АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXV 1979 Вып. 5

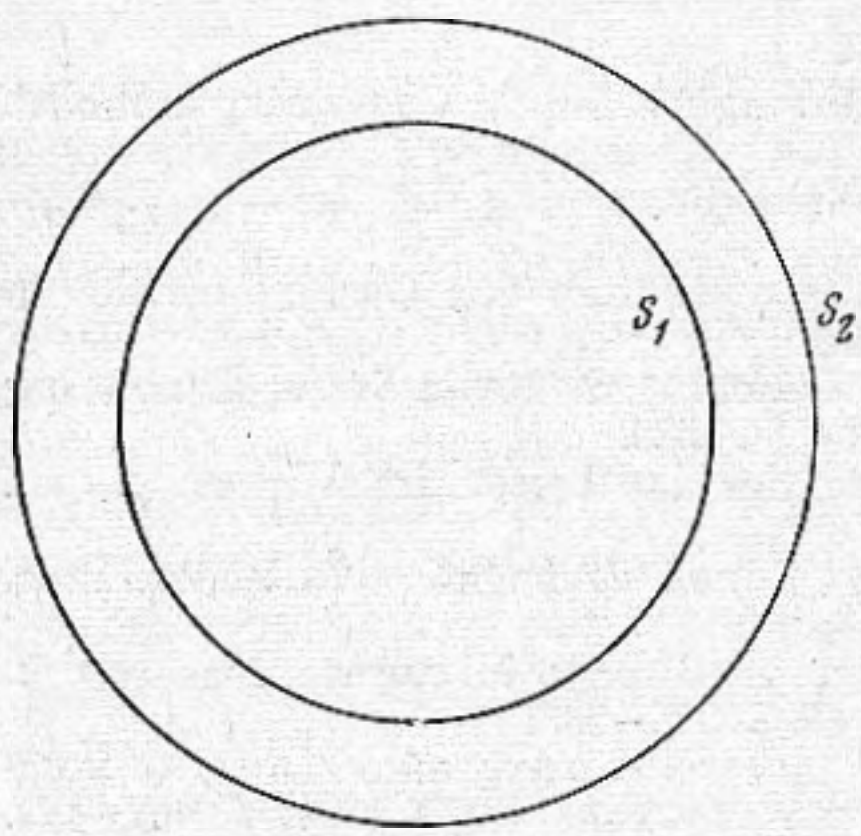
УДК 534.83

ФАКТОРИЗАЦИЯ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ С ПОМОЩЬЮ ДВУХ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕРИЧЕСКИХ ПРИЕМНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

С. И. Коняев, В. И. Лебедев, М. В. Федорюк

Рассмотрена задача о нахождении сферических гармоник звукового поля по известным его значениям на двух концентрических сферах. Вычислены 25 начальных коэффициентов Фурье плоской волны по ее значениям в дискретном наборе точек, расположенных на сферах.

Пусть в пространстве, заполненном однородной и изотропной жидкостью или газом, распространяется звуковое поле $p(x)=p^-(x)+p^+(x)$, $x=(x_1, x_2, x_3)$. Поле $p^+(x)$ (соответственно $p^-(x)$) создано источниками, расположенными, для определенности, вне (внутри) некоторой замкнутой поверхности S. Задача стационарная, зависимость от времени дается фактором $e^{-i\omega x}$. В ряде работ [1, 2] рассмотрена задача о факторизации полного поля $p(x)$. Именно, по измеренным на S значениям полного поля $p(x)$ и его нормальной производной $\frac{\partial}{\partial n}p(x)$ требуется восстановить значения полей $p^\pm(x)$ в тех областях, где нет источников звука (т. е. найти $p^+(x)$ внутри S и $p^-(x)$ вне S). Ответ дается формулой Грина [1, 2]. В работе [3] задача о факторизации полного поля была поставлена и решена в следующем варианте: значения полного поля известны на двух замкнутых поверхностях S_1, S_2 (S_1 лежит внутри S_2). Было показано, что для решения задачи о факторизации необходимо решить вспомогательную задачу Дирихле



Фиг. 1. Приемные поверхности – две концентрические сферы S_1, S_2

$$(1)\qquad (\Delta+k^2)u(x)=0;\quad x\in\mathscr{D};$$
$$u(x)\,|_{S_1}=p(x),\quad u(x)\,|_{S_2}=p(x),$$

где $\mathscr{D}$ – слой, заключенный между поверхностями S_1 и S_2.

