8. *Мелик-Шахназаров В. А., Наскидашвили И. А.* Установка для автоматической записи внутреннего трения металлов. ПТЭ, 1967, 1, 181–184.
9. *Золотухин И. В., Нетусов Ю. К., Постников В. С.* Методика определения модулей упругости в тонких пленках. Вопросы физики твердого тела (Труды Воронежского политехн. ин-та), 1971, вып. 2, 202–204.
10. *Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.* Теория упругости. М., «Наука», 1965, стр. 146.
11. *Scott W. W., MacCrone R. K.* Apparatus for mechanical loss measurement in low loss materials at audio frequencies and low temperatures. Rev. Sci. Instr., 1968, *39*, 6, 821–823.
12. *Yamamoto M., Taniguchi S.* The $\Delta E$-effect and Young's modulus in nickel-cobalt alloys. Sci. Rep. RITU, 1955, *A7*, 1, 34–41.
13. *Катаев Г. И.* Магнитострикция и отрицательный $\Delta E$-эффект в ферритах. В сб.: Физические и физико-химические свойства ферритов. Минск, «Наука и техника», 1966, 160–168.
14. *Кекало И. Б.* Магнитоупругие явления. В сб.: Металловедение и термическая обработка. Итоги науки и техники. М., ВИНИТИ, № 7, 1973, 12.
15. *Дунаев Ф. И.* О потерях энергии при перемагничивании ферромагнетиков. Физ. металлов и металловедение, 1970, *29*, 5, 937–939 (ч. 1).
16. *Дунаев Ф. И.* О потерях энергии при перемагничивании ферромагнетиков. Физ. металлов и металловедение, 1970, *30*, 3, 660–668 (ч.2).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
физический факультет

Поступила
10 сентября 1978 г.
После вторичного исправления
8 августа 1979 г.

*Примечание при корректуре.* За время прохождения статьи в редакции появилась работа «Vibrating-reed measurements of the $\Delta E$ effect and internal friction of the highly magnetostrictive alloy $Fe_2(Tb_{0,2}Dy_{0,22}Ho_{0,58})$» Berry B. S., Pritchet W. C., Savage H. T. (J. Appl. Phys., 1978, *49*, 12, 6075–6078), где на частотах порядка сотни герц при комнатной температуре также наблюдался отрицательный $\Delta E$-эффект (около 12%).

---

УДК 534.26

# ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКИХ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА РЕШЕТКЕ ИЗ АКУСТИЧЕСКИ МЯГКИХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ, ЧАСТИЧНО ПОКРЫТЫХ СЛОЕМ ИДЕАЛЬНО ПОДАТЛИВОГО МАТЕРИАЛА КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

***А. Е. Климов***

Рассмотрим задачу о дифракции плоских звуковых волн, падающих на решетку, состоящую из конечного числа бесконечно длинных акустически мягких круговых цилиндров, частично экранированных слоем акустически мягкого материала конечной толщины. Так же как и в работе [1], будем полагать, что продольные оси цилиндров параллельны и лежат в одной плоскости. Системы координат и обозначения, необходимые для решения задачи, приведены на фиг. 1. В математической постановке рассматриваемая задача сводится к решению скалярного волнового уравнения Гельмгольца относительно потенциала скорости $\Phi^{(1)}$ поля рассеяния системы цилиндров, удовлетворяющего на поверхности каждого из них в сумме с потенциалом скорости $\Phi^{(0)}$ поля падающей плоской волны граничным условиям Дирихле и условию излучения на бесконечности. Для решения уравнения область существования поля разобьем на ряд частичных областей, определив их границы в локальных координатах $s$-х цилиндров неравенствами: $r_{0s}\leqslant r_s\leqslant r_{1s}$, $-\varphi_{0s}\leqslant\varphi_s\leqslant\varphi_{0s}$ для первой области и $r_{1s}\leqslant r_s<\infty$, $0\leqslant\varphi_s\leqslant 2\pi$ для второй области.

