АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXV 1979 Вып. 6

УДК 534.83

ДИСКРЕТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СФЕРИЧЕСКИХ И ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ГЮЙГЕНСА

С. И. Коняев, В. И. Лебедев, М. В. Федорюк

Проведены численные расчеты гашения внешних звуковых полей с помощью системы вторичных монопольных и дипольных излучателей, расположенных на сфере или на эллипсоиде.

В работах [1—3] развита теория активного гашения звука с помощью приемной и излучающей замкнутых поверхностей, которые непрерывно заполнены точечными монопольными и дипольными приемниками и излучателями. Реальные задачи требуют исследования систем гашения, состоящих из конечного числа приемников и излучателей. В работах [4, 5] получен ряд численных результатов, относящихся к плоским задачам. Ниже рассматриваются следующие пространственные задачи активного гашения звука.

Гашение поля точечного источника. Внутри замкнутой поверхности S расположен точечный монопольный излучатель, создающий поле $p_0(x)=-e^{ik|x-a|}/(4\pi|x-a|)$, где $x=(x_1, x_2, x_3)$. Требуется с помощью расположенных на S излучателей создать компенсирующее поле

$$\tilde{p}(x)=\begin{cases}-p_0(x), & x \text{ вне } S,\\ 0, & x \text{ внутри } S.\end{cases} \tag{1}$$

Тогда суммарное поле

$$p^*=p_0(x)+\tilde{p}(x)=\begin{cases}0, & x \text{ вне } S,\\ p_0(x), & x \text{ внутри } S.\end{cases} \tag{2}$$

Тем самым вне S поле $p_0(x)$ будет погашено, а внутри S поле останется неизменным, т. е. излучение будет односторонним. Решение этой задачи дается формулой Грина:

$$\tilde{p}(x)=\int\limits_S [G(x,x')\,\partial/\partial n_{x'}p_0(x')-p_0(x')\,\partial/\partial n_{x'}G(x,x')]\,dS', \tag{3}$$

где $G(x,x')=-\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{e^{ik|x-x'|}}{|x-x'|}$ $n_{x'}$ — внешняя нормаль к поверхности S в точке x'. Таким образом, компенсирующее поле образовано непрерывно расположенными на S точечными монопольными и дипольными излучателями с плотностями $\dfrac{\partial}{\partial n_{x'}}p_0(x')$ и $p_0(x')$ соответственно. Оси диполей направлены по нормали к S. Излучатели предполагаются акустически прозрачными, гашение производится на фиксированной частоте. Скорость звука в среде постоянна.

Гашение поля плоской волны. В свободном пространстве распространяется плоская волна $p_0(x)=e^{ikx_3}$. Требуется с помощью расположенных на S

излучателей создать компенсирующее поле

$$(1') \qquad \tilde{p}(x)=\begin{cases} 0, & x \text{ вне } S, \\ -p_0(x), & x \text{ внутри } S. \end{cases}$$

Тогда суммарное поле будет равно нулю внутри S и останется неизменным вне S, т. е. плоская волна не проникнет внутрь S и излучение будет односторонним. Решение этой задачи также дается формулой (3). Поверхность S с указанным выше расположением излучателей названа в работах [1, 2] поверхностью Гюйгенса.

Естественно возникает задача об аппроксимации поверхности Гюйгенса с помощью дискретной системы излучателей. Требуется расположить на поверхности S конечное число N пар излучателей в точках x^k, $1 \leqslant k \leqslant N$ (в каждой точке x^k располагается пара монополь — диполь с комплексными амплитудами m_k, d_k) так, чтобы наилучшим образом аппроксимировать компенсирующее поле.

