АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXV 1979 Вып. 6

УДК 534.26

ОДНА НЕКОРРЕКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ

М. И. Карновский, В. Г. Лозовик, И. Л. Обозненко

Определяется поле во внешности излучающего тела по известным (например, экспериментально измеренным) значениям давления и его нормальной производной на некотором куске воображаемой поверхности, лежащей вне излучателя. Рассматриваемая задача не корректна в классическом смысле. Указаны пути регуляризации задачи. Получено ее квазирешение.

Рассмотрим проблему восстановления поля по давлению и его нормальной производной на куске воображаемой гладкой поверхности, лежащей вне излучателя. Эта проблема существенна как для теории дифракции волн, так и для прикладной акустики. Пусть D_i — излучающее тело в трехмерном пространстве, D — внешняя неограниченная среда, ∂D — общая граница тела и внешней среды, $x(x^1, x^2, x^3)$, $y(y^1, y^2, y^3)$ — точки пространства. Тело создает в точке x внешней среды давление с комплексной амплитудой $u(x)$; в дальнейшем $u(x)$ называется просто давлением. Оно удовлетворяет уравнению Гельмгольца в D:

$$\Delta u+k^2u=0, \quad 0<k=\omega/c=\text{const}, \quad u=u(x), \quad x\in D, \tag{1}$$

где c — скорость распространения звука в среде, и зоммерфельдовым условиям излучения на бесконечности:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}-ik\right)u=o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r=|x|\to\infty. \tag{2}$$

Если на границе тела известны давление или его нормальная производная, или их линейная комбинация с нигде не аннулирующимися коэффициентами, то для определения $u(x)$ мы получаем классическую краевую задачу с граничными условиями первого, второго или третьего рода. Известны достаточные условия ее однозначной разрешимости и практические методы ее решения.

Предположим, что точным заданием границы тела мы не располагаем, однако ориентировочное положение границы нам известно — мы знаем, что она лежит между двумя цилиндрами или сферами, или эллипсоидами, или какими-нибудь другими легко описываемыми поверхностями. Ни давление, ни его нормальная производная, ни связь между ними на границе тела нам также не известны.

В этом случае выберем во внешней среде какую-нибудь воображаемую достаточно гладкую конечную поверхность с краем, обозначим ее через Г и измерим на ней давление $u(x)$.

Пусть $\mathbf{n}_x$ означает единичный вектор, нормальный к Г в точке x. Одно из двух его возможных направлений выбирается произвольно. В прочих точках Г оно выбирается из соображений непрерывной продолжаемости. Дифференцирование по направлению этого вектора обозначим через $\partial/\partial n$ и будем считать, что значения $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma}$ нам также известны.

Итак, мы располагаем значениями

$$(3)\qquad u(x)|_\Gamma=f_0(x),\quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma=f_1(x);\quad f(x):=\{f_0(x),f_1(x)\}|_\Gamma.$$

Отметим, что начальные условия (3) задаются там, где кроме них должно выполняться уравнение (1). Прибавим к условиям (1)—(3) естественное требование непрерывности $u(x)$ в $\bar{D}:=D+\partial D$ и требование двукратной непрерывной дифференцируемости $u(x)$ в D. Кратко это условие записывается так:

$$(4)\qquad u\in C(\bar{D})\cap C^2(D).$$

Если измерения $f_0(x)$ и $f_1(x)$ выполнены идеально точно, то из классических теорем единственности решения задачи Коши для эллиптического уравнения вытекает, что задача (1)—(4) однозначно разрешима, однако конструктивных методов решения задачи эти теоремы не содержат.

