АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXV 1979 Вып. 6

УДК 517.9:535.4

ДИФРАКЦИЯ НА КЛИНЕ С ИСКРИВЛЕННЫМИ ГРАНЯМИ

В. А. Боровиков

Рассмотрена двумерная задача о дифракции звука на клине с искривленными гранями (т. е. на криволинейной поверхности с изломом). Для расчета поля вблизи кромки использован метод локального разложения, что в принципе позволяет найти все члены лучевого разложения краевой волны. Приведены явные выражения для первых двух членов этого разложения, а также для первых двух членов разложения поля вблизи границ тени (полутеневого разложения) и для коэффициентов возбуждения распространяющихся вблизи граней волн соскальзывания и волн шепчущей галереи.

Рассмотрим двумерную задачу о дифракции падающего поля

$$u_{\text{пад}}=\sum\left(\frac{i}{k}\right)^n A_n e^{iks_{\text{пад}}} \tag{1}$$

на поверхности S с изломом, т. е. на «клине» с криволинейными гранями (фиг. 1). На S поставим краевое условие Дирихле или Неймана, на кромке O — условия регулярности (условия Майкснера). Рассматривается коротковолновая асимптотика решения, т. е. предполагается, что $k\gg1$.

Решение рассматриваемой задачи состоит из нескольких слагаемых: из геометро-акустического решения (т. е. суммы падающей и отраженных волн, умноженных на множители, равные единице в области распространения соответственной волны и нулю в области тени для этой волны); из расходящейся из кромки O цилиндрической краевой волны, компенсирующей разрывы геометро-акустического решения; из многократных переотражений краевой волны и из возбужденной ею волны шепчущей галереи, распространяющихся вблизи вогнутых граней S, а также из волн соскальзывания, возбуждаемых краевой волной вблизи выпуклых граней S. Естественно возникают следующие проблемы:

а) Определить лучевое разложение краевой волны.

б) Найти асимптотику поля в переходных зонах — окрестностях границ тени для падающей и отраженных волн.

в) Найти коэффициенты возбуждения волн соскальзывания и волн шепчущей галереи, распространяющихся вдоль граней S.

Главный член лучевого разложения краевой волны был постулирован Келлером в его работах (см., например, [1—2]) по геометрической теории дифракции; он совпадает с главным членом лучевого разложения краевой волны, возбуждаемой при падении на «касательный» клин S' плоской волны с теми же амплитудой и направлением распространения, которые имеет в кромке O падающее поле (1). Это означает, в частности, что первый член лучевого разложения краевой волны не зависит от кривизн граней в O.

Зависящий от этих кривизн второй член лучевого разложения краевой волны был найден в работах [3, 4]. Однако метод, использованный в этих работах, не позволяет найти последующие члены лучевого разложения.

Лучевое разложение краевой волны неприменимо в зонах полутени, т. е. вблизи границ тени для падающей и отраженных волн. Выражения

для поля в области полутени были предложены в работах [5, 6]. Вблизи границы тени для отраженной волны, например, решение u имеет вид ($s_{кр}=s_{пад}(O)+r$ — эйконал краевой волны):

$$(2)\qquad u=u_{пад}+u_{отр}F(\sqrt{k(s_{кр}-s_{отр})})+\sum\left(\frac{i}{k}\right)^{n+1/2}f_n e^{ikr}.$$

Здесь $u_{отр}$ — волна, возникающая при отражении первичного поля (1) от поверхности AOA'', полученной гладким продолжением облученной грани AO за вершину O, и строящаяся посредством обычных алгоритмов лучевого метода (см., например, [7]), $F(\xi)$ — интеграл Френеля:

$$(3)\qquad F(\xi)=\frac{1}{\sqrt{\pi i}}\int\limits_{-\infty}^{\xi}e^{is^2}ds.$$

Знак радикала $\sqrt{k(s_{кр}-s_{отр})}$ выбирается положительным в области, облученной отраженной волной, и отрицательным в тени; поскольку $s_{кр}-s_{отр}$ неотрицательно и имеет на границе тени нуль второго порядка, определенный таким образом аргумент интеграла Френеля оказывается регулярной функцией координат.

Найденный в работе [6] первый член f_0 асимптотического разложения поправки $u'=\sum\left(\frac{i}{k}\right)^{n+1/2}f_n e^{iks_{кр}}$ регулярен в окрестности границы тени.

Можно ожидать, что регулярны все f_n; эта гипотеза доказана в работе [5] для задачи дифракции на произвольном гладком отверстии в плоском экране. Ниже будут приведены явные формулы для f_0 и f_1.

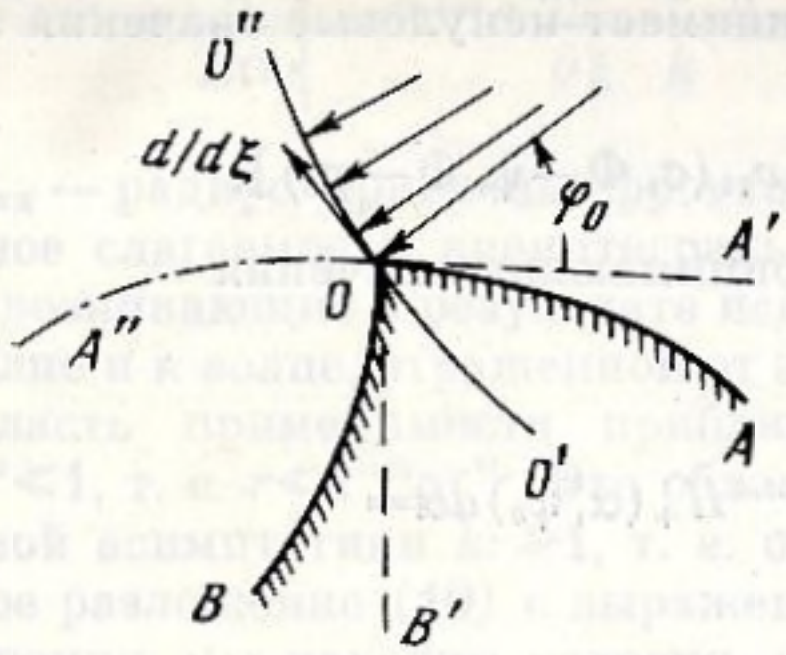
Аналогичное формуле (2) выражение справедливо в окрестности границы тени для падающей волны.

