АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXV 1979 Вып. 6

УДК 534.222

О НЕЛИНЕЙНОМ РАСПРОСТРАНЕНИИ ГАУССОВЫХ ПУЧКОВ

Н. С. Бахвалов, Я. М. Жилейкин, Е. А. Заболотская

Численно проинтегрировано уравнение нелинейной акустики ограниченных пучков с гармоническим во времени граничным условием; амплитуда сигнала распределена по ширине пучка по закону Гаусса. Приведены фигуры, изображающие форму возмущения как функцию времени и поперечной координаты при различных соотношениях нелинейных и дифракционных эффектов на разных расстояниях от границы среды. Определен характер изменения пикового значения возмущения и средней интенсивности звуковой волны. Построена область образования ударной волны в гауссовом пучке. Проведено сравнение поведения гауссова пучка и пучка, имеющего резко выраженную границу.

В квазиоптическом приближении распределение амплитуды по закону Гаусса занимает особое положение, поскольку является собственной функцией линейного параболического уравнения. Задача о нелинейном распространении гауссова пучка является в этом смысле модельной.

Распространение осесимметричного звукового пучка в слабо нелинейной среде без диссипации энергий описывается приближенным уравнением [1]

$$N\frac{\partial^2\rho^2}{\partial\theta^2}-\frac{\partial^2\rho}{\partial\theta\,\partial z}+\frac{\partial^2\rho}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial\rho}{\partial R}=0. \tag{1}$$

Допустим, что на границе среды возбуждается гармонический сигнал с амплитудой, зависящей от поперечной координаты по закону Гаусса:

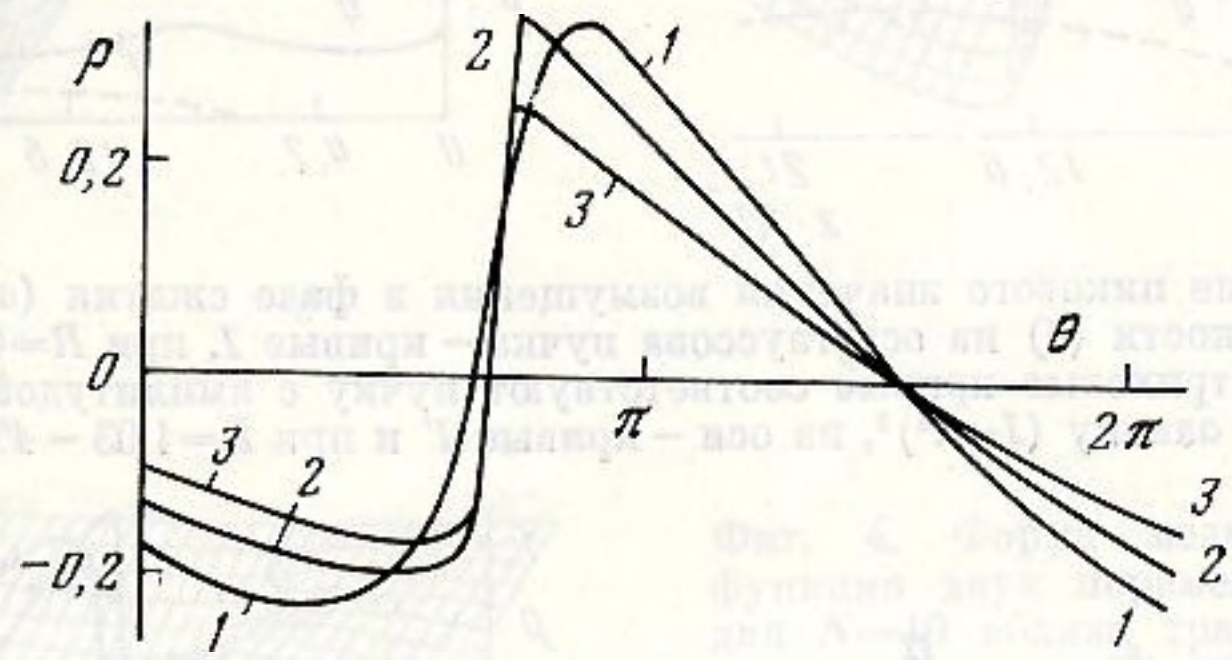
$$\rho|_{z=0}=\exp(-R^2)\sin\theta. \tag{2}$$