Обозначим $\tilde{p}_д(x)$ компенсирующее поле, созданное дискретной системой излучателей, и введем ошибки дискретной аппроксимации

$$\Delta_д^+(x)=20\lg\left|\frac{\tilde{p}(x)-\tilde{p}_д(x)}{\tilde{p}(x)}\right|, \quad x \text{ вне } S,$$

$$\Delta_д^-(x)=20\lg|\tilde{p}_д(x)|, \; x \text{ внутри } S,$$

для задачи 1. В задаче 2 надо взять $\Delta_д^+(x)$ внутри S и $\Delta_д^-(x)$ вне S. В формуле для $\Delta_д^-(x)$ величина $\tilde{p}_д(x)$ безразмерна. Ошибки $\Delta_д^+(x)$ имеют разный физический смысл: $\Delta_д^+(x)$ — характеризует уровень гашения звука, $\Delta_д^-(x)$ есть характеристика однонаправленности излучения. Введем также интегральные характеристики в том случае, когда поверхность S — сфера:

$$V_д^{\pm}(x)=\left(\int\limits_{S_\rho}|\Delta_д^{\pm}(x)|^2\,dS\right)^{1/2},$$

где S_ρ — сфера радиуса ρ с центром в начале координат.

Для решения задачи о расположении излучателей на поверхности S был выбран следующий путь. Интеграл от функции $f(x)$ по поверхности S аппроксимируется с помощью квадратурной формулы

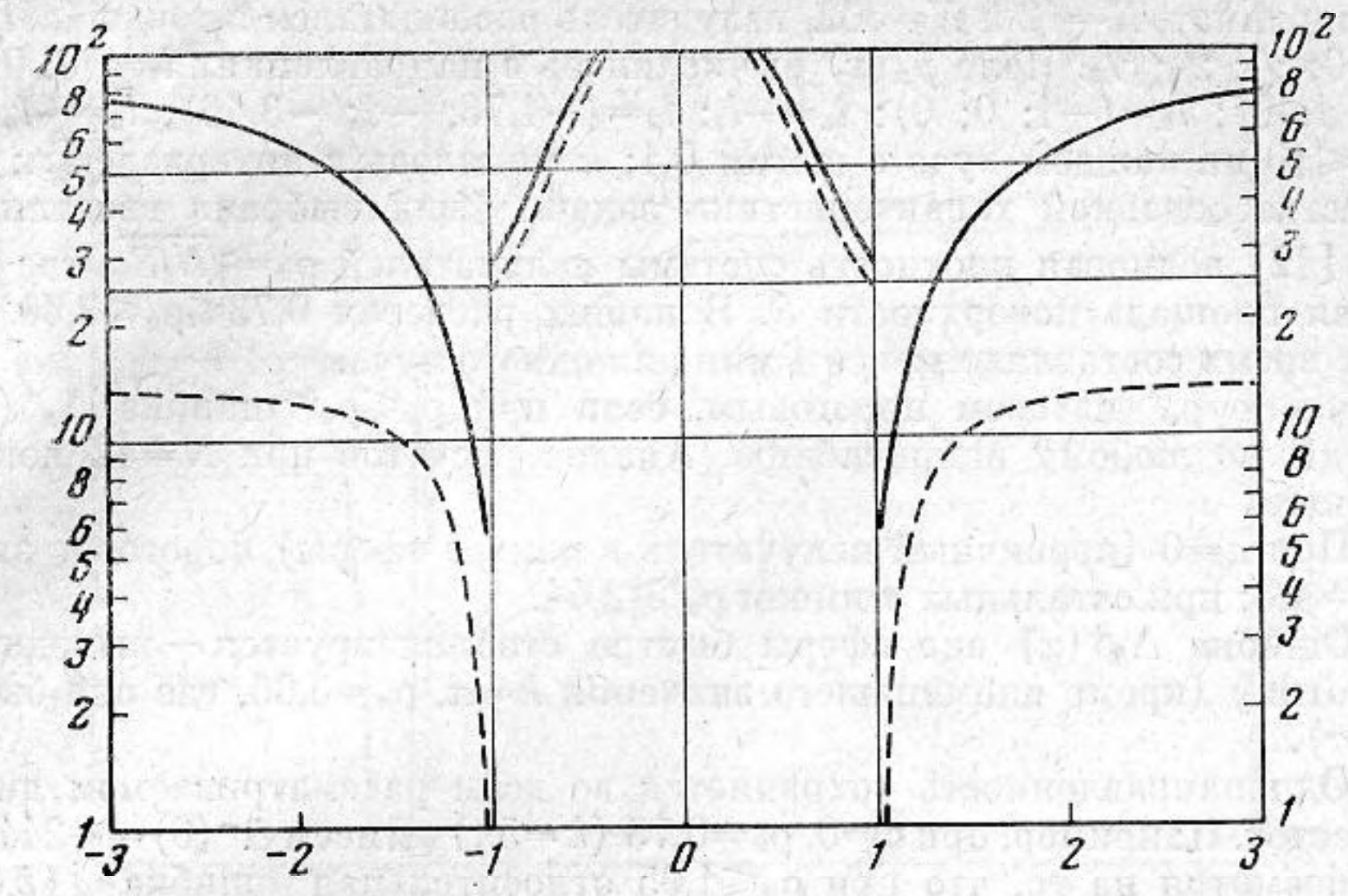
$$\int\limits_S f(x)\,dS \approx \sum_{j=1}^{N} p_j f(x^j),$$