Как показано в работах [8, 9], при дифракции на искривленной полуплоскости краевая волна кромки O возбуждает вблизи полуплоскости те же (в главном члене асимптотики и с точностью до найденного в [9] постоянного множителя) волны шепчущей галереи и волны соскальзывания, которые возбуждаются источником, расположенным соответственно на вогнутой или выпуклой поверхности. Ниже получены аналогичные результаты для произвольной поверхности с изломом.

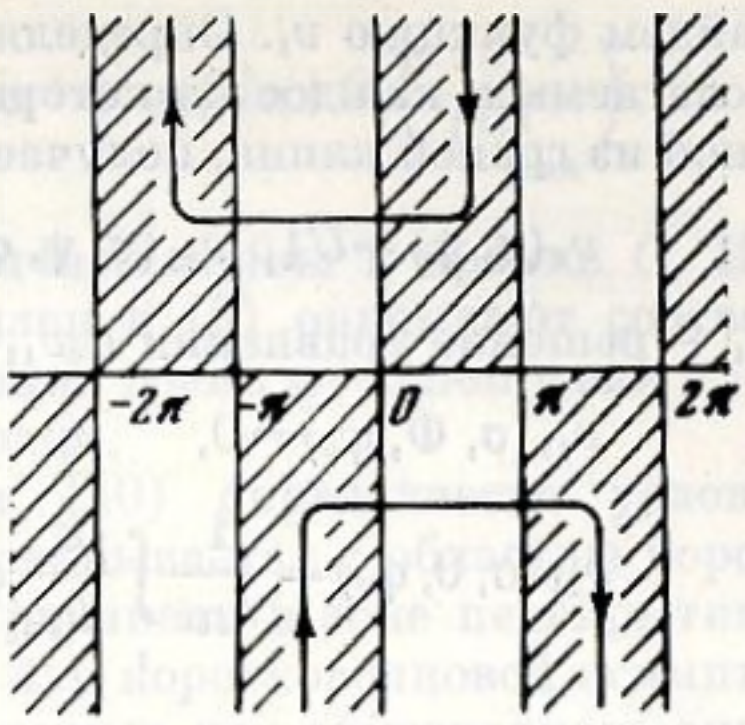
Настоящая работа является обобщением работ [8, 9]. Как и в этих работах, основная идея здесь — вычисление локального разложения поля вблизи кромки O, т. е. вычисление поля в «растянутых» координатах $\sigma=kr$, φ : $u=\sum k^{-n}u_n(\sigma,\varphi)$ (впервые аналогичные координаты были введены в работе [10] для решения задачи дифракции на отверстии в плоском экране). Функции $u_n(\sigma,\varphi)$ удовлетворяют рекуррентной системе краевых задач для уравнения Гельмгольца $(\Delta_\sigma+1)u_n=0$. В работах [8, 9] эти задачи решаются методом парных интегральных уравнений; мы используем аппарат интеграла Зоммерфельда. Сравнивая при $\sigma\sim k^{1/2}$, $r\sim k^{-1/2}$ получающиеся разложения с обычным лучевым разложением краевой волны (вдали от S и от границ тени); с полутеневым разложением (2) в окрестности границы тени для отраженной волны и аналогичным разложением для падающей волны и, наконец, с выражениями для волны шепчущей галереи и волны соскальзывания вблизи S, мы получаем начальные данные для построения решения вдали от кромки O [11].

Перейдем к построению локального разложения. Все выкладки будут проводиться для граничного условия $u|_S=0$; далее мы укажем, как изменятся полученные результаты для условия $\partial u/\partial n|_S=0$.

Грани S в полярных координатах r, φ зададим уравнениями $\varphi=\varphi_1(r)=\frac{\rho_1 r}{2}+O(r^2)$ и $\varphi=\varphi_2(r)=\Phi-\frac{\rho_2 r}{2}+O(r^2)$, где Φ — раствор касательно-



Фиг. 1. Геометрия задачи



Фиг. 2. Контур интегрирования в интеграле Зоммерфельда

го клина S'; ρ_1, ρ_2 — кривизны граней в вершине O ($\rho>0$ для вогнутой грани и $\rho<0$ для выпуклой грани). Введем локальные координаты $\sigma=kr$, $\psi=\Phi\dfrac{\varphi-\varphi_1(r)}{\varphi_2(r)-\varphi_1(r)}$. При малых r

$$\psi=\varphi+rq+O(r^2),\quad q=\frac{(\rho_1+\rho_2)\psi-\rho_1\Phi}{2\Phi}=\frac{(\rho_1+\rho_2)\varphi-\rho_1\Phi}{2\Phi}+O(r).$$