В настоящей работе в качестве приемных поверхностей выбраны две концентрические сферы S_1, S_2 (фиг. 1) радиусов R_1, R_2 ($R_1<R_2$). В этом случае задача о факторизации полного поля решается точно. Исследован также дискретный вариант: на каждой из сфер S_1, S_2 располагается по $N=42$ точечных монопольных приемника, и по их измерениям вычислены первые 5^2 коэффициентов Фурье полей $p^\pm(x)$.

В шаровом слое $\mathscr{D}$: $R_1<|x|<R_2$ имеем

$$(2)\qquad p^{\pm}(x)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}p_{lm}^{\pm}(x)\psi_l^{\pm}(kr)Y(\theta,\varphi).$$

Здесь $p_{lm}^{\pm}$ — постоянные,

$$\varphi_l^{+}(t)=\sqrt{\frac{\pi}{2t}}J_{l+1/2}(t),\qquad \psi_l^{-}(t)=\sqrt{\frac{\pi}{2t}}H_{l+1/2}^{(1)}(t)$$

и Y_{lm} — сферические функции:

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)=P_l^{(|m|)}(\cos\theta)\times\begin{cases}\cos m\varphi, & m\geqslant 0\\ \sin|m|\varphi, & m<0.\end{cases}$$

Поле $p^{+}(x)$ разлагается в ряд по функциям $\psi_l^{+}(kr)$, не имеющим особенностей внутри сферы S_1, поле $p^{-}(x)$ — по функциям $\psi_l^{-}(kr)$, удовлетворяющим условиям излучения на бесконечности.

По измеренным на S_1, S_2 значениям полного поля можно найти коэффициенты $p_{lm}^{\pm}$, что и решает задачу о факторизации полного поля. Из ортогональности сферических функций следует, что

$$(3)\qquad p_{lm}^{+}\psi_l^{+}(kR_j)+p_{lm}^{-}\psi_l^{-}(kR_j)=a_{lm}^{j},$$

где $j=1, 2$, и

$$(4)\qquad a_{lm}^{j}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\sin\theta Y_{lm}(\theta,\varphi)p(R_j\xi)\times\|Y_{lm}\|^{-2}.$$

Здесь $\xi=(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$ — точка на единичной сфере

$$\|Y_{lm}\|^2=\frac{2\pi(1+\delta_{0m})}{2l+1}\frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}.$$

При фиксированных l, m соотношение (3) дает систему из двух уравнений с двумя неизвестными $p_{lm}^{\pm}$ с определителем

$$(5)\qquad \Delta_l(k)=\begin{vmatrix}\psi_l^{+}(kR_1) & \psi_l^{-}(kR_1)\\ \psi_l^{+}(kR_2) & \psi_l^{-}(kR_2)\end{vmatrix},$$

который можно также написать в виде

$$\Delta_l(k)=\frac{\pi}{2k\sqrt{R_1R_2}}\begin{vmatrix}J_{l+1/2}(kR_1) & N_{l+1/2}(kR_1)\\ J_{l+1/2}(kR_2) & N_{l+1/2}(kR_2)\end{vmatrix}.$$

Множество всех вещественных корней $\{k_{ls}\}$ уравнений $\Delta_l(k)=0$, $l=0, 1, 2, \ldots$, совпадает со спектром задачи на собственные значения

$$(\Delta+k^2)v(x)=0,\quad R_1<r<R_2,$$
$$v|_{S_1}=v|_{S_2}=0,$$

что следует из общей теории [3]. Наименьшее собственное значение

$$k_0=\pi/h,\quad h=R_2-R_1$$

частоты $\omega_{ls}=ck_{ls}$ — критические для данной приемной системы, так как при $\omega=\omega_{l_0s}$ нельзя по измерениям полного поля на сферах S_1, S_2 найти коэффициенты $p_{l_0m}^{+}$, $-l_0\leqslant m\leqslant l_0$.