Здесь введены обозначения: ρ — возмущение плотности, нормированное на амплитуду гармонического сигнала на границе, $\theta=\omega(t-x/c_0)$ — безразмерное сопровождающее время; $z=x/2l$ — координата вдоль пучка, отнесенная к удвоенной дифракционной длине; R — поперечная координата, нормированная на характерную ширину пучка на границе r_0; $N=l/\mathscr{L}$ — безразмерный параметр, характеризующий соотношение нелинейных и дифракционных эффектов, здесь l — дифракционная длина, $l=\omega r_0^2/c_0$; $\mathscr{L}$ — длина образования разрыва в плоской волне, c_0 — скорость распространения слабого сигнала. Вычисления проведены по схеме, приведенной в работе [2], для значений параметра $N=1$; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,25; 5; 10 до расстояний, равных удвоенной длине прожекторной зоны ($z=1$). Результаты даны в виде графиков, изображающих волновой профиль $\rho(\theta)$ и форму возмущения $\rho(\theta, R)$ при фиксированных z, а также зависимость пикового значения возмущения в фазе сжатия $\rho_n(z)$ и средней за период интенсивности звуковой волны $I(z)$ от координаты вдоль пучка в различных точках поперечного сечения. Кроме того, построена область образования ударной волны в гауссовом пучке.

При $N=1$ форма волны в гауссовом пучке сильно искажается, но ударная волна на расстояниях $z\leqslant1$ не образуется. Волновой профиль на оси пучка при $z=0{,}9$ описывается кривой *1* фиг. 1. Можно заметить, что положительный полупериод меньше по длительности, чем отрицательный. Со-

кращение длительности положительного полупериода при равенстве площадей полупериодов приводит к тому, что пиковое значение возмущения в фазе сжатия больше, чем в фазе разрежения. Кроме того, положительный полупериод заострен, отрицательный скруглен. Несимметричное искажение периодического сигнала наблюдалось экспериментально [3] и отмечалось в работах [1, 2, 4, 5].

При увеличении параметра N асимметрия проявляется сильнее. Это хорошо видно на фиг. 1, где изображена форма волны на оси пучка при $z=0{,}9$ для $N=2$ (кривая *2*) и $N=3{,}25$ (кривая *3*). При этих значениях параметров волновой профиль на расстояниях $z<1$ становится ударным.