в которой точки x^j — узлы квадратурной формулы — это точки, в которых располагаются излучатели, числа p_j — веса квадратурной формулы — имеют смысл коэффициентов усиления (точнее, коэффициентами усиления являются числа $q_j=p_j/p_{j_0}$, где j_0 фиксировано).

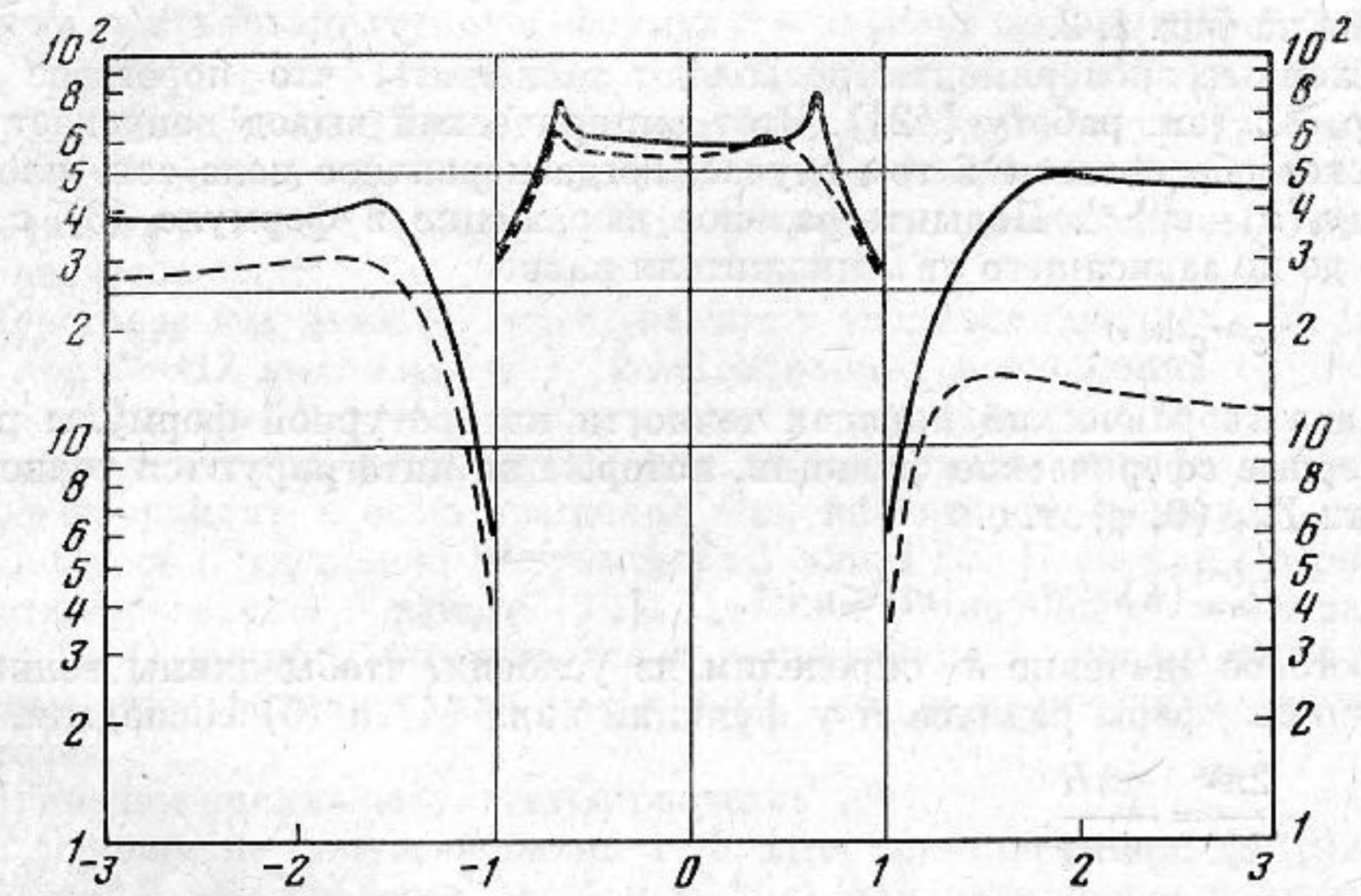
Можно поставить задачу о нахождении оптимальных квадратурных формул для исследуемого класса задач, т. е. задачу о наилучшем расположении N пар излучателей на S (например, о таком расположении, которое минимизирует в некоторой норме ошибки $\Delta_д^{\pm}(x)$ вне некоторой окрестности поверхности S). Но решение этой задачи весьма сложно.