В дальнейшем будем предполагать, что частота ω ниже первой критической частоты $\omega_0=\pi c/h$ приемной системы. Решая систему (4), получаем

$$(6)\qquad p_{lm}^{+}=\Delta_l^{-1}[a_{lm}^{1}\psi_l^{-}(kR_2)-a_{lm}^{2}\psi_l^{-}(kR_1)],$$
$$p_{lm}^{-}=\Delta_l^{-1}[a_{lm}^{2}\psi_l^{+}(kR_1)-a_{lm}^{1}\psi_l^{+}(kR_2)].$$

По формулам (2), (6) можно найти значения поля $p^+(x)$ внутри сферы S_1 и значения поля $p^-(x)$ вне сферы S_2. Тем самым задача о факторизации полного поля решена.

Перейдем к дискретной модели. Пусть на сферах S_1, S_2 расположено по N монопольных точечных приемников, которые предполагаются акустически прозрачными. Поставим задачу о приближенном восстановлении нескольких первых коэффициентов Фурье $p^{\pm}(x)$.

Как уже отмечалось в работе [4], при решении подобного рода задач следует располагать приемники на сферах в узлах наилучшей из известных в настоящее время квадратурной формулы для интегрирования по сфере. Такие формулы известны, например, для $N=12$, 20, 32, 42, 86, 302. Мы выбрали $N=42$ (по этой квадратурной формуле точно интегрируются по сфере первые 10^2 сферических гармоник), расчеты проведены на БЭСМ-6. В качестве внешнего поля взята плоская волна $p(x)=e^{-ikr\cos\theta}$, так что $p^+(x)=p(x)$, $p^-(x)=0$ и коэффициенты Фурье известны точно:

$$p_{lm}^+=\delta_{0m}, \quad p_{lm}^-=0. \tag{7}$$

Были вычислены значения $p_{lm}^{\pm}$ при $0\leqslant l\leqslant 9$ и при всех соответственных допустимых значениях m. Тем самым были вычислены первые 10^2 коэффициентов Фурье. Эти приближенные значения сравнены с точными. Были вычислены приближенные значения полей

$$p_4^{\pm}(x)=\sum_{l=0}^{4}\sum_{m=-l}^{l} p_{lm}^{\pm}\psi_l^{\pm}(kr)\,Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

и по этим данным определены ошибки дискретной аппроксимации

$$\Delta_д^+(x)=-20\lg\left|\frac{p^+(x)-p_4^+(x)}{p^+(x)}\right|, \quad x \text{ внутри } S, \tag{8}$$

$$\Delta_д^-(x)=-20\lg|p_4^-(x)|, \quad x \text{ вне } S.$$

Данные задачи таковы. Радиус $R_2=1$, радиус R_1 принимает значения

$$R_1=1-\frac{\lambda}{4}; \quad 1-\frac{\lambda}{8}; \quad 1-\frac{\lambda}{16},$$

где λ — длина волны. Волновое число k изменяется в пределах $0{,}2\pi\leqslant k\leqslant 2\pi$, т. е. $1\leqslant\lambda/R_2\leqslant 10$. Вычисления проведены с шагом $0{,}1\pi$ по k. При этом волновая плотность (введенная в работе [4]) системы приемника на сфере S_2

$$\rho_w=\frac{\lambda}{2R_2}\sqrt{\frac{\pi}{N}}$$

изменяется в пределах $1{,}83\leqslant\rho_w\leqslant 12{,}19$. Значения полей $p^{\pm}(x)$ вычислены с шагом 0,02 на четырех лучах с направляющими векторами:

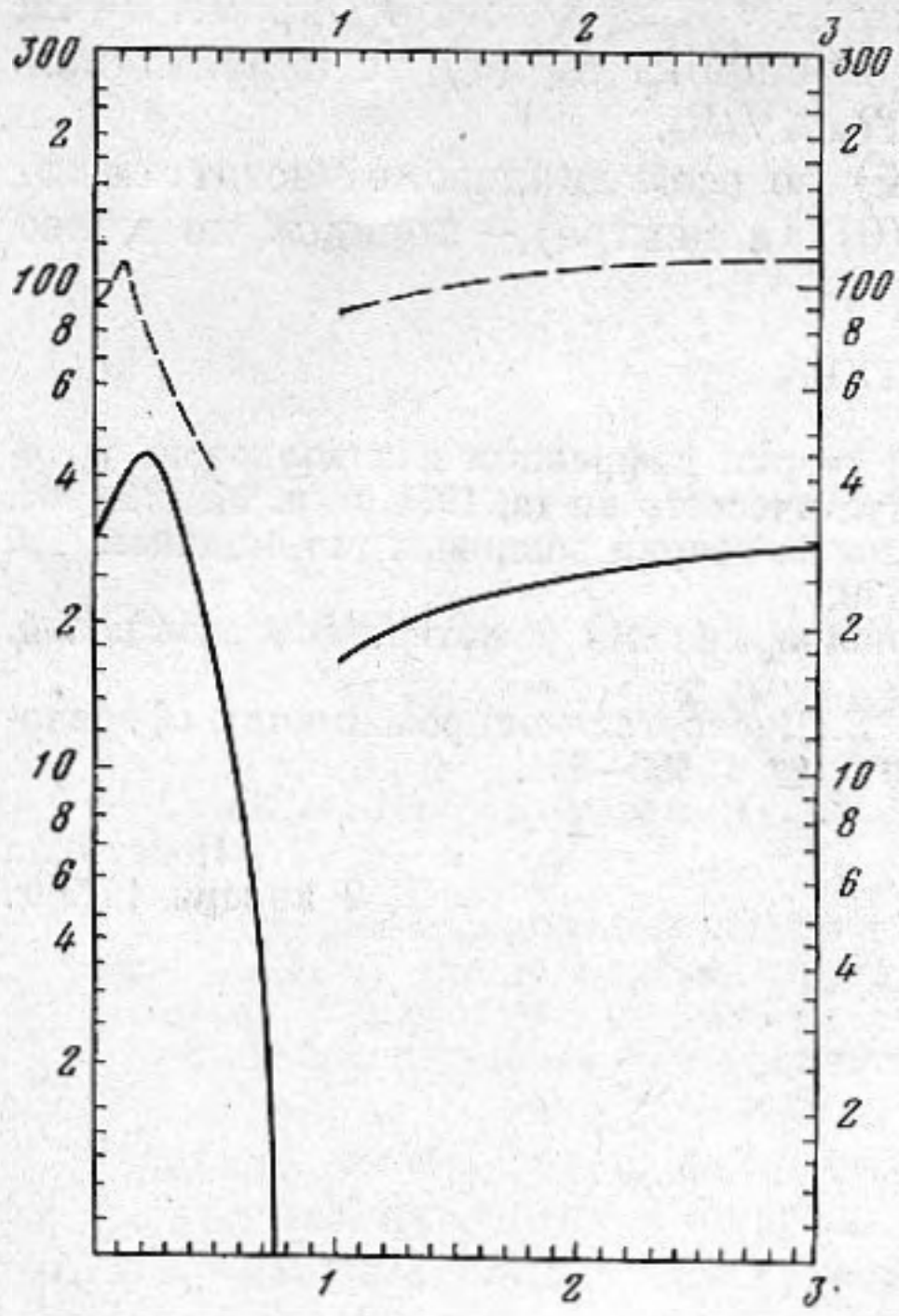
$$l_1=(0;\,0;\,1), \quad l_2=(1{,}732;\,1;\,3{,}464),$$

