(1)}}{\partial t_1};\quad u_{10}^{(1)}=\int_{-1}^{x_1}u_3^{(1)}dx,\quad u_{11}^{(1)}=\int_{-1}^{x_1}u_4^{(1)}dx;\quad u_{12}^{(1)}=\int_{-1}^{x_1}u_9^{(1)}dx;$$

$$u_1^{(2)}=\frac{z_2c_2}{zc}\frac{\partial\xi_2}{\partial x};\quad u_2^{(2)}=\frac{1}{c}\frac{\partial\xi_2}{\partial t},$$

$$\beta=e_{33}^2/\varepsilon_{33}C_{33},\quad z=\rho c,\quad t_1=tc/l,\quad x_1=x/l.$$

Основные уравнения граничной задачи (1) относительно введенных векторов принимают вид

$$(2)\qquad \begin{aligned} &L^{(1)}u^{(1)}=0,\quad x=\{-l,l\},\\ &L^{(2)}u^{(2)}=0,\quad x=\{l_1l_2\},\end{aligned}$$

где у операторов $L^{(1)}$, $L^{(2)}$ отличны от нуля компоненты

$$L_{ii}^{(1)}=\frac{\partial}{\partial x_1},\quad i=1,2,10-12,\quad L_{33}^{(1)}=-\frac{\partial}{\partial x_1},\quad L_{ii}^{(1)}=1,\quad i=4-9,$$

$$L_{12}^{(1)}=L_{21}^{(1)}=L_{43}^{(1)}=L_{74}^{(1)}=L_{85}^{(1)}=\frac{1}{\sqrt{\beta}}L_{51}^{(1)}=-\frac{\partial}{\partial t_1},$$

$$L_{64}^{(1)}=L_{65}^{(1)}=L_{97}^{(1)}=L_{98}^{(1)}=L_{10,3}^{(1)}=L_{11,4}^{(1)}=L_{12,6}^{(1)}=1,$$

$$L_{11}^{(2)}=\frac{\partial}{\partial x_1};\quad L_{12}^{(2)}=-\frac{\rho_2}{\rho}\frac{\partial}{\partial t_1};\quad L_{21}^{(2)}=-\frac{\partial}{\partial t_1},\quad L_{22}^{(2)}=\frac{Z_2c_2}{Zc}\frac{\partial}{\partial x_1}.$$

В качестве конкретного примера электрической нагрузки пьезопластины рассмотрим параллельно включенные резистор $R_э$ и индуктивность $L_э$, которые определяют два безразмерных параметра $m_э$ и Q: $m_э=(L_эC_п\omega_п^2)^{-1/2}$, $Q=R_э\omega_эC_п$, где $C_п=\varepsilon_{33}S/2l$, $\omega_п=\pi c/2l$.

Если мы теперь запишем решение задачи (1) в виде колебаний с частотой ω: $u(x,t)=u(x)\exp(i\lambda t_1)$, $\lambda=\omega l/c$, то придем к задаче Штурма — Лиувилля:

$$(3)\qquad Mu=\lambda Nu,$$

$$M=\left(\begin{array}{c|c} M^{(1)} & 0\\ \hline 0 & M^2\end{array}\right),\quad u=\begin{pmatrix}u^{(1)}\\ u^{(2)}\end{pmatrix},\quad N=\left(\begin{array}{c|c} N^{(1)} & 0\\ \hline 0 & N^{(2)}\end{array}\right),$$

$$x_1=-1,\quad u_1^{(1)}-\sqrt{\beta}u_3^{(1)}-\alpha^- u_2^{(1)}=0,\quad \alpha^-=Z^-/Z,$$

$$x_1=1,\quad u_1^{(1)}-\sqrt{\beta}u_3^{(1)}=u_1^{(2)},\quad u_2^{(1)}=u_2^{(2)},$$

