АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXV 1979 Вып. 5

УДК 534.26

ДИФРАКЦИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА СИСТЕМЕ ЦИЛИНДРОВ, РАСПОЛОЖЕННЫХ В НЕЗАМКНУТЫХ КОЛЬЦЕВЫХ СЛОЯХ

А. Е. Климов, А. Г. Лейко

Получено строгое решение задачи о дифракции плоских звуковых волн на системе из конечного числа произвольных круговых акустически жестких цилиндров, расположенных в незамкнутых кольцевых слоях из акустически мягкого материала. Приведены результаты расчета углового распределения амплитуд звуковых полей, рассеянных системой цилиндров и отдельными цилиндрами как в составе системы, так и вне ее.

Рассмотрим задачу о дифракции плоских звуковых волн на системе из конечного числа N бесконечно длинных абсолютно жестких круговых цилиндров, расположенных в незамкнутых кольцевых слоях из идеально податливого материала конечной толщины. Продольные оси цилиндров параллельны между собой и лежат в одной плоскости. Цилиндры и слои имеют произвольные размеры поперечного сечения и произвольную ориентацию в пространстве.

Введем ряд координатных систем: общую прямоугольную систему $OXYZ$, расположенную так, что ось OZ совпадает с продольной осью первого цилиндра ($s=1$), а ось OX лежит в плоскости решетки продольных осей системы цилиндров, локальные прямоугольные системы $O_sX_sY_sZ_s$, $s=1,\ldots,N$, оси O_sZ_s которых совпадают с продольными осями соответствующих цилиндров, а оси O_sX_s направлены вдоль биссектрисс углов, ограничивающих открытые части поверхностей цилиндров, общую R, φ, Z и локальные r_s, φ_s, z_s круговые цилиндрические системы, связанные с прямоугольными известными формулами перехода. Обозначим r_{0s} радиус окружности s-го цилиндра, $r_{1s}-r_{0s}$ — толщина слоя материала, охватывающего s-й цилиндр, φ_{0s} — угол раскрыва свободной от слоя части поверхности s-го цилиндра, γ_s — угол наклона оси O_sX_s к оси OX, l_{ps} — расстояние между продольными осями p- и s-го цилиндров. Сечение системы цилиндров и введенные координатные системы изображены на фиг. 1. В математической постановке рассматриваемая задача сводится к решению скалярного волнового уравнения Гельмгольца относительно потенциала, скорости $\Phi^{(1)}$ поля рассеяния системы цилиндров, удовлетворяющего на поверхности каждого из них в сумме с потенциалом скорости $\Phi^{(0)}$ поля падающей волны заданным граничным условиям и условию излучения на бесконечности.