Пусть теперь $f_0(x)$ и $f_1(x)$ известны лишь приближенно или заданы произвольно, но так, что они интегрируемы с квадратом модуля на Г, т. е.

$$\int_\Gamma |f_0|^2\,d\sigma_\Gamma<+\infty;\qquad \int_\Gamma |f_1|^2\,d\sigma_\Gamma<+\infty.$$

Мы скажем, что в этом случае

$$f\in H:=L_2(\Gamma)\times L_2(\Gamma).$$

Определим скалярное произведение и норму в H. Если $f(x)=\{f_0(x),\ f_1(x)\}$ и $g(x)=\{g_0(x),\ g_1(x)\}$ — две пары функций с элементами f_0, f_1, g_0, g_1 соответственно квадратично суммируемыми на Г, то скалярное произведение (f, g) зададим так:

$$(5)\qquad (f,g):=\int_\Gamma [k^2f_0(x)\overline{g_0(x)}+f_1(x)\overline{g_1(x)}]\,d\sigma_\Gamma,$$

или кратко

$$(6)\qquad (f,\ g):=(f_0,\ g_0)_{L_2(\Gamma)}+(f_1,\ g_1)_{L_2(\Gamma)},$$

где черта над символом функции означает комплексное сопряжение.

Норму в H зададим следующим образом:

$$\|f\|:=\left\{\int_\Gamma [k^2|f_0(x)|^2+|f_1(x)|^2]\,d\sigma_\Gamma\right\}^{1/2},$$

или кратко

$$\|f\|:=\{\|f_0\|^2_{L_2(\Gamma)}+\|f_1\|^2_{L_2(\Gamma)}\}^{1/2}.$$

Произвольно заданную пару функций $f(x)\in H$ мы назовем допустимой или недопустимой в зависимости от того, разрешима задача (1), (2), (4) при начальных условиях (3) с данной парой $f(x)$ или нет.

Если $f(x)$ — допустимая пара, то даже ее малое возмущение может привести к недопустимой паре $\tilde{f}(x)$. Таким образом, рассматриваемая задача неустойчива, значит, и некорректна в классическом смысле. Это препятствует применению обычных средств численного анализа для ее приближенного решения.

Укажем пути регуляризации задачи. Пусть $u_m(x)$, $m=1, 2, \ldots$ — последовательность решений задачи (1), (2), (4). Начальные условия (3) при

этом во внимание не принимаются. Последовательность $u_m(x)$ можно выбрать так, чтобы она была полна в пространстве L_2 на всякой конечной достаточно гладкой поверхности, без края лежащей вне некоторого шара. Этот шар вместе с его границей можно считать лежащим внутри излучающего тела. При сделанных выше предположениях о границе тела D_i это всегда возможно, хотя (повторим) точного описания границы тела у нас нет. Функции $u_m(x)$ мы назовем координатными. Они порождают последовательность допустимых пар

$$(7) \qquad p_m(x) := \left\{ u_m(x), \frac{\partial}{\partial n} u_m(x) \right\} \Big|_{\Gamma}.$$

Известным методом ортогонализуем и нормируем пары (7) на Г в метрике (5), (6) пространства H.

Тем самым будет построена такая последовательность решений задачи (1), (2), (4)

$$(8) \qquad v_m(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j u_j(x),$$

что порождаемая ею система допустимых пар

$$(9) \qquad q_m(x) := \left\{ v_m(x), \frac{\partial}{\partial n} v_m(x) \right\} \Big|_{\Gamma}$$

будет ортонормирована на Г в метрике (5), (6) пространства H.

Независимо от того, допустима заданная пара $f(x) \in H$ или нет, ее проекция на линейную оболочку первых N элементов системы (9)

$$(10) \qquad f^N(x) := \sum_{m=1}^{N} b_m q_m(x), \qquad b_m = (f, q_m)$$

будет допустимой парой. Назовем $f^N(x)$ регуляризованным значением заданной пары $f(x)$. Погрешность замены $f(x)$ на $f^N(x)$ мы определим в метрике (6) пространства H:

$$(11) \qquad \delta_N := \|f - f^N\|.$$

Располагая коэффициентами Фурье $b_m = (f, q_m)$, $m = 1, 2, \ldots, N$, построим функцию

$$(12) \qquad v^N(x) := \sum_{m=1}^{N} b_m v_m(x)$$

и назовем ее квазирешением задачи (1)—(4) (см. работу [1]).

