АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXV 1979 Вып. 6

УДК 534.2—16

О ВИБРАЦИОННОМ ПОЛЕ В КОНСТРУКЦИЯХ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

А. В. Безъязычный, С. В. Будрин, В. Л. Маслов, А. С. Никифоров

С использованием уравнений сохранения энергии диффузного вибрационного поля изгибных и продольных волн решена задача о распространении энергии вибраций по системе двух связанных плоских конструкций с периодическими неоднородностями. Выполнен анализ численного решения на ЭВМ, а также получено приближенное математическое описание плотности энергии упругих волн в рассматриваемой конструкции.

Рассмотрим распространение диффузного вибрационного поля по системе двух связанных бесконечных плоских конструкций с линейными периодическими неоднородностями. Обмен энергиями вибраций между конструкциями осуществляется благодаря наличию периодических связей, расположенных на расстоянии nl_1. Место расположения связи совпадает с местом расположения каждой n-й неоднородности; расстояние между неоднородностями равно l_1. Характеристики неоднородностей для каждой конструкции одинаковы, характеристики связей также одинаковы на всем протяжении рассматриваемых конструкций. Распространение энергии вибраций в каждом канале мы будем определять при учете взаимного преобразования изгибных волн в продольные на каждой неоднородности. Обмен энергиями вибраций между конструкциями происходит через канал изгибных волн. Одна из конструкций возбуждается линейным источником вибраций бесконечной протяженности и постоянной интенсивности, поэтому распределение плотностей энергии вибраций в конструкциях является функцией только координаты x.

Для решения поставленной задачи составим систему уравнений сохранения энергии диффузного вибрационного поля изгибных и продольных волн для каждой конструкции. Аналогичные уравнения для случая двух каналов распространения энергии и принцип их составления пояснен в работах [1, 2]. Следует отметить, что система уравнений составляется для эквивалентной конструкции, условия распространения энергии вибраций по которой совпадают с условиями распространения энергии вибраций по рассматриваемым конструкциям с периодическими неоднородностями и связями, причем свойства периодических неоднородностей и связей являются для эквивалентной конструкции непрерывными функциями x.

Для стационарного случая искомую систему можно написать в виде

$$
(1)\quad \begin{cases} \lambda_1^{\text{и}} \dfrac{\partial^2 w_1^{\text{и}}(x)}{\partial x^2} - a_{12}^{\text{и}} w_1^{\text{и}}(x) - a_1^{\text{ип}} w_1^{\text{и}}(x) - \gamma_1^{\text{и}} w_1^{\text{и}}(x) + a_{21}^{\text{и}} w_2^{\text{и}}(x) + \\ + a_1^{\text{пи}} w_1^{\text{п}}(x) = 0, \\ \lambda_1^{\text{п}} \dfrac{\partial^2 w_1^{\text{п}}(x)}{\partial x^2} - a_1^{\text{пи}} w_1^{\text{п}}(x) - \gamma_1^{\text{п}} w_1^{\text{п}}(x) + a_1^{\text{ип}} w_1^{\text{и}}(x) = 0, \end{cases}
$$

$$\left|\begin{array}{l}\lambda_2^{\text{и}}\dfrac{\partial^2 w_2^{\text{и}}(x)}{\partial x^2}-a_{21}^{\text{и}}w_2^{\text{и}}(x)-a_2^{\text{ии}}w_2^{\text{и}}(x)-\gamma_2^{\text{и}}w_2^{\text{и}}(x)+a_{12}^{\text{и}}w_1^{\text{и}}(x)+\\ +a_2^{\text{пи}}w_2^{\text{п}}(x)=0,\\ \lambda_2^{\text{п}}\dfrac{\partial^2 w_2^{\text{п}}(x)}{\partial x^2}-a_2^{\text{пи}}w_2^{\text{п}}(x)-\gamma_2^{\text{п}}w_2^{\text{и}}(x)+a_2^{\text{ип}}w_2^{\text{и}}(x)=0,\end{array}\right.$$

где $w_{1,2}^{\text{и}}(x)$ — плотность энергии изгибных волн в первой и второй конструкциях, $w_{1,2}^{\text{п}}(x)$ — плотность энергии продольных волн в первой и второй конструкциях, $\lambda_1^{\text{и}}$, $\lambda_1^{\text{п}}$, $\lambda_2^{\text{и}}$, $\lambda_2^{\text{п}}$ — коэффициенты, характеризующие условия распространения плотности энергии изгибных и продольных волн в случае отсутствия обмена энергиями между конструкциями, $\gamma_1^{\text{и}}$, $\gamma_1^{\text{п}}$, $\gamma_2^{\text{и}}$, $\gamma_2^{\text{п}}$ — коэффициенты, характеризующие поглощение энергии изгибных и продольных волн в конструкциях, $a_{12}^{\text{и}}$, $a_{21}^{\text{и}}$, $a_1^{\text{ип}}$, $a_1^{\text{пи}}$, $a_2^{\text{ип}}$, $a_2^{\text{пи}}$ — коэффициенты, учитывающие обмен энергиями между конструкциями на единицу длины.