За основу были взяты квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности (так называемые квадратуры Гаусса), точнее, такие квадратурные формулы для поверхности S, которые при равновеликом отображении (т. е. сохраняющем постоянным якобиан отображения) поверхности S на поверхность единичной сферы переходят в квадратуры Гаусса для единичной сферы.

Для сферы известны следующие квадратуры Гаусса [6–9]: $N=12$ ($n=5$); $N=20$ ($n=5$); $N=32$ ($n=9$); $N=42$ ($n=9$); $N=86$ ($n=15$); $N=302$ ($n=29$); $N=434$ ($n=35$).



Фиг. 1. Графики $y=\Delta_д^+(x)$ при $|x|<1$, $y=\Delta_д^-(x)$ при $|x|>1$. При $x<0$ ошибки вычислены в направлении l_5, при $x>0$ – в направлении l_6. Сплошная кривая для $a=0$, $k=\pi$, $\rho_w=3{,}656$, штриховая кривая для $a=0$, $k=2{,}5\,\pi$, $\rho_w=1{,}462$



Фиг. 2. Графики тех же величин, что и на фиг. 1. Сплошная кривая для $a={}^2/_3$, $k=\pi$, $\rho_w=3{,}656$, штриховая кривая для $a={}^2/_3$, $k=2\pi$, $\rho_w=1{,}828$

Здесь N – число узлов, n – алгебраический порядок точности формулы (т. е. все сферические функции $Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$ при $l\leqslant n$ интегрируются точно). При $N=12$ узлы располагаются в вершинах икосаэдра, при $N=32$ – в вершинах икосаэдра и проекциях (из центра сферы) центров граней на сферу, при $N=42$ – в вершинах икосаэдра и проекциях середин ребер на сферу. Отметим, что в эксперименте по активному гашению звука в воздухе [10, 11] были использованы $N_1=20$ первичных и $N_2=12$ вторичных излучателей, которые располагались соответственно в вершинах додекаэдра и в вершинах икосаэдра; был поставлен также эксперимент при $N_1=12$, $N_2=20$.

Расчеты были проведены нами на ЭВМ БЭСМ-6. Характеристики расчетов задачи 1: S – поверхность сферы радиуса $R=1$, центр сферы – в на-

чале координат, $N=42$ и $N=302$, излучатель располагался в точке $(a, 0, 0)$, где $a=0$; $^1/_3$; $^1/_2$; $^2/_3$. Поле $\tilde{p}_д(x)$ вычислялось в направлениях $l_1=(0; 0; 1)$; $l_2=(0; 1; 0)$; $l_3=(-1; 0; 0)$; $l_4=-l_3$; $l_5=(-1{,}73; -1; -3{,}46)$; $l_6=-l_5$ при $0\leqslant|x|\leqslant 10$ на каждом луче с шагом 0,1; k менялось в интервале $[\pi; 5\pi]$. В качестве основной характеристики задачи была выбрана введенная в работе [12] волновая плотность системы излучателей $\rho_w=\sqrt{N/S_w}$, где S_w — волновая площадь поверхности S. В наших расчетах $0{,}73\leqslant\rho_w\leqslant 3{,}66$. Машинное время составляло менее 1 мин для одного луча.