$$x_1=\pm 1,\quad \frac{\pi}{2}m_э Q u_{10}^{(1)}+u_{11}^{(1)}+\frac{2}{\pi}\frac{Q}{m_э}u_{12}^{(1)}=0,$$

$$x_1=l_2/l,\quad u_1^{(2)}+\alpha_3 u_2^{(2)}=0,\quad \alpha_3=Z_3/Z,$$

где M, N — квазидиагональные матрицы с элементами

$$M_{12}^{(1)}=M_{21}^{(1)}=M_{43}^{(1)}=M_{74}^{(1)}=M_{85}^{(1)}=M_{51}^{(1)}=0,\quad M_{ik}^{(1)}=L_{ik}^{(1)} \text{ для остальных } i,k,$$

$$N_{12}^{(1)}=N_{21}^{(1)}=N_{43}^{(1)}=N_{74}^{(1)}=N_{85}^{(1)}=N_{51}^{(1)}/\sqrt{\beta}=i,\quad N_{ik}^{(1)}=0 \text{ для остальных } i,k,$$

$$M_{12}^{(2)}=M_{21}^{(2)}=0,\ M_{ik}^{(2)}=L_{ik}^{(2)} \text{ для остальных } i,k,$$

$$N_{12}^{(2)}=i\frac{\rho_2}{\rho},\quad N_{21}^{(2)}=i,\quad N_{ik}^{(2)}=0 \text{ для остальных } i,k.$$

Сопряженной с (3) будет задача вида

(4) $$\overline{M}v=\mu\overline{N}v,$$

$$\overline{M}=\left(\begin{array}{c|c}\overline{M}^{(1)} & 0\\ \hline 0 & \overline{M}^{(2)}\end{array}\right),\quad v=\begin{pmatrix}v^{(1)}\\ v^{(2)}\end{pmatrix},\quad \overline{N}=\left(\begin{array}{c|c}\overline{N}^{(1)} & 0\\ \hline 0 & \overline{N}^{(2)}\end{array}\right),$$

$$x_1=-1,\quad v_1^{(1)}+\frac{1}{(\alpha^-)^*}v_2^{(1)}=0,\quad x_1=1,\quad v_1^{(1)}=v_1^{(2)};\quad v_2^{(1)}=\frac{c_2Z_2}{cZ}v_2^{(2)};$$

$$x_1=\pm 1,\quad v_3^{(1)}=0,\quad v_{12}^{(1)}=\frac{2}{\pi}\frac{Q}{m_э}v_{11}^{(1)},\quad v_{10}^{(1)}=\frac{\pi}{2}m_э Q v_{11}^{(1)},$$

$$x_1=l_2/l,\quad v_1^{(2)}-\frac{c_2Z_2}{cZ}\frac{1}{(\alpha_2)^*}v_2^{(2)}=0,$$

где сопряженные операторы $\overline{M}$, $\overline{N}$ удовлетворяют соотношениям типа

(5) $$(M^{(1)}u^{(1)},v^{(1)})_1+(M^{(2)}u^{(2)},v^{(2)})_2=$$
$$=(u^{(1)},\overline{M}^{(1)}v^{(1)})_1+(u^2,\overline{M}^{(2)}v^{(2)})_2,$$

$(x,y)_1=\int\limits_{-1}^{1}\left(\sum\limits_i x_i y_i^*\right)d\tau$, $(x,y)_2=\int\limits_{1}^{l_2/l}\left(\sum x_i y_i^*\right)d\tau$ — скалярные произведения, определенные в областях $\tau=\{-1,1\}$, $\tau=\{1,l_2/l\}$ соответственно, y^* — величина комплексно-сопряженная с y, а компоненты сопряженных операторов связаны соотношениями $\overline{M}_{ik}=M_{ik}^{\text{т}}(-1)^n$, $\overline{N}_{ik}=N_{ik}^{\text{т}}$, (здесь $N^{\text{т}}$ — эрмитовосопряженная матрица, n — порядок дифференциального оператора, стоящего в выражении для элемента M_{ik}).