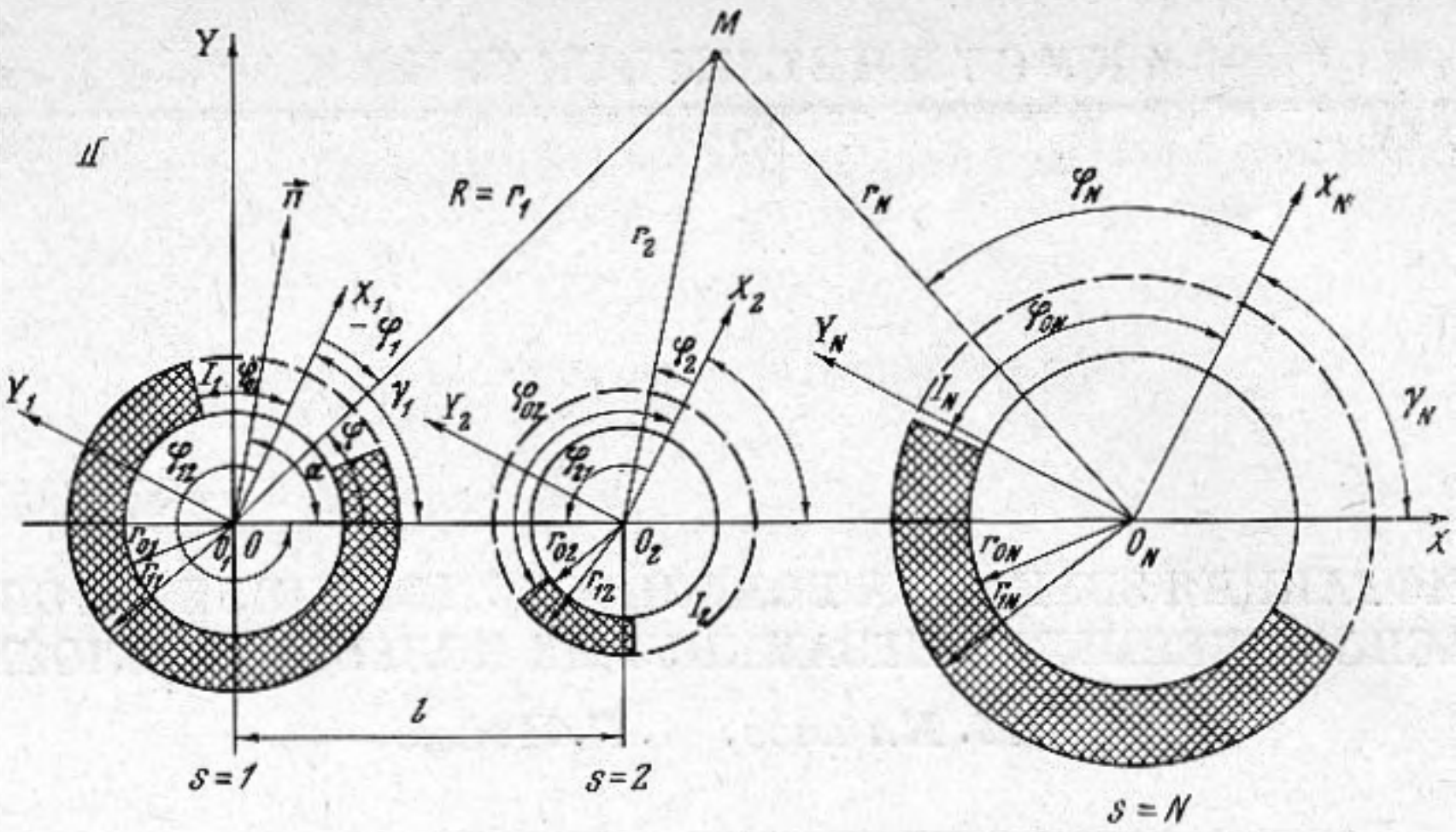
С учетом принятых обозначений граничные условия задачи могут быть сформулированы в виде

$$\Phi^{(0)}+\Phi^{(1)}=0,\ r_{0s}\leqslant r_s\leqslant r_{1s},\ \varphi_s=\pm\varphi_{0s}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial(\Phi^{(0)}+\Phi^{(1)})}{\partial(kr_s)}=0,\qquad r_s=r_{0s},\qquad 0\leqslant|\varphi_s|\leqslant\varphi_{0s}, \tag{2}$$

$$\Phi^{(0)}+\Phi^{(1)}=0,\ r_s=r_{1s},\ \varphi_{0s}\leqslant|\varphi_s|\leqslant\pi, \tag{3}$$

$$s=1,\ldots,N$$



Фиг. 1. Нормальное сечение системы цилиндров в незамкнутых кольцевых слоях

Решение уравнения будем искать методом частичных областей в круговых цилиндрических координатах с привлечением теорем сложения для цилиндрических волновых функций.

Пусть в направлении единичного вектора **n**, расположенного в плоскости OXY и образующего угол α с осью OX, распространяется плоская звуковая волна

$$\Phi^{(0)}=e^{ik(\mathbf{n},\,\mathbf{R})}, \tag{4}$$

где k — волновое число, **R** — радиус-вектор, соединяющий произвольную точку наблюдения M с началом координат O. В локальных координатах s-го цилиндра плоская волна (4) может быть представлена разложением в ряд по цилиндрическим волновым функциям:

$$\Phi^{(0)}=e^{ikl(s-1)\cos\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kr_s)\,e^{in(\varphi_s-\alpha_s)}. \tag{5}$$

Здесь $\alpha_s=\alpha-\gamma_s$ — угол, который образует вектор **n** с осью O_sX_s.

Для решения уравнения Гельмгольца всю многосвязную область существования поля, дифрагированного на системе цилиндров, разобьем на ряд частичных областей, определив границами их раздела цилиндрические поверхности радиуса r_{1s}, $s=1,\ldots,N$. В локальных координатах s-х цилиндров внутренние области (область I) заданы в интервалах $0\leqslant|\varphi_s|\leqslant\varphi_{0s}$, $r_{0s}\leqslant r_s\leqslant r_{1s}$, $s=1,\ldots,N$; внешняя область (область II) — в интервалах $0\leqslant\varphi_s\leqslant 2\pi$, $r_{1s}\leqslant r_s<\infty$.