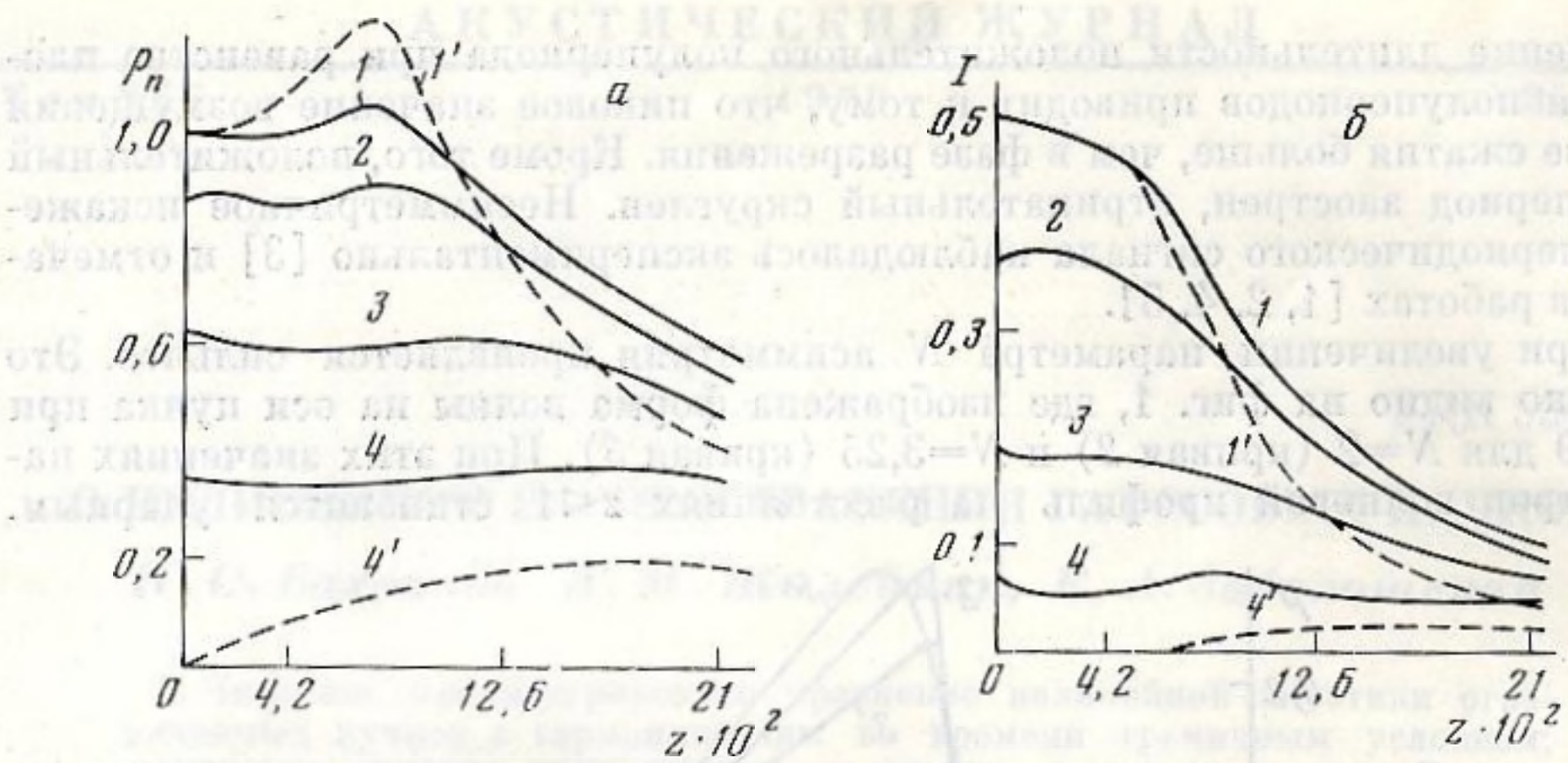
Фиг. 1. Форма волны на оси гауссова пучка на расстоянии $z=0{,}9$ для значений параметра $N=1$ – кривая *1*; $N=2{,}0$ – кривая *2*; $N=3{,}25$ – кривая *3*

Когда $N=10$, пиковое значение положительного возмущения на оси пучка ρ_n превосходит единицу, что для гауссова пучка получено аналитически [4]. Это превышение в гауссовом пучке составляет 6% (кривая *1* на фиг. 2, *а*), в то время как в пучке с распределением амплитуды по полиному четвертой степени – 23% [2] (пунктирная кривая *1'* на фиг. 2, *а*). При этом средняя за период интенсивность звуковой волны на оси пучка монотонно уменьшается (кривая *1* на фиг. 2, *б*).