Используя определение сопряженных операторов (5) и основные уравнения, получим соотношения обобщенной ортогональности в форме

(6) $$(\lambda_n-\mu_m^*)\left[(N^{(1)}u^{(1)},v^{(1)})_1+(N^{(2)}u^{(2)},v^{(2)})_2\right]=0,$$

причем спектры сопряженных операторов комплексно-сопряжены ($\lambda_n=\mu_n^*$).

Ниже приводится структура обобщенных векторов $\mathbf{u}_n$, $\mathbf{v}_n$ и соотношения между ними, которые однозначно определяются из решения однородных задач (3), (4):

$$u_{1n}^{(1)}=\sin(\lambda_{1n}x_1+\varphi_{1n}),\quad u_{2n}^{(1)}=-i\sqrt{1+\beta}\cos(\lambda_{1n}x_1+\varphi_{1n}),$$

$$u_{3n}^{(1)}=-\sqrt{\beta}u_{1n}^{(1)}+\sqrt{\beta}\mathscr{D}_{1n},$$

$$\mathscr{D}_{1n}=-\frac{G_1}{p_1}\frac{\sin\lambda_1}{\lambda_1}\sin\varphi_1,\qquad G_1=i\lambda\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4}Qm_э,$$

$$p_1=\lambda^{(2)}Q/m_э-G_1,\qquad \lambda_1=\lambda/\sqrt{1+\beta},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{\sin\lambda_1-i\alpha_1^-\cos\lambda_1}{\cos\lambda_1+i\lambda_1^-\sin\lambda_1+\beta_1G_1\sin\lambda_1/\lambda_1p_1},\qquad \alpha_1^-=\frac{Z^-}{Z_1},$$

$$Z_1=Z\sqrt{1+\beta},\qquad \beta_1=\frac{\beta}{1+\beta}$$

(остальные компоненты вектора выражаются через первые три по определению),

$$u_{1n}^{(2)}=A_{2n}\sin[\lambda_{2n}(x_1-1)+\varphi_{2n}],\qquad u_{2n}^{(2)}=-i\frac{Z}{Z_2}A_{2n}\cos[\lambda_{2n}(x_1-1)+\varphi_{2n}],$$

$$\lambda_2=\lambda c/c_2,\quad A_2=\sqrt{B_2^2+\mathscr{D}_2^2},\quad \operatorname{tg}\varphi_2=B_2/\mathscr{D}_2,$$

$$B_2=(1+\beta)\sin(\lambda_1+\varphi_1)+\beta\frac{G_1}{p_1}\frac{\sin\lambda_1}{\lambda_1}\sin\varphi_1,\qquad \mathscr{D}_2=\frac{Z_2}{Z}(1+\beta)\cos(\lambda_1+\varphi_1),$$

$$v_1^{*(1)}=-\frac{u_2^*}{1+\beta},\qquad v_2^{*(1)}=u_1^{(1)}-\beta_1\mathscr{D}_1,\qquad v_4^{*(1)}=-i\left(i\lambda\frac{Q}{m_э}+\frac{\pi}{2}\right)\frac{\lambda_1}{G_1}\sqrt{\beta_1}\mathscr{D}_1,$$

(7)

$$v_1^{*(1)}=i\lambda v_1^{*(1)},\qquad v_7^{*(1)}=v_8^{*(1)}=-i\frac{\lambda_1}{G_1}\frac{Q}{m_э}\sqrt{\beta_1}\mathscr{D}_1,$$

$$v_1^{*(2)}=-\frac{u_2^{(2)}}{1+\beta},\qquad v_2^{*(2)}=\frac{1}{1+\beta}\frac{Zc}{Z_2c_2}u_1^{(2)}$$

(остальные компоненты вектора **v** не участвуют в соотношениях обобщенной ортогональности (6)).