Обозначим через U, $\dfrac{\partial U}{\partial\xi}$ и φ_0 значения в кромке O первичного поля, его производной вдоль волнового фронта $O'OO''$ (в направлении, показанном стрелкой на фиг. 1) и направления, из которого пришло первичное поле; через u_0 обозначим решение задачи о дифракции первичного поля на касательном клине S'. Будем предполагать, что $\varphi_0\neq0$, $\Phi-\pi$, π, Φ. Искомое решение u запишем в форме $u=u_0+v$, где подлежащая определению функция v удовлетворяет уравнению Гельмгольца и принимает на S значения $-u_0$. Будем искать $v=v(k,\sigma,\psi)$ в виде $v=\sum\limits_{n=1}^{\infty}k^{-n}v_n(\sigma,\psi)$, а для вычисления $v_n(\sigma,\psi)$ напишем в аналогичной форме граничные условия и оператор Гельмгольца:

$$v|_{\psi=0,\Phi}=-u_0|_{\psi=0,\Phi}=-\sum_{n=1}^{\infty}k^{-n}u_0^{(n)}(\sigma,\psi)|_{\psi=0,\Phi},\tag{4}$$

$$L=\Delta+k^2=\sum_{n=0}^{\infty}k^{2-n}L_n\left(\sigma,\psi,\frac{\partial}{\partial\sigma},\frac{\partial}{\partial\psi}\right),\tag{5}$$

где

$$L_0=1+\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}+\frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial^2}{\partial\psi^2};$$

$$L_1=q\frac{\partial^2}{\partial\psi\partial\sigma}+\frac{q}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\psi}+\frac{2(\rho_1+\rho_2)}{\sigma\Phi}\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}.$$

Очевидно, v_n принимают при $\psi=0,\Phi$ значения $-u_0^{(n)}$ и удовлетворяют уравнению $L_0v_n=-\sum\limits_{p=1}^{n-1}L_pv_{n-p}$, т. е. для v_n получается последовательность граничных задач в угловой области $0<\psi<\Phi$; $0<\sigma<\infty$.

Найдем функцию v_1. Определяя $-u_0^{(1)}$ и представляя v_1 в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых принимает ненулевые значения лишь на одной из граней клина, получаем

$$v_1(\sigma, \psi) = U[\rho_1 v_{11}(\sigma, \psi, \varphi_0) + \rho_2 v_{11}(\sigma, \Phi-\psi, \Phi-\varphi_0)], \tag{6}$$

где v_{11} — решение уравнения $L_0 v_{11}=0$, принимающее значения

$$v_{11}(\sigma, \Phi, \varphi_0) = 0,$$

$$v_{11}(\sigma, 0, \varphi_0) = \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{d}{d\varphi_0}\sigma e^{-i\sigma\cos\alpha} H_+(\alpha, \varphi_0)\, d\alpha = \tag{7}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\pi-i\infty}^{\pi+i\infty} \sigma e^{i\sigma\cos\alpha}\frac{\partial H_+(\alpha, \varphi_0)}{\partial\varphi_0}\, d\alpha + \chi(\pi-\varphi_0)\frac{d}{d\varphi_0}\sigma e^{-i\sigma\cos\varphi_0}.$$

Здесь $H_\pm(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2\Phi}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2\Phi}(\alpha-\beta) \pm \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2\Phi}(\alpha+\beta)\right]$ — ядро Зоммерфельда; контур γ состоит из двух петель и показан на фиг. 2; $\chi(z)\equiv 1$ при $z>0$ и $\chi(z)\equiv 0$ при $z<0$. Используя результаты работы [12] для решения граничной задачи (7), имеем

$$v_{11} = \frac{\partial^2}{\partial\psi\partial\varphi_0}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\pi-i\infty}^{\pi+i\infty} e^{-i\sigma\cos\alpha} R(\alpha)\, d\alpha - \right. \tag{8}$$

$$\left. - i\chi(\pi-\psi-\varphi_0)\frac{\exp(-i\sigma\cos(\psi+\varphi_0))}{\sin\varphi_0}\right],$$

$$R(\alpha) = R(\alpha, \psi, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} H_+(\alpha, \beta-\psi) H_+(\beta, \varphi_0)\frac{d\beta}{\sin\beta} + \tag{9}$$

$$+ \chi(\pi-\psi)\frac{H_+(\alpha-\psi, \varphi_0)}{\sin(\alpha-\psi)}.$$

Легко проверить непосредственной выкладкой, что v_{11} удовлетворяет уравнению $L_0 v_{11}=0$ и граничным условиям (7).

Аналогично строятся последующие приближения $v_2, v_3, \ldots, v_n, \ldots$ Приближение порядка n выражается формулой, аналогичной выражению (8), где R — n-кратный интеграл от комбинаций функций H_+. При $\Phi = \frac{m\pi}{n}$ этот интеграл легко преобразуется в интеграл от алгебраических функций.

Ограничиваясь первым приближением, т. е. главным членом поправки, возникающей из-за искривления граней, заменяя в аргументе v_{11} угол ψ на φ и оценивая погрешность получающегося приближения, имеем

$$u(k, \sigma, \varphi) = v_0(k, \sigma, \varphi) + \frac{U}{k}[\rho_1 v_{11}(\sigma, \varphi, \varphi_0) + \tag{10}$$

$$+ \rho_2 v_{11}(\sigma, \Phi-\varphi, \Phi-\varphi_0)] + O(\sigma^3 k^{-2}\rho^2).$$

Здесь $\rho = \max(\rho_1, \rho_2)$, v_{11} имеет вид (8), а v_0 — локальное разложение решения задачи дифракции первичного поля (1) на касательном клине S':

$$v_0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} e^{-i\sigma\cos\alpha} U H_-(\alpha+\varphi, \varphi_0)\left[1 + \frac{\sigma\cos\alpha + i\sigma^2\sin\alpha}{2kr_{\text{пад}}}\right] d\alpha + \tag{11}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} e^{-i\sigma\cos\alpha}\frac{\partial U}{\partial\xi}\frac{\sigma}{k}\sin\alpha H_+(\alpha+\varphi,\varphi_0)\,d\alpha+O\left(\frac{\sigma^3}{k^2 r_{\text{пад}}^2}\right),$$

где $r_{\text{пад}}$ — радиус кривизны фронта первичной волны в кромке O. Интегральное слагаемое и внеинтегральный член в (8) описывают соответственно возникающие в результате искривления грани $\varphi=0$ поправки к краевой волне и к волне, отраженной от этой грани.