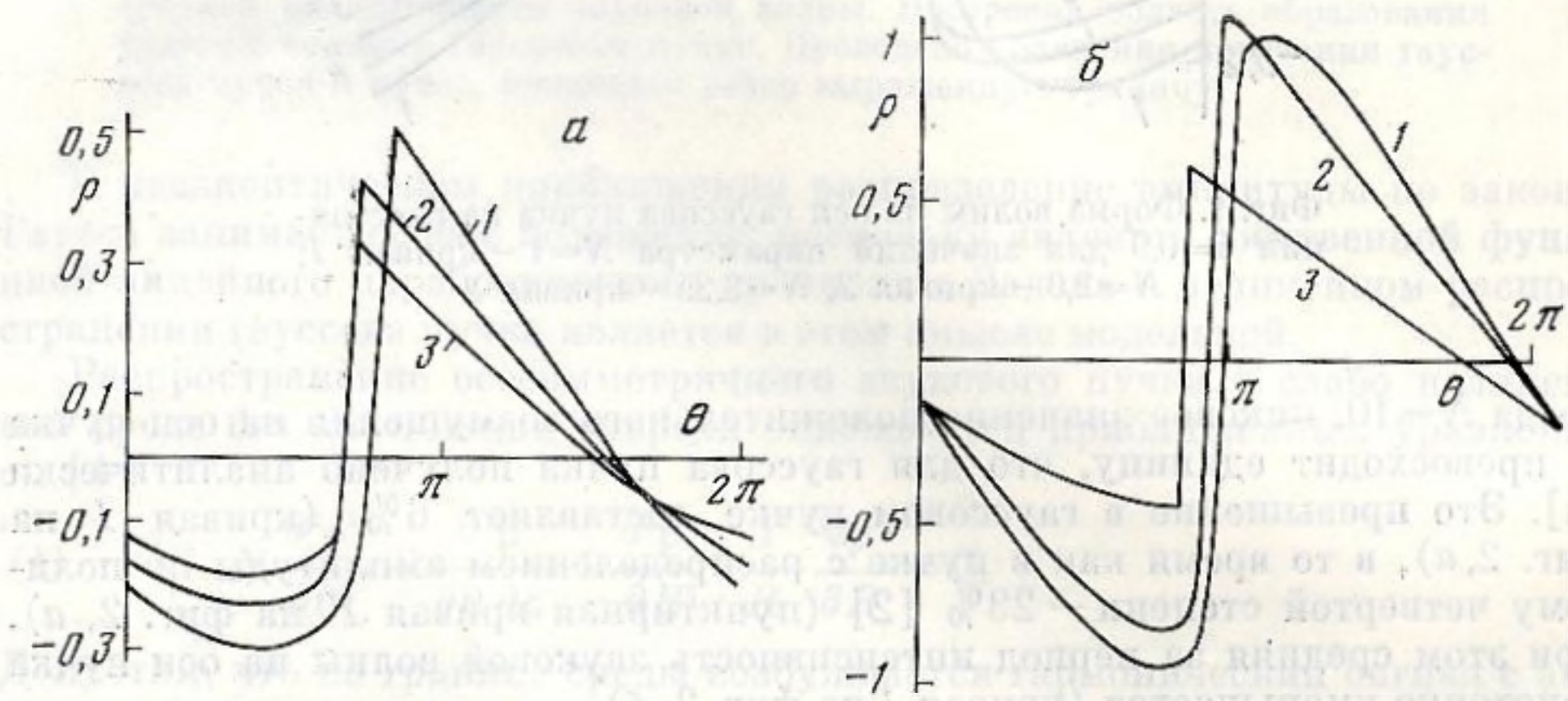
При изменении параметра N меняется динамика формирования ударного профиля. При сравнительно малых значениях N ($N=1{,}5$; 2; 3) сначала положительный полупериод становится треугольным, но фронт еще неударный (кривая *1* на фиг. 3, *а*). Затем фронт сужается и становится ударным (кривая *2*). Далее форма волны не изменяется, только уменьшается пиковое значение возмущения (кривая *3*). Когда нелинейность проявляется сильнее, чем дифракция ($N=5$; 10), разрыв образуется, когда задний фронт еще скруглен, а потом уже положительный полупериод приобретает треугольную форму. Это иллюстрирует фигура 3, *б*, где показана форма волны перед образованием разрыва (кривая *1*), в момент образования разрыва (кривая *2*), после того как ударный фронт уже сформировался (кривая *3*).

Изменение формы возмущения во времени и в пространстве изображено на фиг. 4. Возмущение, синусоидальное вблизи границы (фиг. 4, *а*) при распространении становится треугольным (фиг. 4, *б*). Далее эта форма сохраняется, а ширина пучка увеличивается (фиг. 4, *в*).

Ударная волна образуется сначала на оси пучка, затем область ударной волны расширяется, как показано на фиг. 5. Естественно, что с увеличением параметра N ударная волна образуется раньше. Координата формирования ударного фронта определяется согласно следующему критерию: фронт считается ударным, если изменение функции от отрицательного значения до максимальной положительной величины происходит за время $\Delta\theta\leqslant\pi/15$. Обоснованность критерия проверялась расчетами при различных шагах. Определяя эту координату в различных случаях, можно



Фиг. 2. Изменение пикового значения возмущения в фазе сжатия (*а*) и средней за период интенсивности (*б*) на оси гауссова пучка – кривые *1*, при $R=0{,}4$ – *2*; $R=0{,}7$ – *3*, $R=1{,}03$ – *4*. Штриховые кривые соответствуют пучку с амплитудой, изменяющейся по закону $(1-R^2)^2$, на оси – кривые *1'* и при $R=1{,}03$ – *4'* [2]