Полное дифрагированное поле Φ представляет собой суперпозицию поля $\Phi^{(0)}$ падающей волны и поля $\Phi^{(1)}$, рассеянного системой цилиндров в кольцевых слоях:

$$\Phi=\Phi^{(0)}+\Phi^{(1)}. \tag{6}$$

Рассеянное поле $\Phi^{(1)}$ является суммой полей рассеяния отдельных цилиндров, определенных с учетом взаимодействия, возникающего в результате многократности процесса рассеяния звука на решетке цилиндров:

$$\Phi^{(1)}=\sum_{s=1}^{N}\Phi_s^{(1)}. \tag{7}$$

Математическую запись дифрагированного поля во внутренних и внешних частичных областях выполним по-разному. Представим потенциал скорости Φ_I полного поля во внутренней области s-го цилиндра рядом Фурье по локальным цилиндрическим волновым функциям, не имеющим особенностей в любой из точек области:

$$\Phi_{\mathrm{I}}^{(s)}=\sum_{q=1}^{\infty}\left[A_q^{(s)} J_{m_q^{(s)}}(kr_s)+B_q^{(s)} N_{m_q^{(s)}}(kr_s)\right]\sin\left[m_q^{(s)}(\varphi_s+\varphi_{0s})\right],$$

где $A_q^{(s)}$ и $B_q^{(s)}$ — неизвестные комплексные коэффициенты $J_{m^{(s)}}(kr_s)$ и $N_{m_q^{(s)}}(kr_s)$ — функции Бесселя и Неймана $m_q^{(s)}$-го порядка, величина которого определяется из граничного условия (1) и равна

$$m_q^{(s)}=\frac{\pi q}{2\varphi_{0s}}, \qquad q=1,2,\ldots$$

Граничное условие (2) и свойство ортогональности тригонометрических функций $\sin\left[m_q^{(s)}(\varphi_s+\varphi_{0s})\right]$ на интервале $[-\varphi_{0s}, \varphi_{0s}]$ позволяют выразить коэффициенты $B_q^{(s)}$ через $A_q^{(s)}$ и представить выражение для полного поля в первой области каждого цилиндра в виде

$$\Phi_{\mathrm{I}}^{(s)}=\sum_{q=1}^{\infty}\left\{A_q^{(s)}\left[J_{m_q^{(s)}}(kr_s)-\frac{J'_{m_q^{(s)}}(kr_{0s})}{N'_{m_q^{(s)}}(kr_{0s})}N_{m_q^{(s)}}(kr_s)\right]\right\}\times \tag{8}$$
$$\times\sin\left[m_q^{(s)}(\varphi_s+\varphi_{0s})\right].$$

Потенциал скорости дифрагированного поля во внешней области выразим формулами (6), (7), в которых поле рассеяния $\Phi_{(s}^{(1}$ отдельного цилиндра в составе системы представим разложением по локальным цилиндрическим волновым функциям, удовлетворяющим условию излучения на бесконечности (для временной зависимости $e^{i\omega t}$):

$$\Phi_s^{(1)}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}C_m^{(s)}\,H_m^{(1)}(kr_s)\,e^{im\varphi_s}, \tag{9}$$

где $C_m^{(s)}$ — неизвестные комплексные коэффициенты, $H_m^{(1)}(kr_s)$ — функция Ханкеля первого рода m-го порядка.

Для отыскания неизвестных коэффициентов воспользуемся системой функциональных уравнений

$$\Phi_{\mathrm{II}}=\begin{cases}\Phi_{\mathrm{I}}^{(s)}, & r_s=r_{1s}, \quad |\varphi_s|\leqslant\varphi_{0s},\\ 0, & r_s=r_{1s}, \quad \varphi_{0s}\leqslant|\varphi_s|\leqslant\pi,\end{cases} \tag{10}$$

$$\frac{\partial\Phi_{\mathrm{II}}}{\partial(kr_s)}=\frac{\partial\Phi_{\mathrm{I}}^{(s)}}{\partial(kr_s)}, \qquad r_s=r_{1s}, \qquad |\varphi_s|\leqslant\varphi_{0s},$$

объединяющих граничное условие (3) и условия непрерывности звукового поля на каждой из поверхностей $r_s=r_{1s}$, $|\varphi_s|\leqslant r_{0s}$.