Область применимости приближения (10) определяется условием: $\sigma^3 k^{-2}\rho^2 \ll 1$, т. е. $r \ll k^{-1/3}\rho^{-2/3}$. Эта область перекрывается с областью коротковолновой асимптотики $kr \gg 1$, т. е. $\sigma \gg 1$. Сравнивая в зоне перекрытия локальное разложение (10) с выражениями для коротковолновой асимптотики решения, мы находим условия, необходимые для однозначного определения функций, задающих эту асимптотику.

Рассмотрим, например, неравномерную асимптотику краевой волны. Как и для любой цилиндрической волны, эта асимптотика имеет вид [7]:

$$u_{\text{кр}}=e^{ikr}\left[\sqrt{\frac{i}{kr}}f_0(\varphi)+\left(\frac{i}{kr}\right)^{3/2}\left[-\frac{1}{2}f_0''(\varphi)-\frac{1}{8}f_0(\varphi)\right]+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{i}{k}\right)^{3/2}\frac{1}{\sqrt{r}}f_1(\varphi)+O(k^{-5/2})\right], \tag{12}$$

где функции $f_0(\varphi)$ и $f_1(\varphi)$ подлежат определению. Сравнивая это выражение с асимптотикой (10) при $\sigma\to\infty$ (для чего интегралы в формулах (8) и (11) следует вычислить методом стационарной фазы), получим

$$u_{\text{кр}}=u_{\text{кр}}^{(0)}+\left(\frac{i}{k}\right)^{3/2}\frac{1}{\sqrt{r}}e^{ikr}G(\varphi,\varphi_0)+O(k^{-5/2}). \tag{13}$$

Здесь $u_{\text{кр}}^{(0)}$ — краевая волна, возникающая при дифракции первичного поля на касательном клине. Ее лучевое разложение задается функциями [13]

$$f_0(\varphi)=UD(\varphi,\varphi_0);\ f_1(\varphi)=-\frac{U}{2r_{\text{пад}}}\frac{\partial^2 D(\varphi,\varphi_0)}{\partial\varphi_0^2}+\frac{\partial U}{\partial\xi}\frac{\partial D(\varphi,\varphi_0)}{\partial\varphi_0}, \tag{14}$$

где $D(\varphi,\varphi_0)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}(H_+(-\pi+\varphi,\varphi_0)-H_+(\pi+\varphi,\varphi_0))$ — коэффициент дифракции. Функция $G(\varphi,\varphi_0)$ представляет собой главный член асимптотики поправки к краевой волне, обусловленной искривлением граней:

$$G(\varphi,\varphi_0)=\frac{U}{\sqrt{2\pi}}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\varphi_0}[\rho_1 R(\pi,\varphi,\varphi_0)+\rho_2 R(\pi,\Phi-\varphi,\Phi-\varphi_0)], \tag{15}$$

где $R(\alpha,\varphi,\varphi_0)$ имеет вид (9). Функцию $R(\pi,\varphi,\varphi_0)$ легко написать в виде, симметричном относительно углов падения и наблюдения φ_0 и φ; для этого надо перевести интегрирование на прямую $\operatorname{Re}\beta=\frac{\pi}{2}$ (см. [3, 4]):

$$R(\pi,\varphi,\varphi_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H_+\left(\frac{\pi}{2}-i\xi,\varphi_0\right)H_+\left(\frac{\pi}{2}+i\xi,\varphi\right)\frac{d\xi}{\operatorname{ch}\xi}+ \tag{16}$$
$$+\frac{H_+(\pi-\varphi_0,\varphi)}{\sin\varphi_0}\chi\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_0\right)+\frac{H_+(\pi-\varphi,\varphi_0)}{\sin\varphi}\chi\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right).$$

Функция $R(\pi, \varphi, \varphi_0)$ — аналитическая функция φ, φ_0. При φ или φ_0, пересекающих значение $\pi/2$, полюс подынтегрального выражения в формуле (16) пересекает контур интегрирования; возникающий в результате разрыв интеграла компенсируется внеинтегральными слагаемыми. При $\Phi=2\pi$ интеграл (16) вычисляется в элементарных функциях [3, 4]:

$$R(\pi, \varphi, \varphi_0)\,|_{\Phi=2\pi} = \frac{1}{2\pi(\cos\varphi+\cos\varphi_0)}\left[\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)\frac{\cos\frac{\varphi_0}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}+\right. \tag{17}$$

$$\left.+\left(\pi-\frac{\varphi_0}{2}\right)\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}+\frac{\pi}{2}\right].$$

Для искривленной полуплоскости $\rho_2=-\rho_1$. Отсюда следует

$$G(\varphi, \varphi_0)=\frac{U\rho_1}{4\sqrt{2\pi}}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\varphi_0}\left[\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi+\varphi_0}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi_0}{2}}\right]. \tag{18}$$

Это выражение согласуется с результатами работы [8]; аналогичная формула в работе [14] содержит опечатки.

Рассмотрим, где расположены полюсы функции $R(\pi, \varphi, \varphi_0)$, описывающей влияние на краевую волну искривления грани $\varphi=0$. Как следует из работ [5, 6], вычеты коэффициентов лучевого разложения краевой волны на границах тени для падающей и отраженной волн определяются разрывами на этих границах геометро-акустического решения.