Значение ρ_w^0 назовем пороговым, если при $\rho_w\leqslant\rho_w^0$ ошибка $\Delta_д^+(x)\geqslant -15$ дБ по любому направлению. Анализ расчетов при $N=42$ показал следующее.

а) При $a=0$ (первичный излучатель в центре сферы) пороговое значение $\rho_w^0\approx 1{,}8$; при остальных a имеем $\rho_w^0\geqslant 2{,}44$.

б) Ошибка $\Delta_д^+(x)$ вне сферы быстро стабилизируется — выходит на асимптотику (кроме наименьшего значения $k=\pi$, $\rho_w=3{,}66$, где она быстро убывает).

в) Однонаправленность сохраняется во всем рассматриваемом диапазоне частот. Например, при $a=0$, $\rho_w=0{,}73$ $(k=5\pi)$ имеем $\Delta^-(0)=-244$ дБ. И это несмотря на то, что при $\rho_w\leqslant 1{,}05$ относительная ошибка $|(\tilde{p}(x)-\tilde{p}_д(x))/\tilde{p}(x)|$ становится больше единицы (и даже достигает семи по ряду направлений).

г) Ошибка $\Delta_д^+(x)$ по-разному ведет себя в разных направлениях, наихудшими являются направления l_6, l_4, l_2. Графики ошибок $\Delta_д^\pm(x)$ изображены на фиг. 1, 2.

Численные эксперименты позволяют заключить, что пороговое значение $\rho_w\geqslant 2$ (см. работу [12]). Этот эмпирический вывод допускает теоретическое обоснование в том случае, когда первичное поле есть плоская волна: $p_0(x)=e^{i(k, x)}$. Подынтегральное выражение в формуле (3) с точностью до не зависящего от k множителя равно

$$e^{ikr}e^{i(k, x)}. \tag{4}$$

Если алгебраический порядок точности квадратурной формулы равен n, то первые сферические функции, которые не интегрируются точно, это функции $Y_{n+1}(\vartheta, \varphi)$, т. е.

$$P_{n+1}^{(m)}(\vartheta)e^{im\varphi}, \quad |m|\leqslant n+1. \tag{5}$$

Пороговое значение k_0 определим из условия, чтобы длины волны на поверхности сферы радиуса R у функций вида (4) и (5) совпадали, т. е.

$$\frac{2\pi}{k_0}=\frac{4\pi R}{n+1}. \tag{6}$$

Иными словами, требуется, чтобы подынтегральная функция осциллировала не быстрее первой неинтегрируемой точно сферической гармоники. Из формулы (6) находим

$$k_0=\frac{n+1}{2R}, \quad \lambda_0=\frac{4\pi R}{n+1}. \tag{7}$$

При $n=29$ $(N=302)$ имеем $k_0=4{,}77\pi$, $\lambda_0\approx 0{,}42$. Вычислим пороговое значение ρ_w^0. Для квадратуры Гаусса выполняются соотношения