Произведем алгебраизацию этой системы. Выразим потенциалы скоростей полей рассеяния цилиндров с номерами $p\neq s$, $p=1,\ldots,N$ в локальных координатах s-й координатной системы. Перенос системы координат осуществим с помощью теорем сложения для цилиндрических волновых

функций [1], которые в нашем случае приобретают вид

$$H_n^{(1)}(kr_p)e^{in\varphi_p}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}H_{n-m}^{(1)}(kl_{ps})J_m(kr_s)e^{i[(n-m)\varphi_{ps}+m\varphi_s]}, \tag{11}$$

где φ_{ps} — угловая координата начала Op-й координатной системы в s-й системе координат. Заменим неизвестные коэффициенты $C_m^{(s)}$ новыми неизвестными $c_m^{(s)}$, связанными соотношениями:

$$C_m^{(s)}=c_m^{(s)}J_m(kr_{1s}). \tag{12}$$

Подставив соотношения (6) и (8) с учетом выражений (5), (7), (9), (11) и (12) в систему функциональных уравнений (10) и выполним ряд преобразований, основанных на свойствах полноты и ортогональности систем функций $e^{im\varphi_s}$ на интервале $(-\pi, \pi)$ и $\sin[m_q^{(s)}(\varphi_s+\varphi_{0s})]$ на интервале $(-\varphi_{0s}, \varphi_{0s})$, получим бесконечную систему линейных неоднородных алгебраических уравнений для определения коэффициентов $A_q^{(s)}$ и $c_m^{(s)}$:

$$\begin{gathered}
c_v^{(s)}H_v^{(1)}(kr_{1s})+\sum_{\substack{p=1\\p\neq s}}^{N}\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_m^{(p)}J_m(kr_{1p})H_{m-v}^{(1)}(kl_{ps})e^{i(m-v)\varphi_{ps}}-\\
-\sum_{q=1}^{\infty}A_q^{(s)}\frac{\Delta_{m_q^{(s)}}(kr_{1s})}{J_v(kr_{1s})}\frac{1}{2\pi}\int_{-\varphi_{0s}}^{\varphi_{0s}}e^{-iv\varphi_s}\sin[m_q^{(s)}(\varphi_s+\varphi_{0s})]\,d\varphi_s=\\
=-e^{+ikl(s-1)\cos\alpha}i^v e^{-iv\alpha_s};\\
A_q^{(s)}\Delta'_{m_q^{(s)}}(kr_{1s})-\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_m^{(s)}J_m(kr_{1s})H_m^{(1)\prime}(kr_{1s})\frac{1}{\varphi_{0s}}\times\\
\times\int_{-\varphi_{0s}}^{\varphi_{0s}}e^{im\varphi_s}\sin[m_q^{(s)}(\varphi_s+\varphi_{0s})]\,d\varphi_s-\\
-\sum_{\substack{p=1\\p\neq s}}^{N}\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_m^{(p)}J_m(kr_{1p})\sum_{n=-\infty}^{\infty}H_{m-n}^{(1)}(kl_{ps})J_n'(kr_{1p})\times\\
\times e^{i(m-n)\varphi_{ps}/\varphi_{0s}}\int_{-\varphi_{0s}}^{\varphi_{0s}}e^{in\varphi_s}\sin[m_q^{(s)}(\varphi_s+\varphi_{0s})]\,d\varphi_s=\\
=e^{ikl(s-1)\cos\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty}i^nJ_n'(kr_{1s})e^{-in\alpha_s/\varphi_{0s}}\int_{-\varphi_{0s}}^{\varphi_{0s}}e^{in\varphi_s}\sin[m_q^{(s)}(\varphi_s+\varphi_{0s})]\,d\varphi_s,\\
s=1,\ldots,N;\quad v=-\infty,\ 0,\ \infty;\quad q=1,\ldots,\infty,
\end{gathered} \tag{13}$$

где $\Delta_{m_q^{(s)}}(kr_{1s})=J_{m_q^{(s)}}(kr_{1s})-\dfrac{J'_{m_q^{(s)}}(kr_{0s})}{N'_{m_q^{(s)}}(kr_{0s})}N_{m_q^{(s)}}(kr_{1s})$;

$$\Delta'_{m_q^{(s)}}(kr_{1s})=J'_{m_q^{(s)}}(kr_{1s})-\frac{J'_{m_q^{(s)}}(kr_{0s})}{N'_{m_q^{(s)}}(kr_{0s})}N'_{m_q^{(s)}}(kr_{1s}).$$

Система уравнений (13) подобна изученным, например, в работе [2], и может быть разрушена методом усечения.

Таким образом, нахождение численных значений величин, определяющих звуковое поле, дифрагированное на системе абсолютно жестких цилиндров, расположенных в идеально податливых незамкнутых кольцевых слоях, связано с определением неизвестных коэффициентов $A_q^{(s)}$ и $c_m^{(s)}$ путем решения бесконечных систем уравнений вида (13).