Если $\varphi_0>\pi$, то искривляемая грань не облучается первичным полем и геометро-акустическое решение не зависит от кривизны этой грани. Поэтому при $\varphi_0>\pi$ функция $R(\pi, \varphi, \varphi_0)$ должна быть регулярной функцией φ при всех φ: $0<\varphi<\Phi$. Если же $\varphi_0<\pi$, то возникает волна, отраженная от грани $\varphi=0$; искривление этой грани, изменяя расходимость лучей отраженной волны, меняет ее амплитуду, и тем самым сказывается на величине разрыва геометро-акустического решения на границе тени $\varphi=\pi-\varphi_0$ для отраженной волны. Поэтому при $\varphi_0<\pi$ функция $R(\pi, \varphi, \varphi_0)$ должна иметь единственный полюс — при $\varphi=\pi-\varphi_0$. Непосредственное вычисление полюсов $R(\pi, \varphi, \varphi_0)$ по формуле (16) подтверждает справедливость этих рассуждений.

Неравномерная асимптотика (12)—(16) краевой волны неприменима вблизи границы тени для падающей и отраженных волн, т. е. в переходных зонах, где кривая волна компенсирует разрывы геометро-акустического решения. Формальная причина неприменимости этой асимптотики заключается в том, что при φ, близких к этим границам, полюсы внеэкспоненциальных множителей в формулах (8) и (11) оказываются вблизи стационарных точек, и при вычислении асимптотики уже нельзя пользоваться методом стационарной фазы.

Поле вблизи границ тени выражается, как было замечено выше, через интеграл Френеля. Рассмотрим, например, окрестность границы тени $\varphi=\pi-\varphi_0$ для волны, отраженной от грани $\varphi=0$. Как показано в работе [5], существует асимптотическое решение волнового уравнения, имеющее при φ, близких к $\pi-\varphi_0$, вид

$$u^F_{\text{отр}}=u_{\text{отр}}F\left(\sqrt{k(s_{\text{кр}}-s_{\text{отр}})}\right)+\sum\left(\frac{i}{k}\right)^{n+1/2}w_n e^{iks_{\text{кр}}}, \tag{19}$$

где w_n удовлетворяют неоднородной системе уравнений переноса и стремятся к нулю при $r\to 0$ как $\sqrt{r}$. Будем искать поле при $\varphi\approx\pi-\varphi_0$ в виде

$$u=u_{\text{пад}}+u^{F}_{\text{отр}}+e^{ikr}\sqrt{\frac{i}{kr}}\left[g_0(\varphi)+\right.$$
$$\left.+\frac{i}{kr}\left(-\frac{1}{2}g_0''(\varphi)-\frac{1}{8}g_0(\varphi)\right)+\frac{i}{k}g_1(\varphi)\right]+O(k^{-5/2}), \tag{20}$$

где g_0 и g_1 подлежат определению. Чтобы их найти, сравним при $\sigma\sim\sqrt{k}$, $r\sim k^{-1/2}$ асимптотику (20) с асимптотикой локального разложения (10). Для этого положим в формуле (20) $r=\frac{\sigma}{k}$ и перепишем получающееся выражение с точностью $O(k^{-2})$. Вычисляя, например, интеграл Френеля $F(\sqrt{k(s_{\text{кр}}-s_{\text{отр}})})$, имеем

$$ks_{\text{кр}}=ks_{\text{пад}}(O)+kr=ks_{\text{пад}}(O)+\sigma;$$

$$ks_{\text{отр}}=ks_{\text{пад}}(O)-\sigma\cos(\varphi-\varphi_0)+\frac{\sigma^2}{2kr_{\text{отр}}}\sin^2(\varphi+\varphi_0),$$

где $r_{\text{отр}}$ — радиус кривизны фронта отраженной волны в кромке O; согласно работе [15], $r_{\text{отр}}^{-1}=r_{\text{пад}}^{-1}+2\rho_1/\sin\varphi_0$. Далее,

$$\sqrt{k(s_{\text{кр}}-s_{\text{отр}})}=\sqrt{2\sigma}\cos\frac{\varphi+\varphi_0}{2}+\sigma^{3/2}\frac{1}{\sqrt{2}\,kr_{\text{отр}}}\times$$
$$\times\sin^2\frac{\varphi+\varphi_0}{2}\cos\frac{\varphi+\varphi_0}{2}O(\sigma^{5/2}k^{-2})$$

и, поскольку $F'(\xi)=\frac{1}{\sqrt{\pi i}}\exp i\xi^2$,

$$F(\sqrt{k(s_{\text{кр}}-s_{\text{отр}})})=F\left(\sqrt{2\sigma}\cos\frac{\varphi+\varphi_0}{2}\right)+$$
$$+e^{ik(s_{\text{кр}}-s_{\text{отр}})}\frac{\sigma^{3/2}\sin^2\frac{\varphi+\varphi_0}{2}\cos\frac{\varphi+\varphi_0}{2}}{\sqrt{2\pi i}\,kr_{\text{отр}}}+O(\sigma^{5/2}k^{-2}).$$

С другой стороны, рассмотрим асимптотику выражения (10) при φ, близких к $\pi-\varphi_0$ и $\sigma\sim\sqrt{k}\gg 1$. При ее вычислении приходится рассматривать интегралы, в которых полюс подынтегрального выражения близок к стационарной точке; как известно (см., например, [16]), такие интегралы сводятся к интегралу Френеля. В частности,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}e^{is\cos\alpha}\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\,d\alpha}{2\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}\right)}=$$
$$=-e^{is\cos\gamma}F\left(-\sqrt{2s}\sin\frac{\gamma}{2}\right)+e^{is\cos\gamma}\chi(-\gamma). \tag{21}$$

Чтобы доказать эту формулу, достаточно перейти к независимой переменной $\omega=2\sin\frac{\alpha}{2}$, и воспользоваться леммой 3.1 из работы [16], стр. 356.