Из приведенного рассмотрения следует, что квазирешение (12) точно удовлетворяет условиям (1), (2), (4) и приближенно, с погрешностью (11),— условию (3). Малое возмущение пары $f(x)$ вызовет малое возмущение квазирешения (12), и неустойчивость первоначальной задачи ликвидируется.

Ошибка, определяемая формулой (11), характеризует не только погрешность на Г, но может быть принята в качестве общей оценки погрешности предлагаемого метода. В самом деле, если пара $f(x)$ допустима, а измерения идеально точны, то на Г выполняется условие: $\delta_N \to 0$ при $N \to \infty$.

Если число N достаточно велико, то первый элемент аппроксимирующей пары $f^N(x)$, т. е. $v^N(x)$ отличается сколь угодно мало от $f_0(x)$ не только на Г (в смысле нашей метрики), но и от неизвестного нам значения $u(y)$ давления на границе ∂D излучателя. Напомним, что точная граница излучателя также не предполагается известной.

Пусть $G(x, y)$ — функция Грина задачи Дирихле для нашего случая эта функция не предполагается известной. В силу неравенства Коши — Буняковского для всех точек x любой конечной области D_0, $\bar{D}_0 \subset D$ справедлива оценка

$$|u(x)-v^N(x)|^2=\left|\int\limits_{\partial D}[u(y)-v^N(y)]\frac{\partial}{\partial n_y}G(x,y)\,dS_y\right|^2\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\partial D}\left|\frac{\partial n}{\partial n_y}G(x,y)\right|^2 dS_y\int\limits_{\partial D}|u(y)-v^N(y)|^2\,dS_y\leqslant$$

$$\leqslant A\int\limits_{\partial D}|u(y)-v^N(y)|^2\,dS_y\xrightarrow[N\to\infty]{}0;$$

здесь $A=A(D_0)$ — константа, зависящая лишь от D_0.

Однако в реальных условиях восстановление поля по измерениям на поверхности Г затрудняется тем, что вблизи источника существенны неоднородные волны, быстро затухающие при удалении от него. Если они окажутся столь слабыми, что практически не смогут быть измерены на Г, то, разумеется, данные измерения не позволят восстановить поле вблизи источника. Это связано с объективной потерей информации, а не с недостатком метода.

Однако измерения, обработанные предлагаемым методом, позволят восстановить поле в зоне, расположенной от источника дальше, чем воображаемая поверхность Г.

Из приведенных рассуждений ясно, что следует располагать Г возможно ближе к границе излучателя. Кроме того, очевидно, что уточнение расположения источника (ориентировочное положение источника было известно ранее) при помощи данной методики невозможно.

Укажем теперь пригодные для практического использования системы координатных функций.

1. Система метагармонических функций [2]:

$$u_{mn}(x):=h_n^{(1)}(kr)\,Y_n^m(\vartheta,\varphi),\qquad n=0,1,2,\ldots;\ m=0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm n; \tag{13}$$

здесь (r, ϑ, φ), $0<r$, $0\leqslant\vartheta\leqslant\pi$, $0\leqslant\varphi<2\pi$ — сферические координаты точек пространства при условии, что начало координат лежит внутри излучающего тела, $h_n^{(1)}(z)$ — сферические ганкелевы функции первого рода, $Y_n^m(\vartheta, \varphi)$ — фундаментальные сферические функции. Если Г — кусок какой-нибудь из координатных поверхностей сферической системы координат, например кусок сферы с центром в начале координат, ограниченный двумя меридианами и двумя параллелями, то все вычисления существенно упрощаются.