Применим полученные соотношения для отыскания в волновой зоне системы углового распределения амплитуды звукового поля, рассеянного как системой цилиндров, так и отдельными цилиндрами при работе их в составе и вне системы. Воспользовавшись асимптотическим представлением функций Ханкеля при больших kr ($kr \gg 1$), преобразуем выражения (9) и (7) с учетом соотношения (9) для потенциалов скоростей полей рассеяния одиночного цилиндра и системы во внешней области в полярных координатах с центром в точке O к виду

$$\Phi_{\text{ПД}} = \left(\frac{2}{\pi kR}\right)^{1/2} e^{-i(\pi/4-kR)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m^{(s)} J_m(kr_{1s}) e^{-i\frac{\pi}{2}m} e^{im(\varphi-\gamma_s)} \tag{14}$$

для отдельного цилиндра в системе и

$$\Phi_{\text{ПД}} = \left(\frac{2}{\pi kR}\right)^{1/2} e^{-i(\pi/4-kR)} \sum_{s=1}^{N} \times$$

$$\times e^{ikl(s-1)\cos\varphi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m^{(s)} J_m(kr_{1s}) e^{-i\frac{\pi}{2}m} e^{im(\varphi-\gamma_s)} \tag{15}$$

для системы цилиндров в целом.

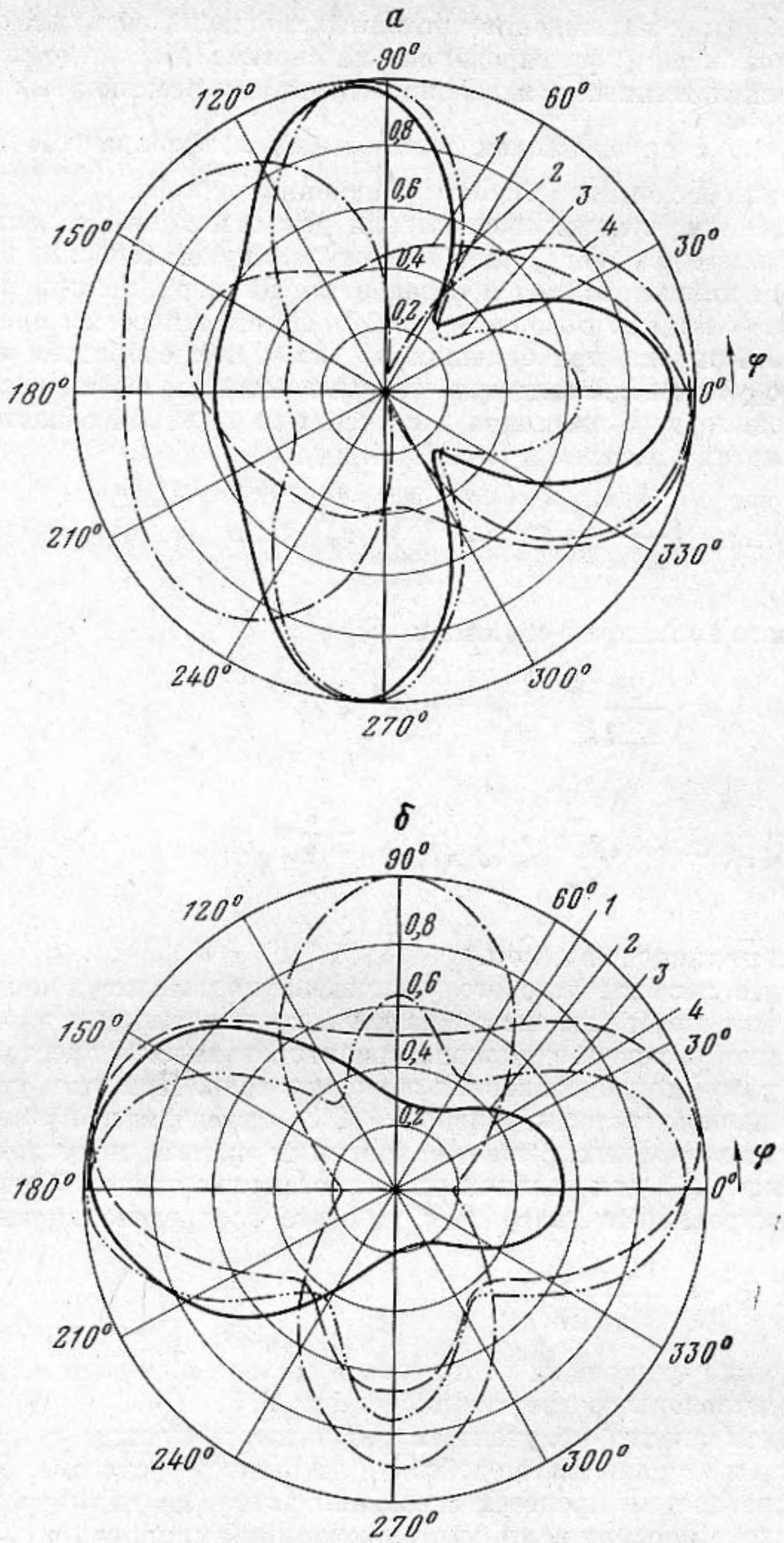
Численные расчеты углового распределения амплитуд полей рассеяния были выполнены для систем из двух, трех, четырех и пяти идентичных цилиндров в слоях, одинаково ориентированных в пространстве для различных углов прихода плоских звуковых волн. При этом уровень усечения бесконечной системы уравнений (13) определялся путем сопоставления последовательных решений конечных систем, получаемых усечением системы (13) для различных возрастающих значений порядка усечения. Нормированные диаграммы углового распределения амплитуд