$$l_3=(1;\,0;\,0), \quad l_4=(1;\,1;\,-3)$$

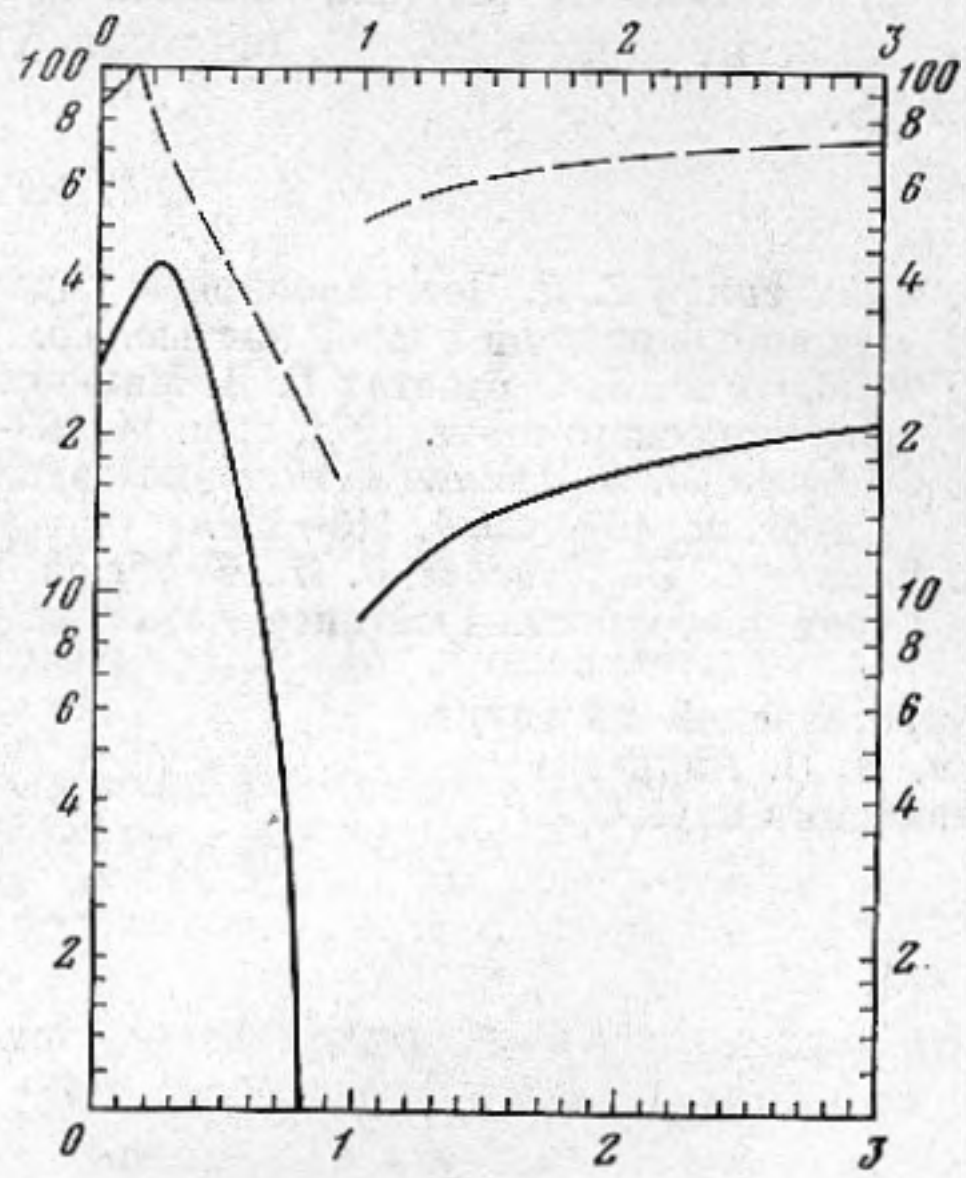
при $0\leqslant r\leqslant 3$. Поля и ошибки дискретной аппроксимации внутри слоя $\mathscr{D}(R_1\leqslant r\leqslant R_2)$ не вычислялись. Графики ошибок $\Delta_д^{\pm}(x)$ даны на фиг. 2, 3.

Приведем некоторые из полученных численных результатов и их анализ. Были составлены таблицы относительных погрешностей коэффициентов Фурье

$$\alpha_{l_0}^+=\left|\frac{p_{l_0}^+-\tilde{p}_{l_0}^+}{p_{l_0}^+}\right|,$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Графики $y=\Delta_д^+(x)$ при $|x|<1$, $y=\Delta_д^-(x)$ при $|x|>1$ для $R_1=R_2-\lambda/4$. Ошибки $\Delta_д^\pm(x)$ вычислены в направлении l_1. Сплошная кривая для $k=2\pi$, $\rho_w=1{,}828$, штриховая кривая для $k=\pi$, $\rho_w=3{,}656$

Фиг. 3. Графики тех же величин, что и на фиг. 2, для $R_1=R_2-\lambda/16$ с теми же значениями k

где $\tilde{p}_{l_0}^+$ — приближенные значения коэффициентов $p_{l_0}^+$. Ниже приведена выдержка одной из этих таблиц при $R=1-\lambda/4$; в l-м столбце располагаются величины $\alpha_{l_0}^+$.