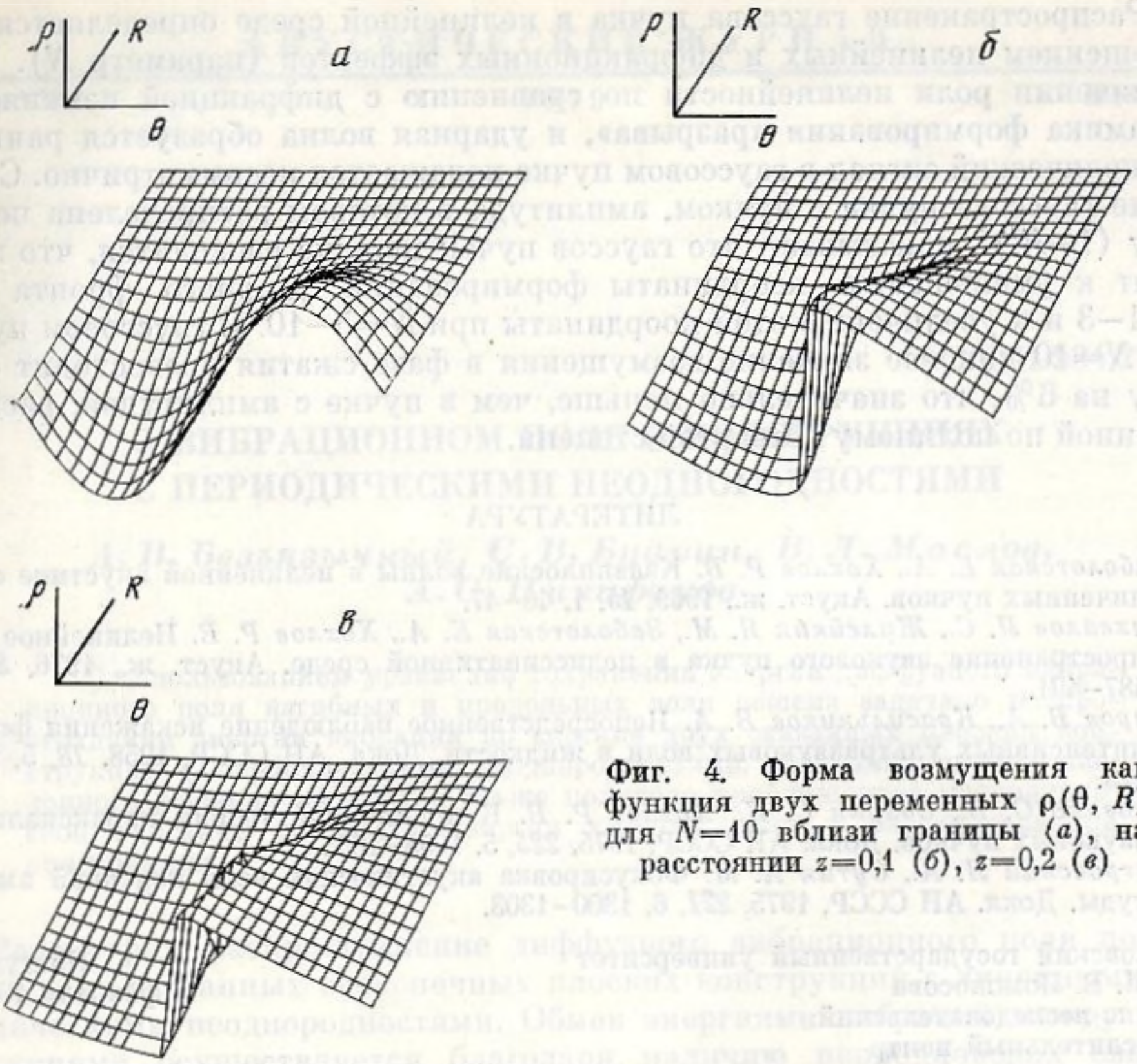


Фиг. 3. Волновой профиль на оси гауссова пучка при $N=1{,}5$ (*а*) и при $N=10$ (*б*) перед образованием разрыва ($z=0{,}6$ (*а*) и $z=0{,}05$ (*б*)) – кривые *1*; ударный фронт только что образовался ($z=0{,}8$ (*а*) и $z=0{,}07$ (*б*)) – кривые *2*; после образования ударной волны ($z=1$ (*а*) и $z=0{,}2$ (*б*)) – кривые *3*