$$F(\varphi) = \frac{|\Phi_{\text{ПД}}|}{|\Phi_{\text{ПД}}|_{\max}}$$

полей рассеяния одиночных цилиндров в составе и вне системы и систем в целом представлены соответственно на фиг. 2, 3.

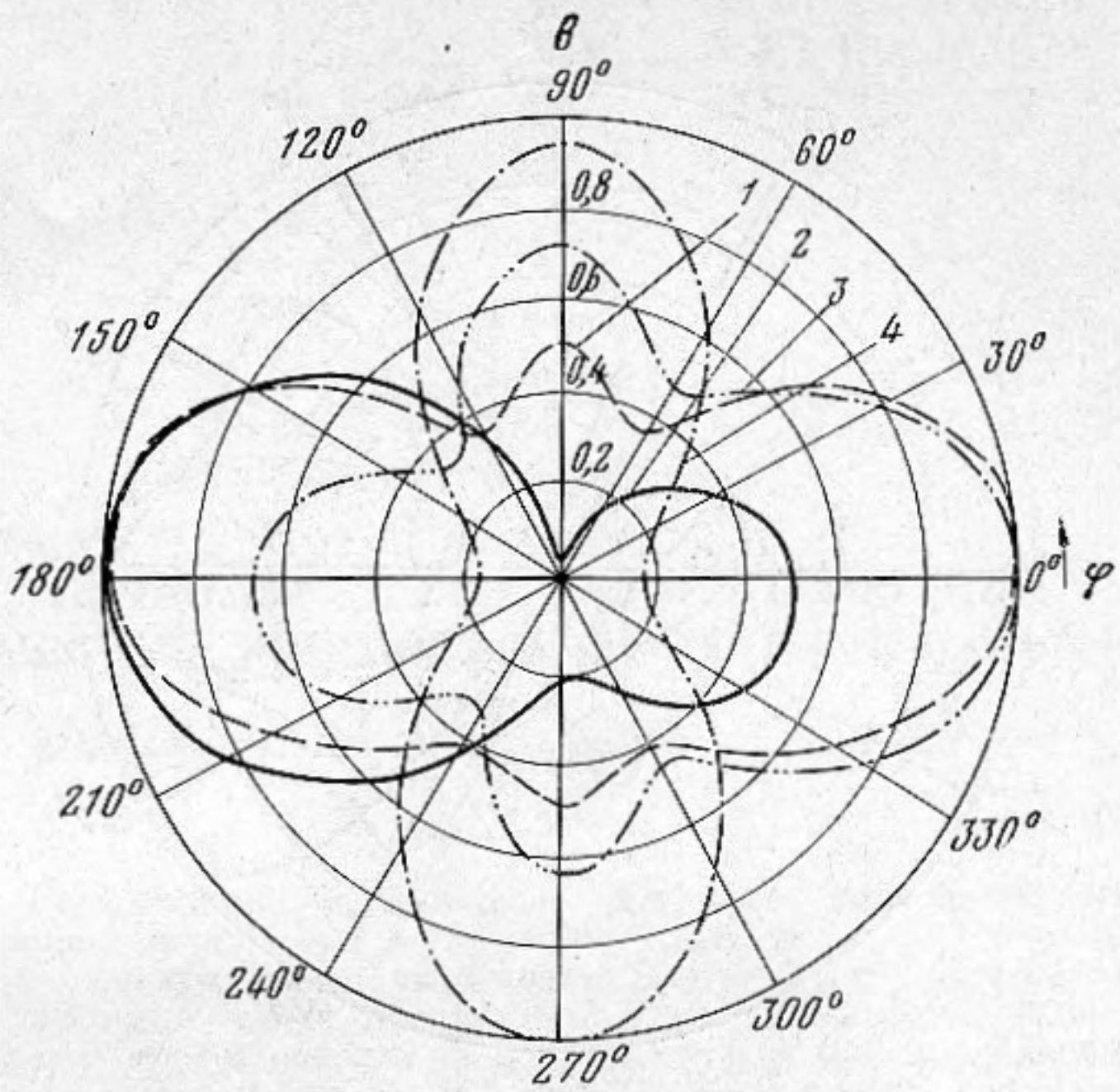
Произведем анализ полученных результатов. Прежде всего отметим, что характер и степень взаимодействия цилиндров в системе, обусловленные многократностью процесса рассеяния звука на цилиндрах, зависят от угла прихода плоских волн, местоположения цилиндров в системе, волновых размеров и геометрии цилиндров, слоев и системы в целом. Сложность геометрической фазы нормальных сечений цилиндров в слоях и противоположный характер граничных условий, реализуемых на поверхности цилиндров и слоев, обусловливает существенное отличие диаграмм углового распределения амплитуд рассеянного поля со стороны открытых поверхностей цилиндров по сравнению с другими направлениями.