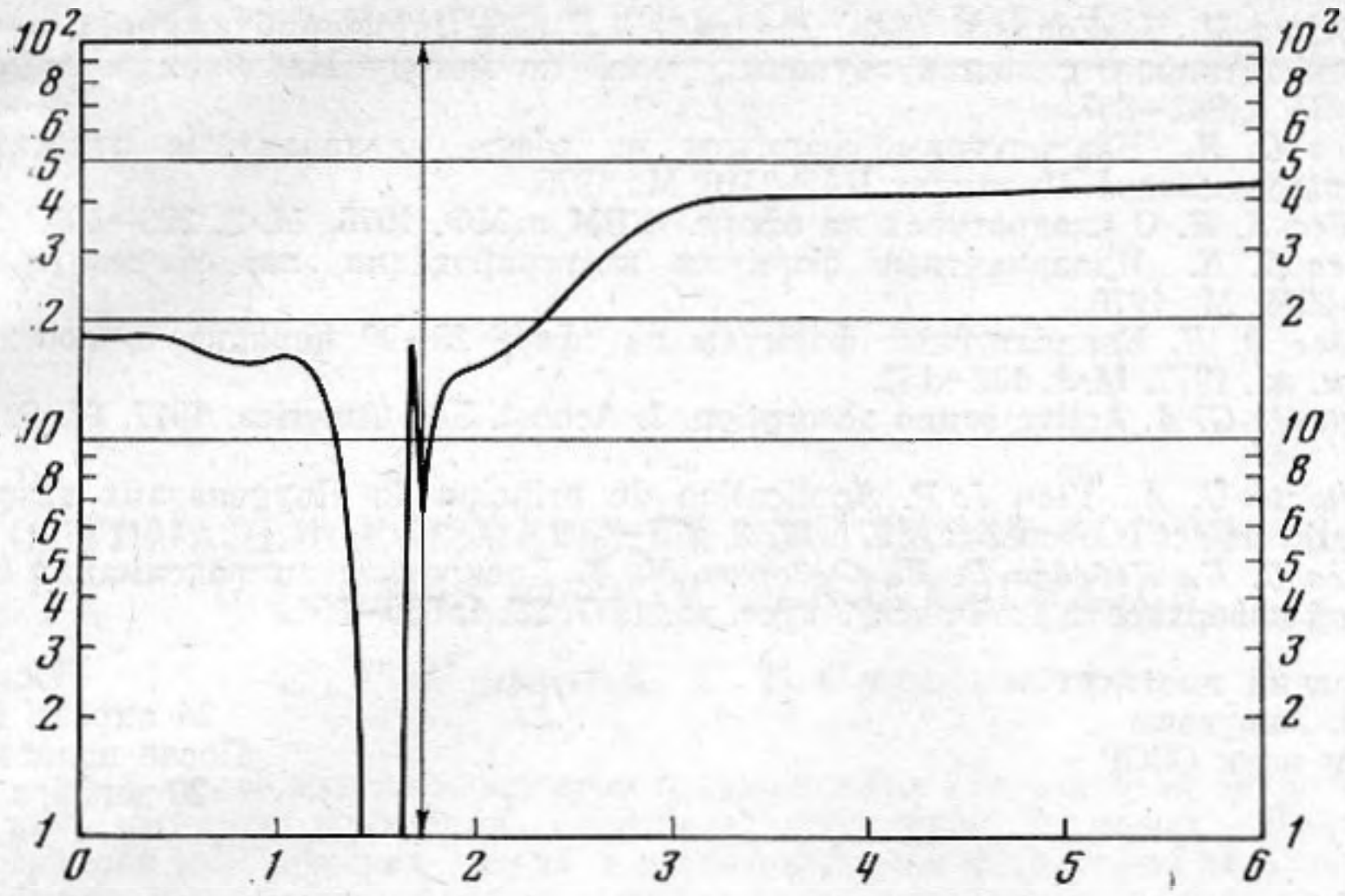
$$(n+1)^2\approx 3N, \tag{8}$$

так что

$$\rho_w^0\approx\frac{\lambda_0(n+1)}{2R\sqrt{3\pi}}. \tag{9}$$

Подставляя сюда значение λ_0 из (7), получаем

$$\rho_w^0\approx 2\sqrt{\pi/3}\approx 2{,}05. \tag{10}$$



Фиг. 3. График $y=\Delta_д^-(x)$ при $x<1{,}73$, $y=\Delta_д^+(x)$ при $x>1{,}73$. Ошибка вычислена в направлении l_6

Если взять квадратурную формулу с заранее заданными узлами (не типа Гаусса), то $(n+1)^2\approx N$, так что $\rho_w^0\approx 2\sqrt{\pi}\approx 3{,}55$, т. е. в $\sqrt{3}$ раз больше, чем для квадратуры Гаусса. Грубо говоря, для квадратур Гаусса нужно установить по две пары излучателей на длину волны. Эти рассуждения обосновывают также следующий эмпирически установленный при анализе расчетов факт.