сравнивать степень проявления нелинейных свойств. В таблице приведены координаты образования ударной волны z_p на оси гауссова пучка и пучка, амплитуда в котором распределена по полиному четвертой степени. При сравнительно слабой нелинейности в гауссовом пучке ударная волна образуется раньше, при сильной же нелинейности ($N=5$; 10) – чуть позже. Оба эти фактора объясняются меньшей расходимостью гауссова пучка. Действительно, пиковое значение возмущения и интенсивность на оси гауссова пучка уменьшаются медленнее, чем в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени, что способствует проявлению нелинейных эффектов. Но при увеличении N, как показано на фиг. 6, уменьшение ρ_n на оси сначала замедляется, а при $N=10$ ρ_n даже увеличивается и превосходит единицу. Излом на кривых, изображенных на фиг. 6, сов-

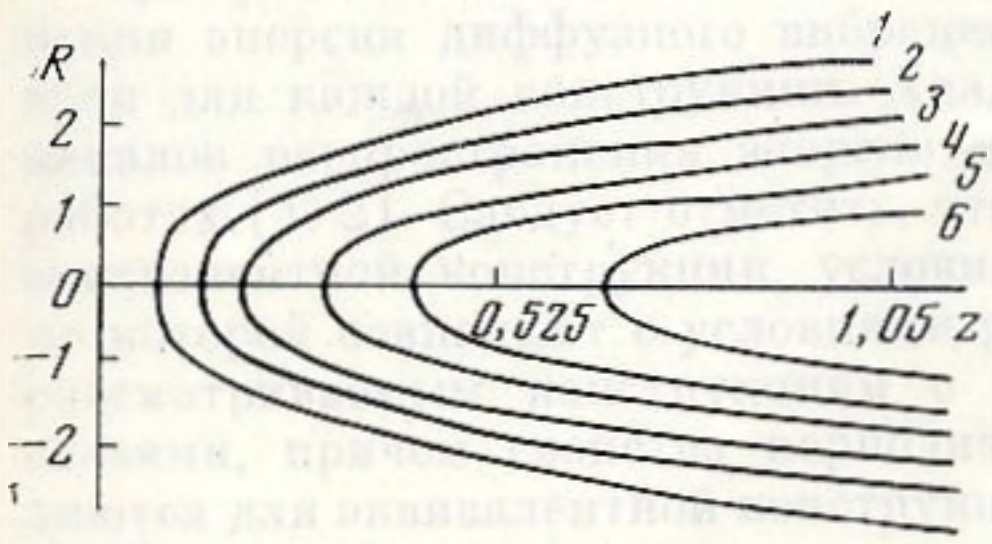
Координата образования ударной волны

Форма пучка	$N=1$	1,5	2	2,5	3	5	10
$\exp(-R^2)$	–	0,7	0,45	0,3	0,25	0,15	0,07
$(1-R^2)^2$	–	–	0,8	0,45	0,28	0,13	0,05