Особый интерес представляет зависимость формы диаграммы рассеяния звука отдельными цилиндрами в составе системы от местоположения цилиндров. Если для крайних ($s=1$ и 5) цилиндров пятиэлементной системы при падении плоских волн вдоль оси симметрии системы ($\alpha=\pi/2$ и $3\pi/2$) диаграммы рассеяния (кривые *1* фиг. 2, *б*, *в*) вытянуты вдоль



Фиг. 2. Угловое распределение нормированных амплитуд полей рассеяния отдельных (кривые *1–3*) цилиндров системы из пяти идентичных цилиндров при углах падения плоских волн на систему $\alpha=0$ (*а*), $\pi/2$ (*б*), $^3/_2\pi$ (*в*). Параметры системы: $kr_0=\pi/2$; $r_1/r_0=1{,}1$; $\gamma=\pi/2$; $\varphi_0=\pi/2$; $l=2r_1$. Кривые *1–3* соответствуют $s=1, 2, 3$, кривая *4* – $N=1$

линии центров системы по направлениям ($\varphi=\pi$ и $\varphi=0$), то для центрального ($s=3$) цилиндра диаграммы рассеяния (кривые *3*, фиг. 2, *б*, *в*) формируются вдоль оси симметрии системы, практически не отличаются по уровню на этой оси и симметричны в силу симметрии системы. Диаграммы рассеяния (кривые *2*, фиг. 2, *б*, *в*) средних ($s=2$ и 4) цилиндров вытянуты как вдоль линии центров системы, так и вдоль ее оси симметрии.



Фиг. 2(*в*)

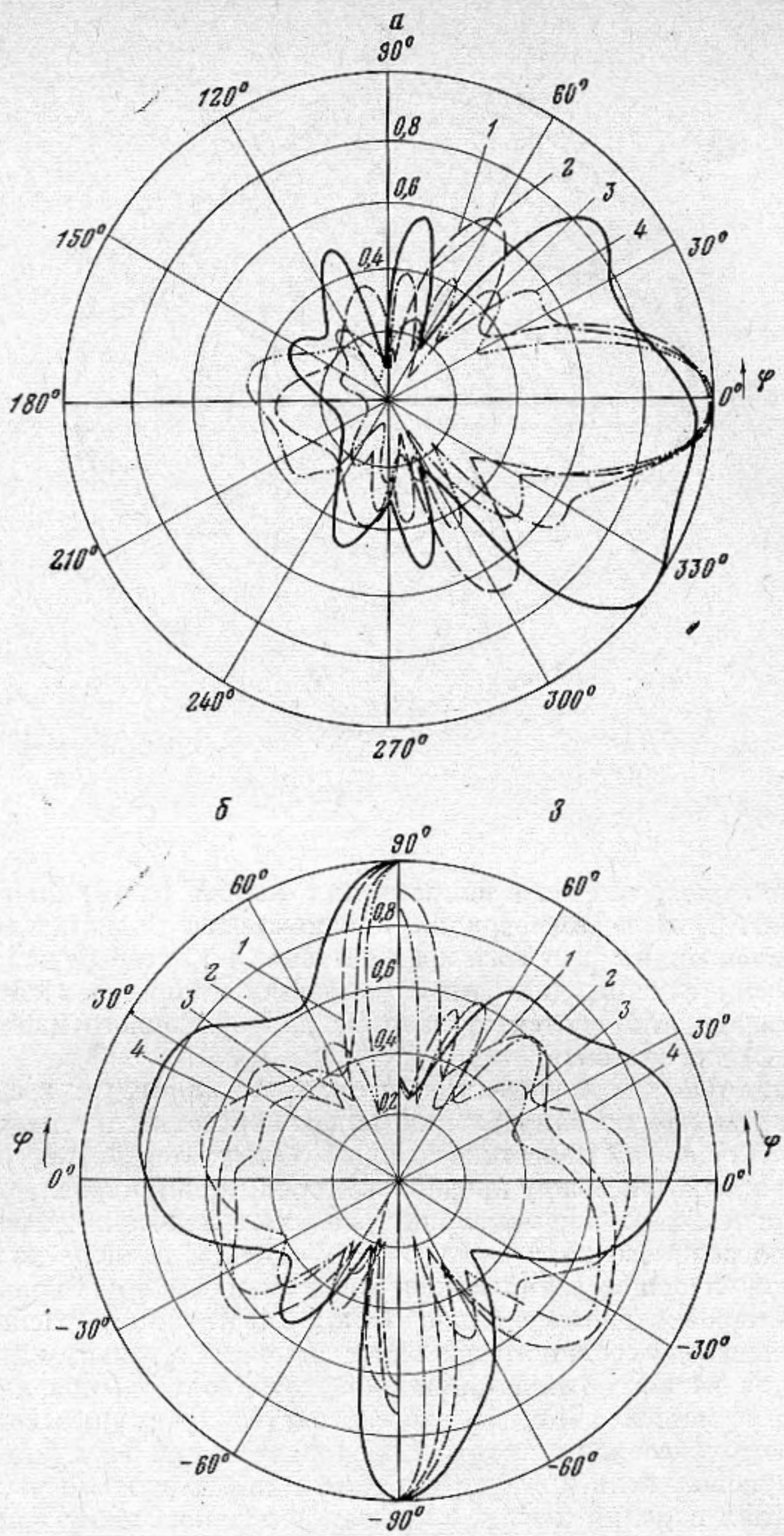
При падении плоских волн в направлении оси OX ($\alpha=0$) диаграммы рассеяния (фиг. 2, *а*) несимметричны и изменяются тем значительнее, чем дальше удален цилиндр от того края системы, на который падает плоская волна. Во всех случаях диаграммы рассеяния цилиндра в составе системы существенно отличаются от таковых для одиночного цилиндра (кривые *4*, фиг. 2) вне системы.