Найдем асимптотику $v_{11}(\sigma, \varphi, \varphi_0)$ при φ, близких к $\pi-\varphi_0$. Согласно формуле (8),

$$v_{11}(\sigma, \varphi, \varphi_0)=\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\varphi_0}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} e^{i\sigma\cos\alpha}R(\alpha+\pi, \varphi, \varphi_0)\,d\alpha-\right.$$

$$\left.-i\chi(\pi-\varphi-\varphi_0)\frac{e^{i\sigma\cos(\varphi+\varphi_0)}}{\sin\varphi_0}\right].$$

Из формулы (9) видно, что при φ, близких к $\pi-\varphi_0$, функция $R(\alpha+\pi)$ имеет полюс в близкой к нулю точке $\alpha=\varphi+\varphi_0-\pi$ с вычетом, равным $1/\sin\varphi_0$. Выделяя этот полюс, напишем:

$$R(\alpha+\pi, \varphi, \varphi_0)=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\varphi_0\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\varphi+\varphi_0-\pi}{2}\right)}+$$

$$+R_1(\alpha+\pi, \varphi, \varphi_0),$$

где $R_1(\alpha+\pi)$ уже регулярна при малых α. Отсюда для v_{11} получаем выражение

$$v_{11}=\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\varphi_0}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} e^{i\sigma\cos\alpha}\left[\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\varphi_0\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\varphi+\varphi_0-\pi}{2}\right)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+R_1(\alpha+\pi, \varphi, \varphi_0)\right]d\alpha-\frac{1}{\sin\varphi_0}e^{i\sigma\cos(\varphi+\varphi_0)}\chi(\pi-\varphi-\varphi_0)\right]=$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\varphi_0}\left[\frac{ie^{-i\sigma\cos(\varphi+\varphi_0)}F\left(\sqrt{2\sigma}\cos\frac{\varphi+\varphi_0}{2}\right)}{\sin\varphi_0}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\frac{i}{2\pi\sigma}}R_1(\pi, \varphi, \varphi_0)+O(\sigma^{-3/2})\right].$$

Аналогично вычисляется асимптотика заданной формулой (11) функции u_0. Сравнивая вычисленную таким образом асимптотику решения (10) с локальным разложением поля (20) и вычисляя из получающегося соотношения $g_0(\varphi)$ и $g_1(\varphi)$, мы придем к формуле (2) для равномерной асимптотики решения вблизи границы тени $\varphi=\pi-\varphi_0$ для отраженной волны, в которой $f_0(r, \varphi)$ и $f_1(r, \varphi)$ регулярны при $\varphi\approx\pi-\varphi_0$ и задаются выражениями

$$f_0(r, \varphi)=\frac{U}{\sqrt{r}}D(\varphi, \varphi_0)+\frac{B_0}{2\sqrt{\pi(s_{\text{кр}}-s_{\text{отр}})}};$$

$$f_1(r, \varphi)=\frac{1}{\sqrt{r}}\left[-\frac{U}{2r_{\text{пад}}}\frac{\partial^2 D(\varphi_1\varphi_0)}{\partial\varphi_0^2}+\frac{\partial U}{\partial\xi}\frac{\partial D(\varphi, \varphi_0)}{\partial\varphi_0}\right]-$$

(22)

$$-\frac{U}{2r^{3/2}}\left[D_{\varphi\varphi}''(\varphi, \varphi_0)+\frac{1}{4}D(\varphi, \varphi_0)\right]+\frac{U}{\sqrt{r}}G(\varphi, \varphi_0)-$$

$$-\frac{B_0e^{iks_{\text{пад}}(0)}}{4\sqrt{\pi}(s_{\text{кр}}-s_{\text{отр}})^{3/2}}+\frac{B_1e^{iks_{\text{пад}}(0)}}{2\sqrt{\pi(s_{\text{кр}}-s_{\text{отр}})}}$$

а B_0, B_1 — коэффициенты лучевого разложения отраженной волны:

$$u_{\text{отр}}=\sum\left(\frac{i}{k}\right)^n B_n e^{iks_{\text{отр}}}.$$

Укажем простой способ вывода соотношений (22) для f_0, f_1. Неравномерная асимптотика полного поля при φ, близких к $\pi-\varphi_0$, имеет вид

$$u=u_{\text{пад}}+u_{\text{отр}}\chi(\pi-\varphi-\varphi_0)+u_{\text{кр}}, \tag{23}$$

где асимптотика волны $u_{\text{кр}}$ задана формулами (13)—(15). Очевидно, если зафиксировать в формуле (2) положение точки наблюдения и положить $k\to\infty$, то, заменяя интеграл Френеля $F(\sqrt{k(s_{\text{кр}}-s_{\text{отр}})})$ его асимптотикой при $\sqrt{k(s_{\text{кр}}-s_{\text{отр}})}\to\infty$, а функцию $u_{\text{отр}}$ — ее лучевым разложением, мы получим выражение, совпадающее с формулой (23). Сравнивая в получающемся равенстве коэффициенты при одинаковых степенях $\frac{i}{k}$ у компоненты с фазой e^{ikr}, мы получим формулы (22).

В окрестности границы тени $\varphi=\pi+\varphi_0$ падающей волны поле имеет вид

$$u=u_{\text{пад}}F(\sqrt{k(s_{\text{кр}}-s_{\text{пад}})})+e^{ikr}\left[\sqrt{\frac{i}{k}}f_0+\left(\frac{i}{k}\right)^{3/2}f_1+O(k^{-5/2})\right], \tag{24}$$

где f_0 и f_1 задаются формулой (22), в которой следует $s_{\text{отр}}$ заменить на $s_{\text{пад}}$, а коэффициенты B_0, B_1 лучевого разложения отраженной волны — на коэффициенты A_0, A_1 лучевого разложения (1) падающей волны.