Спектр собственных частот преобразователя определяется уравнением

(8) $$p_1\Delta_0+G_1\Delta_1=0,$$

где

$$\Delta_0=1-v^+v^-a_1^2,\qquad \Delta_1=\frac{\beta_1}{4i\lambda_1}(1-a_1)[2+v^++v^--a_1(v^++v^-+2v^+v^-)],$$

$$v^-=\frac{1-\alpha_1}{1+\alpha_1^-},\qquad v^+=\frac{1-\alpha_1^+}{1+\alpha_1^+},\qquad a_1=e^{-2i\lambda_1},\qquad \alpha_1^+=\frac{Z_2}{Z_1}\frac{1-a_2^2v_{23}}{1+a_2^2v_{23}},$$

$$v_{23}=\frac{\alpha_{21}-\alpha_{31}}{\alpha_{21}+\alpha_{31}},\qquad \alpha_{21}=\frac{Z_2}{Z_1},\qquad \alpha_{31}=\frac{Z_3}{Z_1},\qquad a_2=e^{-2i\lambda b_2},\qquad b_2=\frac{d_2c}{2lc_2}.$$

С учетом приведенных выше структурных формул соотношения обобщенной ортогональности (6) можно записать в форме

(9) $$n\neq m,\quad \int_{-1}^{1}\left[u_{1m}^{(1)}(u_{1n}^{(1)}-\beta_1\Phi_n)-\frac{u_{2m}^{(1)}u_{2n}^{(1)}}{1+\beta}\right]dx_1+\int_{1}^{l_2/l}\left[\frac{Zc}{Z_2c_2}u_{1m}^{(2)}u_{1n}^{(2)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\rho_2}{\rho}u_{2n}^{(2)}u_{2m}^{(2)}\right]\frac{dx_1}{1+\beta}-\beta_1\frac{\lambda_n\Phi_n}{p_1n}\left[U_m\left(\lambda_n\frac{Q}{m_э}-i\frac{\pi}{2}\right)-i\frac{\pi}{2}\frac{Q}{m_э}I_m\right]=0,$$

где

$$U=\frac{1}{U_0}\int_{-1}^{1}E\,dx_1,\qquad I=\frac{S}{I_0}\frac{\partial\mathscr{D}}{\partial t},\qquad \Phi=\frac{\sin\lambda}{\lambda}\sin\varphi_1,$$

$$U_0=\frac{e_{33}l}{\varepsilon_{33}},\qquad I_0=U_0\omega_{\text{п}}C_{\text{п}}.$$

Величины U_m, I_m представляют собой нормированные напряжение на пьезопластине и ток, протекающий через нее, при данной моде колебаний.

Рассмотрим теперь задачу Коши для двухслойного преобразователя, начальное состояние которого определено заданием распределений по толщине пьезопластины упругих напряжений $f_{11}=\partial\xi_1/\partial x$ и колебательной скорости $f_{21}=\frac{1}{c}\frac{\partial\xi_1}{\partial t}$, напряжения на пьезопластине U, тока, протекающего через нее, I, распределений по толщине пассивного слоя упругих напряжений $f_{12}=\frac{Z_2c_2}{Zc}\frac{\partial\xi_2}{\partial x}$ и колебательной скорости $f_{22}=\frac{1}{c}\frac{\partial\xi_2}{\partial t}$.

Пусть искомое решение представлено разложением

$$u=\sum a_m u_m(x)\,e^{i\lambda_m t_1},\tag{10}$$

причем $u_m=u_m^{(1)}$ при $x=\{-l,l\}$ и $u_m=u_m^{(2)}$ при $x=\{l_1l_2\}$. Полагая в (10) $t=0$ и применяя соотношения обобщенной ортогональности, получаем искомые коэффициенты разложения:

$$a_n=\frac{1}{B_n}\Bigg\{\int_{-1}^{1}\left[f_{11}(u_{1n}^{(1)}-\beta_1\Phi_n)-f_{21}\frac{u_{2n}^{(1)}}{1+\beta}\right]dx_1+\int_{1}^{l_2/l}\left[f_{12}\frac{Zc}{Z_2c_2}u_{1n}^{(2)}-\right.\tag{11}$$

$$\left.-f_{22}\frac{\rho_2}{\rho}u_{2n}^{(2)}\right]\frac{dx_1}{1+\beta}-\beta_1\frac{\lambda_n\Phi_n}{p_{1n}}\left[U\left(\lambda_n\frac{Q}{m_э}-i\frac{\pi}{2}\right)-i\frac{\pi Q}{2m_э}I\right]\Bigg\},$$

$$\frac{1}{2}B_n=1+\beta_1\frac{\Phi_n^2}{p_{1n}}\left[\frac{\pi^2}{4}m_эQ-i\lambda_n\frac{\pi}{2}\frac{G_{1n}}{p_{1n}}\left(1+i\lambda_n\frac{4Q}{\pi m_э}\right)\right]+\frac{Zc}{Z_2c_2}\frac{A_2^2}{1+\beta}\frac{d_2}{2l}.$$

Как было показано в работе [1], к задаче Коши сводятся задачи на отыскание переходной и импульсной характеристик преобразователя, которые играют фундаментальную роль в описании переходных процессов.

Будем понимать под переходной (импульсной) характеристикой слоистого преобразователя в режиме излучения зависимость от времени звукового давления на излучающей грани преобразователя в случае, когда напряжение электрического возбуждающего генератора описывается единичной функцией (дельта-функцией).

Следуя [1] и с учетом соотношений (11), можно записать общее выражение для переходной $h(t)$ и импульсной $g(t)$ характеристик двухслойного преобразователя:

$$h(t)=\sum h_n e^{i\lambda_n t_1},\qquad h_n=\frac{\beta_1}{B_n}\frac{\Phi_n}{p_{1n}}i\lambda_n\frac{\pi}{2}A_{2n}\sin\left(\lambda_{2n}\frac{d_2}{l}+\varphi_{2n}\right),\tag{12}$$

$$g(t)=\sum g_n e^{i\lambda_n t_1},\qquad g_n=i\lambda_n h_n.$$

Процедура обобщения основных соотношений (6), (11), (12) может быть продолжена на любое число пассивных слоев.

Рассмотрим для примера трехслойный преобразователь, в котором область $x=\{-l,l\}$ занята пьезопластиной, область $x=\{l_1,l_2\}$ — слоем с па-

раметрами d_2, ρ_2, c_2, а область $x=\{l_2, l_3\}$ — слоем с параметрами d_3, ρ_3, c_3, нагруженным на полупространство с параметрами ρ_4, c_4.

Соотношения обобщенной ортогональности (6) записываются следующим образом:

$$n\neq m,$$

$$(N^{(1)}u_n^{(1)}, v_m^{(1)})_1+(N^{(2)}u_n^{(2)}, v_m^{(2)})_2+(N^{(3)}u_n^{(3)}, v_m^{(3)})_3=0,$$

где $$N_{11}^{(3)}=N_{22}^{(3)}=0, \quad N_{12}^{(3)}=i\frac{\rho_3}{\rho}, \quad N_{21}^{(3)}=i,$$

а скалярное произведение, помеченное индексом 3, определяется обычным образом интегралом по области $x=\{l_2, l_3\}$.