Анализ таблицы показывает следующее.

1. При $l=5$ относительные ошибки α_{50}^+ велики во всем диапазоне частот и при всех значениях R_1 они имеют порядок 25—70%.

2. При $l=4$ ошибки α_{40}^+ имеют порядок 10% и более при $k\geqslant 1{,}4\,\pi$, т. е. при $\rho_w\leqslant 2{,}6$.

Тем не менее ошибки $\Delta_д^\pm(x)$ при вычислении поля оказываются малыми во всем диапазоне частот, что объясняется быстрым убыванием членов рядов (2). Пусть R_- (R_+) — расстояние от центра сфер такое, что при $0\leqslant r\leqslant R_-$ (соответственно при $r\geqslant R_+$) ошибки $\Delta_д^\pm(x)$ не превосходят 15 дБ. Анализ расчетов показывает следующее.

3. При $R_1=R_2-\lambda/4$ во всем рассматриваемом диапазоне частот и по всем направлениям имеем $R_+\leqslant 1{,}02$.

k	ρ_w	l				
		0	1	2	3	4
2π	1,83	$1{,}90\cdot10^{-3}$	$4{,}74\cdot10^{-2}$	$5{,}07\cdot10^{-2}$	$7{,}82\cdot10^{-2}$	$3{,}20\cdot10^{-1}$
$1{,}6\pi$	2,29	$3{,}53\cdot10^{-3}$	$3{,}58\cdot10^{-3}$	$7{,}43\cdot10^{-3}$	$4{,}21\cdot10^{-2}$	$1{,}32\cdot10^{-1}$
$1{,}2\pi$	3,05	$1{,}07\cdot10^{-4}$	$2{,}27\cdot10^{-4}$	$1{,}59\cdot10^{-3}$	$7{,}78\cdot10^{-3}$	$4{,}72\cdot10^{-2}$
π	3,66	$1{,}41\cdot10^{-8}$	$6{,}73\cdot10^{-5}$	$3{,}97\cdot10^{-4}$	$2{,}90\cdot10^{-3}$	$2{,}82\cdot10^{-2}$
$0{,}6\pi$	6,09	$9{,}85\cdot10^{-8}$	$6{,}75\cdot10^{-7}$	$1{,}13\cdot10^{-5}$	$2{,}80\cdot10^{-4}$	$8{,}36\cdot10^{-3}$

4. По направлениям l_2, l_3, l_4 имеем $R_- \approx R_1$ при всех k, кроме $k=2\pi$ (т. е. $\lambda=R_2$). Несколько хуже ведет себя ошибка $\Delta_д^+(x)$ по направлению l_1, но и в этом случае при всех k имеем $R_- \leqslant {}^1/_2 R_2$.

5. Ошибки $\Delta^-(3)$ (на концах лучей) во всем диапазоне частот имеют порядок не менее 23 дБ, ошибки $\Delta^+(0)$ (в центре) — порядок не менее 29 дБ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малюжинец Г. Д.* Нестационарные задачи теории дифракции для волнового уравнения с финитной правой частью. Тр. Акустического ин-та, 1971, вып. 14, 124–139.
2. *Федорюк М. В.* О работах Г. Д. Малюжинца по теории волновых потенциалов. Тр. Акустического ин-та, 1971, вып. 14, 169–179.
3. *Федорюк М. В.* Активное гашение звука непрерывными решетками из монополей. Акуст. ж., 1979, *25*, 1, 113–118.
4. *Коняев С. И., Лебедев В. И., Федорюк М. В.* Дискретная аппроксимация сферической поверхности Гюйгенса. Акуст. ж., 1977, *23*, 1, 650–651.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила
9 января 1979 г.