Все приведенные выше результаты нетрудно перенести на случай граничного условия $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_s=0$. В частности, остаются справедливыми формулы (2), (22) и (24) для равномерной асимптотики и формула (13) для неравномерной асимптотики поля. Отличие заключается лишь в том, что в формуле (11) и в выражении для коэффициента дифракции $D(\varphi,\varphi_0)$ следует вместо $H_+(\varphi,\varphi_0)$ брать $H_-(\varphi_1,\varphi_0)$, а вместо $H_-(\varphi,\varphi_0)-H_+(\varphi,\varphi_0)$, а в выражении (15) для обусловленной искривлением граней поправки $G(\varphi,\varphi_0)$ к краевой волне оператор $\partial^2/\partial\varphi\partial\varphi_0$ следует заменить на $-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi_0^2}\right)$ (см. [3, 4]), т. е. положить:

$$G(\varphi,\varphi_0)=-\frac{U}{2\sqrt{2\pi}}\left(1+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi_0^2}\right)[\rho_1R(\pi,\varphi,\varphi_0)+ \tag{15a}$$
$$+\rho_2R(\pi,\Phi-\varphi,\Phi-\varphi_0)].$$

Найдем амплитуды волн соскальзывания и волн шепчущей галереи, возбужденных краевой волной кромки O. Будем для определенности рассматривать поле вблизи грани $\psi=0$. Введем, следуя работе (9), координаты l, d, где d — длина перпендикуляра, опущенного из точки наблюдения на грань $\psi=0$, а l — расстояние вдоль этой грани от кромки O до основания этого перпендикуляра. Положим $n=kd$, $\delta=kl$; будем считать $n\ll\delta$. Поскольку грань $\psi=0$ находится вдали от границ тени для падающей и отраженных волн (так как $\varphi_0\neq0$, π), для краевой волны применима (при $\delta\gg1$) неравномерная асимптотика. А так как при $\psi=0$ в силу граничного условия $u_{\text{кр}}=0$, а для вычисления $\frac{\partial u_{\text{кр}}}{\partial\psi}$ можно воспользоваться формулами (13), (14), мы имеем $\left(\psi=\frac{n}{\delta}+O\left(\frac{n^2}{\delta^2}\right)\right)$:

$$u_{\text{кр}}=\psi\frac{\partial u_{\text{кр}}(\delta,0)}{\partial\psi}\left[1+O(\psi)+O\left(\frac{1}{kp}\right)\right]\approx \tag{25}$$

$$\approx C_1 \frac{\psi}{\sqrt{\delta}} e^{\frac{i\delta}{\cos\psi}} \left[1+O(\psi)+O\left(\frac{1}{kp}\right)\right],$$

где

$$C_1 = U\sqrt{i}\frac{\partial}{\partial\psi} D(\psi, \varphi_0)\,|_{\psi=0}.$$

С другой стороны, волна шепчущей галереи (мы предположим, что грань $\psi=0$ вогнута), возбуждаемая расположенным на стенке источником, имеет при $n \ll \delta$ следующий вид (см. [17], формула (5.10)):

$$(26) \qquad u = \frac{C_2 k^{1/3} e^{i\delta} \sqrt{\rho}(0) \sqrt[6]{\rho\left(\frac{\delta}{k}\right)}}{2\pi\sqrt[3]{2}} \int\limits_{\infty \exp\left[-\frac{2\pi i}{3}\right]}^{\infty \exp\frac{\pi i}{3}} \left[\frac{v(t-\nu)}{v(t)} - \frac{w_2(t-\nu)}{w_2(t)}\right] e^{i\nu t}\, dt,$$

где $C_2=1$; $w_1(\zeta)$, $w_2(\zeta)$, $v(\zeta)=\frac{1}{2i}(w_1(\zeta)-w_2(\zeta))$ — функции Эйри — Фока (см., например, [17], дополнение 1); $\rho(l)$ — кривизна стенки в точке l;

$$\nu = \sqrt[3]{2}\, k^{-1/3} n \rho^{1/3}\left(\frac{\delta}{k}\right); \qquad \gamma = 2^{-1/3} k^{-2/3} \int\limits_0^{\delta} \rho^{2/3}\left(\frac{\delta}{k}\right) d\delta =$$

$$= 2^{-1/3} k^{-3/2} \rho^{2/3}(O)\,\delta\left(1+O\left(\frac{\delta}{k}\right)\right).$$

Как показано в работе [9], при приведенной длине $\gamma \ll 1$ (т. е. при $\delta \ll k^{2/3}$) интеграл (26) можно написать в форме

$$(27) \qquad u = C_2 \frac{k}{2\pi\delta} \int\limits_{\infty \exp[-i(\pi+\varepsilon)]}^{\infty} \exp[i\zeta + \mu\sqrt{\zeta}]\,(1+O(\gamma))\, d\zeta,$$

где $\mu = n\sqrt{2/\delta}$, $0<\varepsilon<\pi/2$ и контур интегрирования проходит ниже точки $\zeta=0$. Легко показать, однако, что

$$\int\limits_{\infty \exp[-i(\pi+\varepsilon)]}^{\infty} \exp[i\zeta + \mu\sqrt{\zeta}]\, d\zeta = -\sqrt{\pi}\,\mu \exp\left[\frac{3\pi i}{4} + \frac{i\mu^2}{4}\right].$$

Поэтому из формулы (27) следует

$$u \approx C_2 \frac{nk}{\sqrt{2\pi}\,\delta^{3/2}} e^{\frac{-\pi i}{4}} e^{i\left(\delta + \frac{n^2}{2\delta}\right)} \approx C_2 e^{\frac{-\pi i}{4}} \frac{k\psi e^{i\sigma}}{\sqrt{2\pi\sigma}},$$

где $\sigma = \sqrt{n^2+\delta^2}$ и $\psi \sim \frac{n}{\delta}$ — введенные в п. 2 локальные координаты.