Пороговое значение ρ_w^0 уменьшается с увеличением числа N. (Например, при $N=12$ имеем $\rho_w^0\approx 3$.) Действительно, соотношение (8) асимптотическое (при n, $N\to\infty$) и выполняется тем точнее, чем больше N.

Расчеты задачи 2 приведены для эллипсоида вращения с центром в начале координат, с осью вращения Ox_3, на которой расположена большая полуось. Отношение полуосей 1 : 3 или 1 : 5. В случае сферы такие расчеты проведены в работе [12]. Плоская волна падает в направлении $l_1=(0;\ 0;\ 1)$, ошибка вычисляется в направлении l_6, число узлов $N=42$. Расчеты производились при $0\leqslant|x|\leqslant 10$, на каждом луче бралось по 500 точек.

Приведем анализ результатов расчета:

I. Отношение полуосей равно 1 : 3. При $\rho_w=4{,}66$ имеем $\Delta^-(0)=18$ дБ, $\Delta^+(6)=43{,}7$ дБ. Графики ошибок $\Delta_д^\pm(x)$ для эллипсоида с отношением осей 1 : 3 при $k=\pi/2$, $\rho_w=4{,}66$ изображены на фиг. 3.

II. Отношение полуосей равно 1 : 5. При $\rho_w=9{,}1$ имеем $\Delta^-(0)=10{,}8$ дБ, $\Delta^+(6)=43$ дБ.

Результаты дискретной аппроксимации для эллипсоида оказываются худшими (с точки зрения характеристики ρ_w), чем для сферы: пороговое значение ρ_w^0 возрастает примерно в 2 (4) раза для отношения осей 3 (5). Видимо, это связано с резким перепадом гауссовой кривизны вытянутого эллипсоида.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малюжинец Г. Д.* Нестационарные задачи дифракции для волнового уравнения с финитной правой частью. Тр. Акуст. ин-та, 1971, вып. 14, 124–139.
2. *Jessel M.* Acoustique theoretique. Masson et Cie, Paris, 1973.
3. *Федорюк М. В.* О работах Г. Д. Малюжинца по теории волновых потенциалов. Тр. Акуст. ин-та, 1971, вып. 14, 169–179.
4. *Завадская М. П., Попов А. В., Эгельский Б. Л.* Об аппроксимации волновых потенциалов в задачах активного гашения волновых полей по методу Малюжинца. Акуст. ж., 1975, *21*, 5, 732–738.

5. *Завадская М. П., Попов А. В., Эгельский Б. Л.* Об одном приближенном решении задачи активного гашения звуковых полей по методу Малюжинца. Акуст. ж., 1975, *21*, 6, 882–887.
6. *Коняев С. И.* Квадратурные формулы на сфере, инвариантные относительно группы икосаэдра. Препринт ИАЭ-2516, М., 1975.
7. *Лебедев В. И.* О квадратурах на сфере. ЖВМ и МФ, 1976, *16*, 2, 293–306.
8. *Коняев С. И.* Инвариантные формулы интегрирования на сфере. Препринт ИАЭ-2553, М., 1975.
9. *Лебедев В. И.* Квадратурные формулы на сфере 25–29 порядка точности. Сиб. матем. ж., 1977, *18*, 1, 132–142.
10. *Mangiante G. A.* Active sound absorption. J. Acoust. Soc. America, 1977, *61*, 6, 1516–1523.
11. *Mangiante G. A., Vian J. P.* Application du principe du Huygens aux absorbeurs acoustiques actifs. Acustica, 1977, *37*, 3, 175–182.
12. *Коняев С. И., Лебедев В. И., Федорюк М. В.* Дискретная аппроксимация сферической поверхности Гюйгенса, Акуст. ж., 1977, *23*, 1, 650–651.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила
24 апреля 1978 г.
После исправления
20 декабря 1978 г.