Граничные условия для системы (1) сформулируем исходя из равенства энергии, поступающей от источника в первую конструкцию, потоку энергии изгибных волн в непосредственной близости от источника, отсутствия поступления энергии продольных волн в первой конструкции при $x=0$, отсутствия поступления энергии изгибных и продольных волн во второй конструкции при $x=0$ и полного затухания поля при удалении от источника на бесконечность:

$$(2)\quad \begin{array}{ll}\lim\left(-\lambda_1^{\text{и}}\dfrac{\partial w_1^{\text{и}}(x)}{\partial x}\right)=\dfrac{W_0}{2}, & \lim w_1^{\text{и}}(x)\to 0,\\ x\to 0, & x\to\infty,\\ \lim\left(-\lambda_1^{\text{п}}\dfrac{\partial w_1^{\text{п}}(x)}{\partial x}\right)=0, & \lim w_1^{\text{п}}(x)\to 0,\\ x\to 0, & x\to\infty,\\ \lim\left(-\lambda_2^{\text{и}}\dfrac{\partial w_2^{\text{и}}(x)}{\partial x}\right)=0, & \lim w_2^{\text{и}}(x)\to 0,\\ x\to 0, & x\to\infty,\\ \lim\left(-\lambda_2^{\text{п}}\dfrac{\partial w_2^{\text{п}}(x)}{\partial x}\right)=0, & \lim w_2^{\text{п}}(x)\to 0,\\ x\to 0, & x\to\infty.\end{array}$$

Следуя работе [2], постоянные коэффициенты λ, γ и a можно определить, используя условие соответствия распространения энергии волн по эквивалентной конструкции с непрерывно распределенными неоднородностями, для которых справедлива система (1), и по реальной конструкции с дискретными неоднородностями в виде

$$(3)\quad \lambda_{1,2}^{\text{и,п}}=\frac{\gamma_{1,2}^{\text{и,п}}l_1^2}{(\ln t_{1,2}^{\text{и,п}})^2},$$

$$(4)\quad \gamma_{1,2}^{\text{и,п}}=\omega\eta_{1,2}^{\text{и,п}},$$

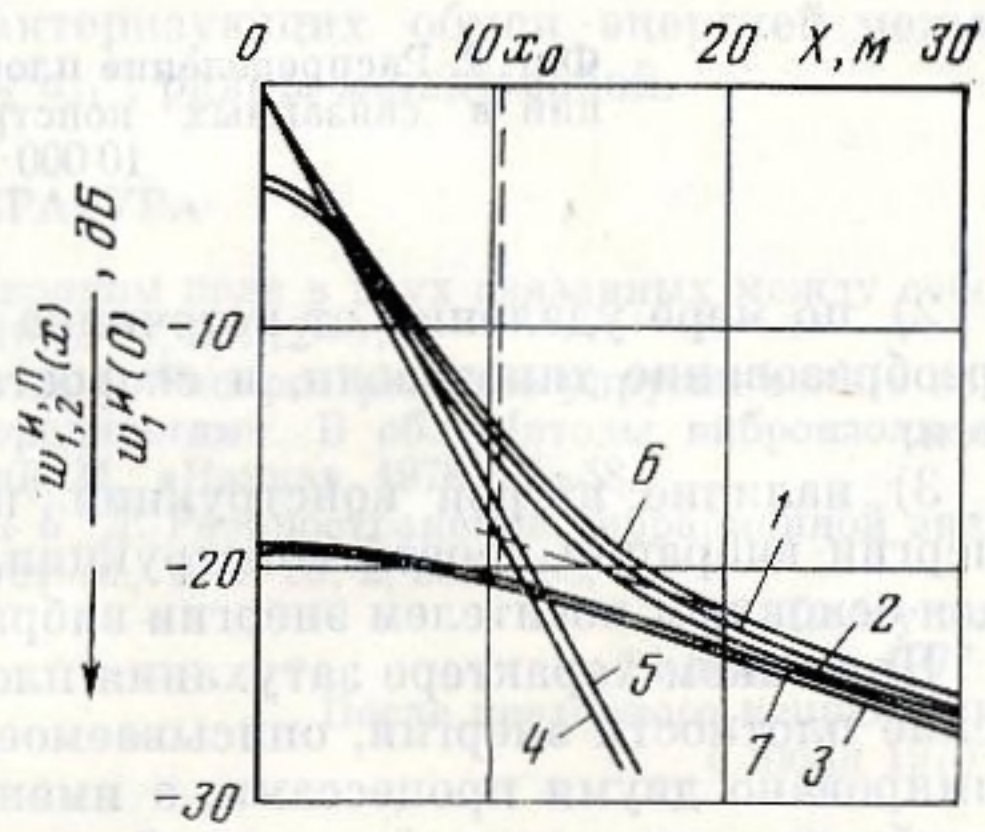
$$(5)\quad a_{1,2}^{\text{ии,пп}}=\frac{2(\alpha_{\text{п,и}i}^{\text{и,п}i}+\alpha_{\text{п,и}i+1}^{\text{и,п}i})c_{\text{пр}}}{3l_1}$$