Таким образом, при $\psi \ll 1$ и $\gamma \ll 1$, т. е. $\sigma \ll k^{2/3}$, поле волны шепчущей галереи совпадает с полем от источника, расположенного на границе полуплоскости. Если положить теперь

$$(28) \qquad C_2 = \frac{\sqrt{2\pi}\, iU}{k} \frac{\partial}{\partial\psi} D(\psi, \varphi_0)\,|_{\psi=0},$$

т. е. взять в качестве C_2 отношение вблизи стенки диаграмм поля краевой волны (25) и поля (26) от расположенного на гладкой поверхности источника, то в главном члене асимптотики поле краевой волны (25) будет совпадать с волной шепчущей галереи (26) при $\sigma \sim k^{2/3}$, а потому и при всех $\sigma \gg k^{2/3}$.

Если грань $\psi=0$ выпукла, то вдоль нее распространяется волна соскальзывания, поле которой представляется в виде интеграла, отличающегося от интеграла (26) внеэкспоненциальным множителем под знаком интегрирования: вместо $\left[\frac{v(t-\nu)}{v(t)}-\frac{w_2(t-\nu)}{w_2(t)}\right]$ надо брать $\frac{w_1(t-\nu)}{w_1(t)}$.

Однако асимптотика получающегося интеграла при $\gamma\ll 1$, как показано в работе [9], по-прежнему имеет вид (27), откуда следует, что коэффициент возбуждения волны соскальзывания на выпуклой грани $\psi=0$ имеет вид (28).

Поясним физический смысл полученного результата. Область $k^{1/3}<\sigma<k^{2/3}$, т. е. $k^{-1/3}<r<k^{-1/3}$, является, как видно из рассуждений [9], ближней зоной для волн соскальзывания и шепчущей галереи; в этой области на поле еще не сказывается (в главном члене асимптотики) искривление границы, и поле от расположенного на границе источника совпадает с полем от источника, расположенного на границе полуплоскости.

В то же время эта область является дальней зоной для поля краевой волны (поскольку в ней $\sigma\gg 1$), и поэтому поле краевой волны совпадает в ней (в главном члене асимптотики и с точностью до постоянного множителя) с полем от источника, расположенного на границе полуплоскости. Иными словами, при $k^{1/3}<\sigma<k^{2/3}$ эти два поля неотличимы (в указанном приближении), откуда и следует, что краевая волна возбуждает те же волны соскальзывания и волны шепчущей галереи, что и источник на гладкой искривленной поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Keller J. B.* Diffraction by an aperture. J. Appl. Phys., 1957, *28*, p. 426–444.
2. *Keller J. B.* A geometrical theory of diffraction. Calculus of variations and its applications. Symposium of Appl. Math. New York, McCraw-Hill, 1958, *8*, p. 27–52.
3. *Боровиков В. А.* Краевые волны в задаче дифракции на криволинейной поверхности с ребром. Препринт № 63 Ин-та прикл. матем. АН СССР, М., 1973.
4. *Боровиков В. А.* Краевая волна в задаче дифракции на поверхности с ребром. В сб.: Теория дифракции и распространения волн (краткие тексты докл. VI Всесоюзн. симп. по дифракции и распространению волн), Москва – Ереван, 1973, 213–222.
5. *Ahluwalia D. S., Lewis R. M., Boersma J.* Uniform asymptotic theory of diffraction by a plane screen. SIAM J. Appl. Math., 1968, *16*, 4, p. 783–807.
6. *Ahluwalia D. S.* Uniform asymptotic theory of diffraction by an edge of a three-dimensional body. SIAM J. Appl. Math., 1970, *18*, 2, p. 287–301.
7. *Keller J. B., Lewis R. M., Secler B. D.* Solutions of some diffraction problems. Comm. Pure Appl. Math., 1956, *9*, p. 207–265.
8. *Филиппов В. Б.* Дифракция на искривленной полуплоскости. Зап. научн. семинаров ЛОМИ. Л., «Наука», 1974, т. 42, 244–249.
9. *Филиппов В. Б.* Коротковолновая асимптотика тока в задачах дифракции на неплоских экранах. Зап. научн. семинаров ЛОМИ, Л., «Наука», 1975, т. 51, 172–182.
10. *Buchal R. N., Keller J. B.* Boundary layer problems in diffraction theory. Comm. Pure Appl. Math., 1960, *13*, 1, p. 85–114.
11. *Боровиков В. А.* Поле в окрестности кромки в задаче дифракции на клине с искривленными гранями. В сб.: Теория дифракции и распространения волн (краткие тексты докл. VII Всесоюзн. симп. по дифракции и распространению волн), т. 1. М., 1977, 51–53.
12. *Малюжинец Г. Д.* Излучение звука колеблющимися гранями произвольного клина. I. Акуст. ж., 1955, *1*, 2, 144–164.
13. *Боровиков В. А.* Дифракция на многоугольниках и многогранниках. М., «Наука», 1966.
14. *Боровиков В. А., Кинбер Б. Е.* Четыре лекции по геометрической теории дифракции. Изд-во ЛГУ, 1972.
15. *Филиппов А. Ф.* О приближенном вычислении отраженных и преломленных волн. УФН АН СССР. Серия геофиз. 1957, *7*, 841–854.
16. *Федорюк М. В.* Метод перевала. М., «Наука», 1977.
17. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М., «Наука», 1972.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша
Академии наук СССР

Поступила
4 декабря 1978 г.