Рассеяние плоских звуковых волн системой цилиндров в слоях характеризуется тем, что по направлению падающей волны всегда имеет место выраженный основной лепесток, который обостряется по мере увеличения волнового расстояния между продольными осями цилиндров.

Вместе с тем характер изменения основного лепестка и распределение амплитуд рассеянного поля вне его при волновом размере диаметров цилиндров $2kr_0 \cong \pi$ существенно зависят от количества цилиндров. Нечетное число цилиндров в системе приводит к существенному расширению основного лепестка рассеянного поля по сравнению с таковым для системы, состоящей из четного числа цилиндров, хотя волновые размеры последней при этом меньше. Помимо этого свойство преимущественного однонаправленного рассеяния, которое проявляется при всех углах падения плоских звуковых волн, для систем, состоящих из четного числа цилиндров, при углах падения $\alpha={}^3/_2\pi$ не имеет места, поскольку уровни амплитуд рассеяния на оси симметрии системы по обе стороны от нее мало отличаются между собой.

Физически отмеченные явления можно объяснить тем, что рассматриваемая система состоит из цилиндров, диаметры которых сравнимы с половиной длины волны. Поэтому изменение количества цилиндров в системе при малом общем их числе приводит к существенным фазовым изменениям между суммируемыми полями рассеяния отдельных цилиндров, и, как следствие, к изменению результирующего поля.

Влияние различия граничных условий, заданных на поверхностях цилиндров и кольцевых слоев, в наибольшей мере проявляется при падении плоских волн вдоль оси симметрии и выражается в существенном изменении вида поля рассеяния системы для углов падения $\alpha=\pi/2$ и ${}^3/_2\pi$.



Фиг. 3. Угловое распределение нормированных амплитуд полей рассеяния системы идентичных цилиндров в слоях при углах падения плоских волн на систему $\alpha=0$ (*а*), $\pi/2$ (*б*), $^3/_2\pi$ (*в*). Параметры систем: $kr_0=\pi/2$; $r_1/r_0=1{,}1$; $\gamma=\pi/2$; $\varphi_0=\pi/2$; $l=2r_1$; $N=2$ (кривая *1*), 3 (кривая *2*), 4 (кривая *3*), 5 (кривая *4*)

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иванов Е. А.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск, «Наука и техника», 1968.
2. *Вовк И. В., Гринченко В. Т., Маяцкий В. И.* Звуковое поле бесконечного кругового цилиндрического преобразователя, частично покрытого слоем акустически мягкого материала. Акуст. ж., 1972, *18*, 3, 365–369.

Поступила
15 января 1979 г.