$$(6)\quad a_{12,21}^{\text{и}}=\frac{4\alpha_{1i,2,2i,1}c_{\text{гр}\,1,2}}{3l_1}$$

где

$$t_{1,2}^{и,п}=\left(1+\frac{\beta_{1,2,i}^{ии}}{\alpha_{1,2}^{ии,пп}c_{гр\,1,2}^{и,п}}\right)\pm\sqrt{\left(1+\frac{\beta_{1,2,i}^{ии}}{\alpha_{1,2}^{ии,пп}c_{гр\,1,2}^{и,п}}\right)^2-1},$$

причем знак «+» выбирается в случае приближения к источнику вибраций, при удалении от источника выбирается знак «—». $\alpha_{1,2}^{ии,пп}=\tau_{1,2}^{ии,пп}/\pi$ — коэффициент передачи энергии через неоднородность, $\tau_{1,2}^{ии,пп}$ — коэффициент прохождения энергии через неоднородность при диффузном падении, $\beta_{1,2,i}^{и,п}=\omega\eta_{1,2}^{ии}l_1$ — коэффициент поглощения энергии в i-м элементе, $\alpha_{п,и,i}^{и,пi}=\tau_{п,иi}^{и,пi}/\pi$ — коэффициент передачи энергии изгибных (продольных) волн в энергию продольных (изгибных) волн в i-м элементе, $\tau_{п,иi}^{и,пi}$ — коэффициент преобразования энергии изгибных (продольных) волн i-го элемента в энергию продольных (изгибных) волн i-го элемента на неоднородности при диффузном падении, $\alpha_{п,иi+1}^{и,пi}=\tau_{п,иi+1}^{и,пi}/\pi$ — коэффициент передачи энергии изгибных (продольных) волн i-го элемента в энергию продольных (изгибных) волн $i+1$-го элемента, $\tau_{п,иi+1}^{и,пi}$ — коэффициент преобразования энергии изгибных (продольных) волн i-го элемента в энергию продольных (изгибных) волн $i+1$-го элемента на неоднородности при диффузном падении; $c_{гр\,1,2}$ — групповая скорость распространения энергии изгибных волн; $c_п$ — скорость продольных волн, ω — круговая частота. Поскольку из принципа взаимности следует, что $\alpha_{1i,2}^{и}=\alpha_{2i,1}^{и}$, $=\alpha_{пi}^{иi}$, то, вводя обозначения средней спектральной плотности вибрационной энергии $Q_{1,2}^{и}=w_{1,2}^{и}c_{гр\,1,2}$, $Q_{1,2}^{п}=w_{1,2}^{п}c_п$, систему (1) можно привести к форме, которая использована для описания процессов распространения вибрационной энергии в работе [3]. Численное решение системы (1) получено на ЭВМ БЭСМ-6 с использованием стандартных подпрограмм по нахождению собственных значений матриц и решения систем алгебраических уравнений. Решение системы было проведено для конструкций, обладающих следующими параметрами: $l_1=1{,}0$ м; толщина конструкций 0,01 и 0,005 м; коэффициенты прохождения через неоднородности $\alpha_{1,2}^{и,и}=0{,}33$, $\alpha_{1,2}^{п,п}=0{,}99$; коэффициенты преобразования типов волн на неоднородностях $\alpha_{иi}^{пi}/f=100$ Гц$=10^{-3}$, $\alpha_{иi}^{пi}/f=10$ кГц$=0{,}1$; коэффициенты связи $a_{12}^{и}/f=100$ Гц$=5$, $a_{12}^{и}/f=10$ кГц$=16{,}2$, $a_{21}^{и}/f=100$ Гц$=0{,}64$, $a_{21}^{и}/f=10$ кГц$=1{,}32$; коэффициент потерь изгибных волн $\eta_{1,2}^{и}=5\cdot10^{-3}$; коэффициент потерь продольных волн $\eta_{1,2}^{п}=5\cdot10^{-4}$.