2. Система простых источников. Вложим (мысленно) внутрь излучающего тела шар $Q:=\{y,\ |y-y_0|<a\}$ радиус a с центром в точке y_0 так, чтобы его граница также лежала внутри излучающего тела. Радиус шара должен быть таким, чтобы число k^2 не было точкой спектра оператора $-\Delta$ в пространстве функций $u\in C^2(Q)\cap C(\bar{Q})$, аннулирующихся на границе этого шара. В остальном он произволен. На поверхности шара выбирается счетная всюду плотная последовательность точек y_m, $m=1, 2, \ldots$

Тогда система функций

$$u_m(x)=\frac{e^{ik|x-y_m|}}{|x-y_m|},\qquad m=1,2,\ldots,\qquad x\in\bar{D}, \tag{14}$$

обладает всеми нужными свойствами.

Для уравнения Лапласа система с подобными свойствами была построена В. Д. Купрадзе и М. А. Алексидзе [3, гл. X]. Линейная независимость и полнота системы (14) в L_2 на всякой поверхности, обладающей перечисленными выше свойствами, доказывается с помощью метода, содержащегося в работе [4].

Отметим, что изменение параметра k может повлечь за собой изменение радиуса шара. Ниже строится система координатных функций, не чувствительная к изменению этого параметра.

3. Система простых источников и диполей. Вложим (мысленно) внутрь излучателя конечный простой кусок достаточно гладкой поверхности с краем. Обозначим его через S. Расположим на нем произвольную всюду плотную последовательность точек y_m, $m=1, 2, \ldots$. Тогда система функций

$$(15) \qquad u_m(x)=\frac{e^{ik|x-y_m|}}{|x-y_m|}, \qquad u_{-m}(x)=\frac{\partial}{\partial n_{y_m}|_S}u_m(x),$$

$$m=1, 2, \ldots, x\in\overline{D},$$

обладает всеми нужными свойствами.

Как и предыдущая система, эта система линейно независима и полна в L_2 на всякой конечной достаточно гладкой поверхности без края, лежащей вне некоторого шара. Для системы (14) требуется, чтобы этот шар содержал внутри себя шар Q с его границей, а для системы (15) — чтобы он содержал внутри себя поверхность S.

Все, что касается системы (15), доказывается с помощью некоторой модификации метода, содержащегося в работах [4] и [3, гл. X], с использованием единственности решения задачи Коши для эллиптического уравнения.

Заключение

Развит приближенный метод определения акустического поля во внешности ограниченного излучателя по результатам измерения давления f_0 и его нормальной производной f_1 на некоторой конечной воображаемой поверхности с краем. Если измерения f_0 и f_1 выполнены идеально точно, то $f(x)$ (3) является допустимой парой и задача (1)÷(4) однозначно разрешима. Однако даже малые возмущения f (обусловленные погрешностью измерения f_0 и f_1) могут привести к недопустимой паре $\tilde{f}(x)$, при которой задача (1)÷(4) не разрешима.

Таким образом, рассматриваемая задача некорректна в классическом смысле, что делает невозможным применение обычных средств численного анализа для ее приближенного решения. Выход из создавшегося положения указан в данной работе. Он основан на регуляризации данной некорректной задачи.

Развитый метод пригоден для восстановления дальнего поля по результатам измерения $f(x)$ в ближнем поле. При этом ошибки в оценке вклада в $f(x)$ волн, быстро затухающих с расстоянием, не приводят к существенным ошибкам в оценке дальнего поля. Однако в области пространства, расположенной между Г и излучателем, в особенности вблизи источника, ошибки в восстановлении поля могут оказаться недопустимо большими.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М., «Наука», 1974.
2. *Векуа И. Н.* О полноте метагармонических функций. Докл. АН СССР, 1953, *40*, 5, 715–718.
3. *Купрадзе В. Д.* Методы потенциала в теории упругости. М., Физматгиз, 1963.
4. *Карновский М. И., Лозовик В. Г.* Акустическое поле пространственного излучателя произвольной формы при смешанных краевых условиях. Акуст. ж., 1968, *14*, 3, 403–408.

Киевский политехнический институт

Поступила
13 сентября 1976 г.
Окончательный вариант
6 июня 1979 г