Вид уравнения собственных частот (8) здесь сохраняется, однако для входного импеданца α_1^+ получаются следующие обобщенные выражения:

$$\alpha_1^+=\alpha_{21}\frac{1-a_2^2V_{23}}{1+a_2^2V_{23}}, \quad V_{23}=\frac{\alpha_{21}-\bar{\alpha}_{31}}{\alpha_{21}+\bar{\alpha}_{31}}, \quad \bar{\alpha}_{31}=\alpha_{31}\frac{1-a_3^2V_{34}}{1+a_3^2V_{34}},$$

$$V_{34}=\frac{Z_3-Z_4}{Z_3+Z_4}, \quad a_3=e^{-2i\lambda b_3}, \quad b_3=\frac{d_3c}{2lc_3}.$$

При рассмотрении задачи Коши для трехслойного преобразователя его начальное состояние определяется заданием упругих напряжений f_{11}, f_{12}, f_{13} и колебательной скорости f_{21}, f_{22}, f_{23} по всей толщине преобразователя, напряжения на пьезопластине U и тока I, протекающего через нее. Формула (11) при этом заменяется следующей:

$$a_n=\frac{1}{B_n}\left\{\int_{-1}^{1}\left[f_{11}(u_{1n}^{(1)}-\beta_1\Phi_n)-f_{21}\frac{u_{2n}^{(1)}}{1+\beta}\right]dx_1+\int_{1}^{l_2/l}\left[f_{12}\frac{Zc}{Z_2c_2}u_{1n}^{(2)}-\right.\right.$$

$$\left.-f_{22}\frac{\rho_2}{\rho}u_{2n}^{(2)}\right]\frac{dx_1}{1+\beta}+\int_{l_2/l}^{l_3/l}\left[f_{13}\frac{Zc}{Z_3c_3}u_{1n}^{(3)}-f_{23}\frac{\rho_3}{\rho}u_{2n}^{(3)}\right]\frac{dx_1}{1+\beta}-$$

$$\left.-\beta_1\frac{\lambda_n\Phi_n}{p_{1n}}\left[U\left(\lambda_n\frac{Q}{m_э}-i\frac{\pi}{2}\right)-i\frac{\pi Q}{2m_э}I\right)\right\},$$

$$\frac{1}{2}B_n=1+\beta_1\frac{\Phi_n^2}{p_{1n}}\left[\frac{\pi^2}{4}m_эQ-i\lambda_n\frac{\pi G_{1n}}{2p_{1n}}\left(1+i\lambda_n\frac{4Q}{\pi m_э}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{Zc}{1+\beta}\frac{A_2^2}{2l}\left[\frac{d_2}{Z_2c_2}+\frac{d_3A_3^2}{Z_3c_3}\right]\right], \quad u_1^{(3)}=A_2A_3\sin[\lambda_3(x_1-l_2/l)+\varphi_3],$$

$$u_2^{(3)}=-iA_2A_3\frac{Z}{Z_3}\cos[\lambda_3(x_1-l_2/l)+\varphi_3], \quad A_3=\sqrt{B_3^2+\mathscr{D}_3^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi_3=\frac{B_3}{\mathscr{D}_3},$$

$$B_3=\sin\left(\lambda_2\frac{d_2}{l}+\varphi_2\right), \quad \mathscr{D}_3=\frac{Z}{Z_2}\cos\left(\lambda_2\frac{d_2}{l}+\varphi_2\right), \quad \lambda_3=\lambda c/c_3.$$

В формуле (12) для переходной и импульсной характеристик следует положить

$$h_n=\frac{\beta_1}{B_n}\frac{\Phi_n}{p_{1n}}i\lambda_n\frac{\pi}{2}A_{2n}A_{3n}\sin\left(\lambda_{3n}\frac{d_3}{l}+\varphi_{3n}\right), \quad g_n=h_ni\lambda_n.$$

Таким образом, развитый в работе [1] подход применим к анализу переходных процессов колебательных систем достаточно общего вида, если их рассматривать в рамках одномерной теории колебаний по толщине.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Касаткин Б. А.* Обобщенная ортогональность нормальных мод колебаний по толщине нагруженной пьезопластины. Акуст. ж., 1978, *24*, 2, 203–208.

Всесоюзный научно-исследовательский
институт физико-технических
и радиотехнических измерений
Хабаровский филиал
Гидрофизический центр

Поступила
7 декабря 1978 г.