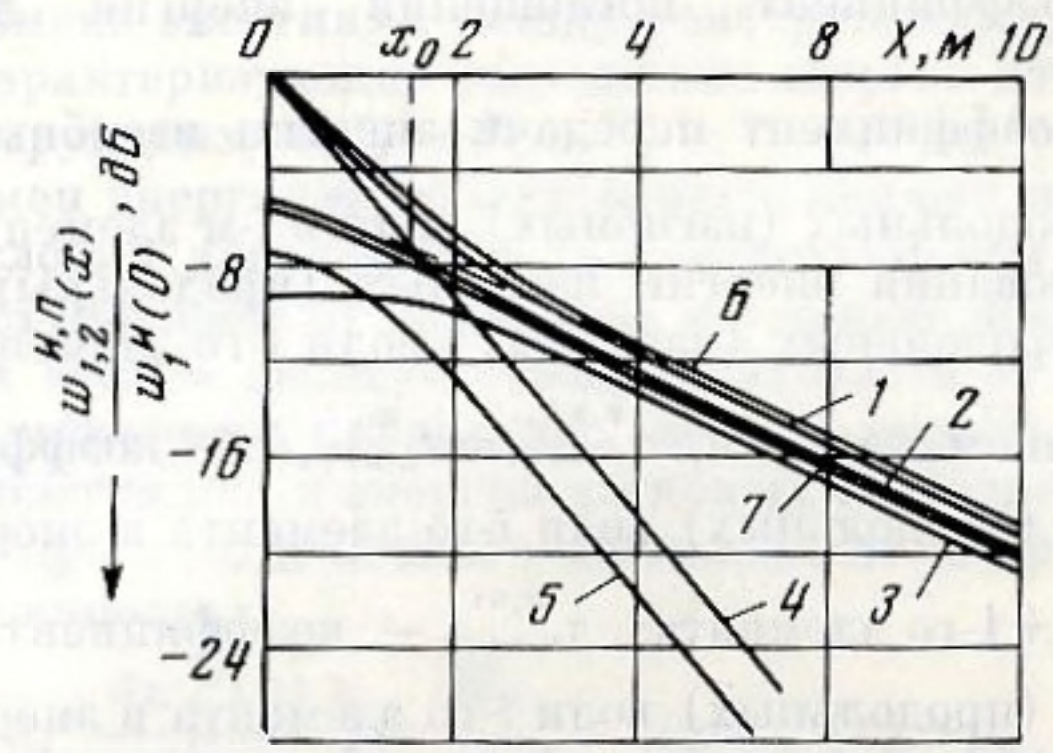


Фиг. 1. Распределение плотностей энергии вибраций в связанных конструкциях на частоте 100 Гц

На фиг. 1 и 2 приведены результаты расчета плотностей энергий вибраций в первой и второй конструкциях на частотах 100 и 10 000 Гц при удалении точки наблюдения от источника (кривая *1* представляет плотность

энергии изгибных волн первой конструкции; *2* — плотность энергии изгибных волн во второй конструкции; *3* — плотность энергии продольных волн в первой конструкции). На этих же фигурах приведены значения плотности энергии изгибных волн в первой и второй конструкциях в случае отсутствия преобразования типов волн (кривые *4* и *5*), а также плотности энергии изгибных и продольных волн первой конструкции при отсутствии второй (кривые *6* и *7*). Анализ результатов расчета позволяет сделать следующие выводы:

1) в непосредственной близости от источника уменьшение плотности энергии изгибных волн обусловлено поглощением энергии изгибных волн, и преобразование типов волн мало влияет на величину затухания;



Фиг. 2. Распределение плотностей энергий вибраций в связанных конструкциях на частоте 10 000 Гц

2) по мере удаления от источника все в большей степени сказывается преобразование типов волн, и скорость затухания существенно уменьшается;

3) наличие второй конструкции незначительно изменяет плотность энергии вибрации первой конструкции, так как первая конструкция является основным носителем энергии вибраций.