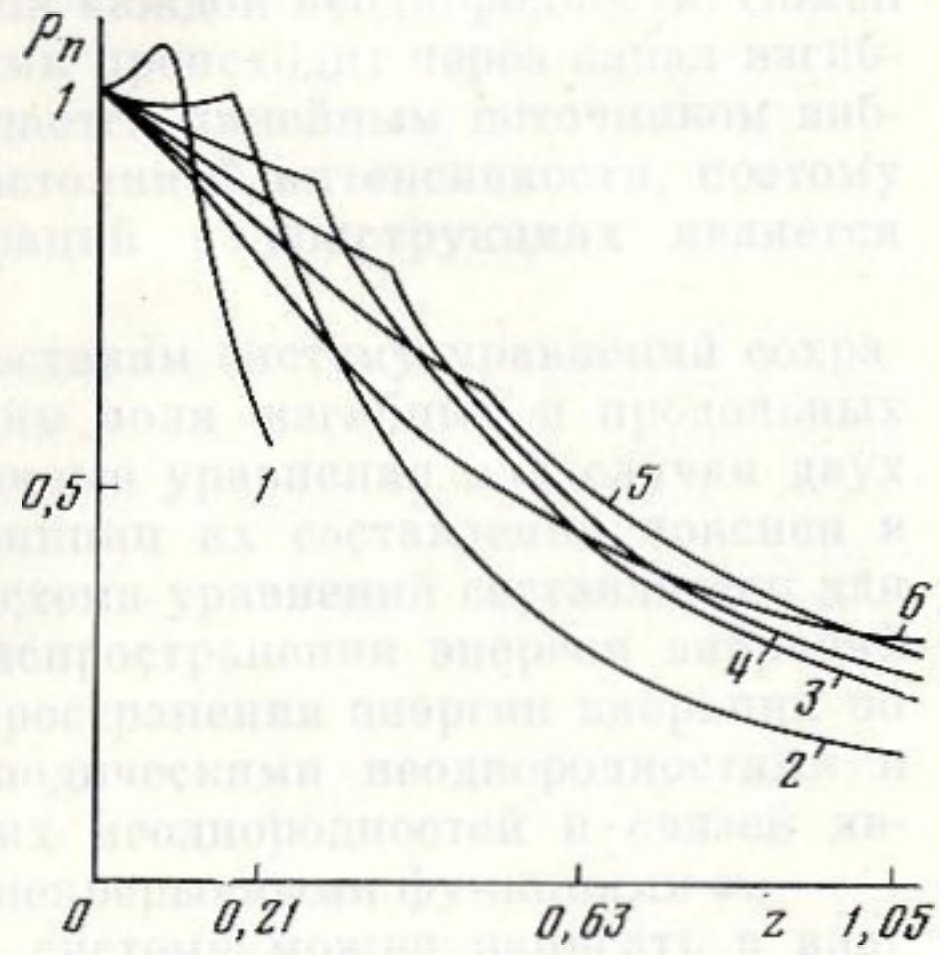


Фиг. 4. Форма возмущения как функция двух переменных $\rho(\theta, R)$ для $N=10$ вблизи границы (*а*), на расстоянии $z=0{,}1$ (*б*), $z=0{,}2$ (*в*)

падает с координатой формирования разрыва. После образования ударной волны ρ_n резко уменьшается. Превышение пиковым значением возмущения единицы, как уже отмечалось, в гауссовом пучке меньше. Оно связано с изменением фазовых соотношений между гармониками из-за расходимости.



Фиг. 5



Фиг. 6

Фиг. 5. Область существования ударной волны в гауссовом пучке при: $N=10$ – кривая *1*; $N=5$ – кривая *2*; $N=3$ – кривая *3*; $N=2{,}5$ – кривая *4*; $N=2$ – кривая *5*; $N=1{,}5$ – кривая *6*

Фиг. 6. Изменение пикового значения возмущения на оси гауссова пучка при $N=10$ – кривая *1*, $N=5$ – кривая *2*; $N=3$ – кривая *3*; $N=2{,}5$ – кривая *4*; $N=2$ – кривая *5*; $N=1$ – кривая *6*

Распространение гауссова пучка в нелинейной среде определяется соотношением нелинейных и дифракционных эффектов (параметр N). При увеличении роли нелинейности по сравнению с дифракцией изменяется динамика формирования «разрыва», и ударная волна образуется раньше. Периодический сигнал в гауссовом пучке искажается несимметрично. Сравнение гауссова пучка с пучком, амплитуда в котором распределена по закону $(1-R^2)^2$, показывает, что гауссов пучок меньше расходится, что приводит к уменьшению координаты формирования ударного фронта при $N=1-3$ и к увеличению этой координаты при $N=5-10$. В гауссовом пучке при $N=10$ пиковое значение возмущения в фазе сжатия превосходит единицу на 6%, что значительно меньше, чем в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Заболотская Е. А., Хохлов Р. В.* Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков. Акуст. ж., 1969, *15*, 1, 40–47.
2. *Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А., Хохлов Р. В.* Нелинейное распространение звукового пучка в недиссипативной среде. Акуст. ж., 1976, *22*, 4, 487–491.
3. *Буров В. А., Красильников В. А.* Непосредственное наблюдение искажения формы интенсивных ультразвуковых волн в жидкости. Докл. АН СССР, 1958, *18*, 5, 920–923.
4. *Руденко О. В., Солуян С. И., Хохлов Р. В.* К нелинейной теории параксиальных звуковых пучков. Докл. АН СССР, 1975, *225*, 5, 1053–1055.
5. *Островский Л. А., Сутин А. М.* Фокусировка акустических волн конечной амплитуды. Докл. АН СССР, 1975, *221*, 6, 1300–1303.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Научно-исследовательский
вычислительный центр

Поступила
5 февраля 1979 г.