При таком характере затухания плотности энергии вибраций распределение плотности энергии, описываемое системой (1), может быть аппроксимировано двумя процессами, а именно, затуханием плотностей энергии изгибных волн в первой и второй конструкциях и затуханием плотностей энергии изгибных и продольных волн первой конструкции при отсутствии второй. При этом координату $x=x_0$ разделения двух областей можно приближенно определить, приравняв выражения, описывающие плотности энергии в этих двух случаях. При использовании обозначений системы (1) выражение для x_0 принимает вид

$$x_0=\frac{1}{S_4-S_2}\ln\left(\frac{S_1^2-S_2^2}{S_3^2-S_4^2}\,\frac{\dfrac{a_1^{пи}+\gamma_1^{п}}{S_4\lambda_1^{п}}-S_4}{\dfrac{a_{21}^{и}+\gamma_2^{и}}{S_2\lambda_2^{и}}-S_2}\right), \tag{7}$$

где

$$S_{1,2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{a_{12}^{и}+\gamma_1^{и}}{\lambda_1^{и}}+\frac{a_{21}^{и}+\gamma_2^{и}}{\lambda_2^{и}}\pm\sqrt{\left(\frac{a_{21}^{и}+\gamma_1^{и}}{\lambda_1^{и}}-\frac{a_{21}^{и}+\gamma_2^{и}}{\lambda_2^{и}}\right)^2+4\frac{a_{12}^{и}a_{21}^{и}}{\lambda_1^{и}\lambda_2^{и}}}},$$

$$S_{3,4}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{a_1^{\text{ип}}+\gamma_1^{\text{и}}}{\lambda_1^{\text{и}}}+\frac{a_1^{\text{пи}}+\gamma_1^{\text{п}}}{\lambda_1^{\text{п}}}\pm\sqrt{\left(\frac{a_1^{\text{ип}}+\gamma_1^{\text{и}}}{\lambda_1^{\text{и}}}-\frac{a_1^{\text{пи}}+\gamma_1^{\text{п}}}{\lambda_1^{\text{п}}}\right)^2+4\frac{a_1^{\text{ип}}a_1^{\text{пи}}}{\lambda_1^{\text{и}}\lambda_1^{\text{п}}}}}.$$

Как видно из выражения (7), величина x_0 зависит от известных коэффициентов распространения, поглощения и обмена энергии изгибных и продольных волн для каждой отдельной частоты.

Математическое описание указанных двух процессов значительно проще может быть получено на основании выражений работы [2].

Систему уравнений, описывающую распространение вибрационной энергии по рассмотренной конструкции в случае отсутствия потерь, можно записать так:

$$\frac{\partial^2 w_1^{\text{и}}}{\partial x^2}-\frac{a_{12}^{\text{и}}}{\lambda_1^{\text{и}}}w_1^{\text{и}}+\frac{a_{21}^{\text{и}}}{\lambda_1^{\text{и}}}w_2^{\text{и}}=\delta(x)W_0,$$

(8)

$$\frac{\partial^2 w_2^{\text{и}}}{\partial x^2}-\frac{a_{21}^{\text{и}}}{\lambda_2^{\text{и}}}w_2^{\text{и}}+\frac{a_{12}^{\text{и}}}{\lambda_2^{\text{и}}}w_1^{\text{и}}=0.$$

Решение этой системы имеет следующий вид:

$$w_1^{\text{и}}=W_0,$$

(9)

$$w_2^{\text{и}}=\frac{a_{12}^{\text{и}}}{a_{21}^{\text{и}}}W_0.$$

Видно, что величины потоков, характеризующих обмен энергией между энергоканалами $q_{12}^{\text{и}}=w_1a_{12}^{\text{и}}$ и $q_{21}=w_2^{\text{и}}a_{21}^{\text{и}}$, равны между собой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никифоров А. С.* О диффузном вибрационном поле в двух связанных между собой параллельных пластинах. Акуст. ж., 1975, *21*, 6, 912–916.
2. *Будрин С. В., Маслов В. Л., Никифоров А. С.* Распространение упругих волн в конструкциях с периодическими неоднородностями. В сб.: Методы виброизоляции машин и присоединенных конструкций. М., «Наука», 1975, 56–58.
3. *Белов В. Д., Рыбак С. А., Тартаковский Б. Д.* Распространение вибрационной энергии в структурах с поглощением. Акуст. ж., 1977, *23*, 2, 200–208.

Поступила
14 декабря 1977 г.
После повторного исправления
4 июля 1979 г.