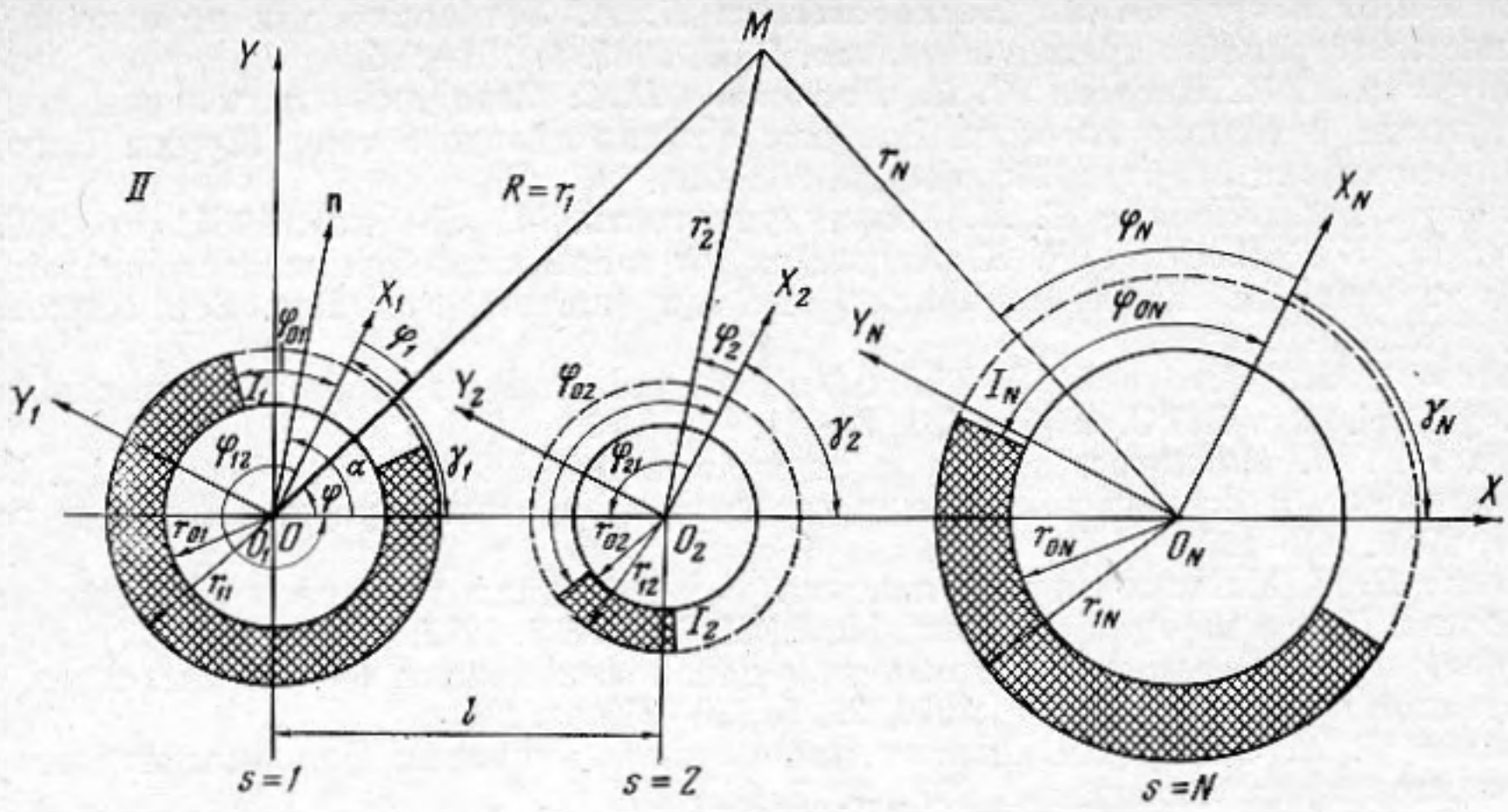
Граничные условия задачи сформулируем в следующем виде:

$$\Phi^{(0)}+\Phi^{(1)}=0,\quad r_{0s}\leqslant r_s\leqslant r_{1s},\quad \varphi_s=\pm\varphi_{0s},\tag{1}$$

$$\Phi^{(0)}+\Phi^{(1)}=0,\quad r_s=r_{0s},\quad -\varphi_{0s}\leqslant\varphi_s\leqslant\varphi_{0s},\tag{2}$$

$$\Phi^{(0)}+\Phi^{(1)}=0,\quad r_s=r_{1s}.\quad \varphi_{0s}\leqslant|\varphi_s|\leqslant\pi,\quad S=1,\ldots,N.\tag{3}$$

Полное дифрагированное поле $\Phi=\Phi^{(0)}+\Phi^{(1)}$ представляет собой суперпозицию поля $\Phi^{(0)}$ падающей волны и поля $\Phi^{(1)}$, рассеянного решеткой цилиндров. Как и в




Фиг. 1. Нормальное сечение решетки цилиндров, частично покрытых слоем идеально податливого материала конечной толщины

работе [1], на основании граничных условий (1) и (2) потенциал скорости полного поля в первой области $s$-го цилиндра представим рядом Фурье по локальным цилиндрическим волновым функциям в виде

$$\Phi_{\mathrm{I}}^{(s)} = \sum_{q=1}^{\infty} A_q^{(s)} \Delta_{m_q^{(s)}}(kr_s) \sin\left[m_q^{(s)}(\varphi_s + \varphi_{0s})\right], \tag{4}$$

где

$$\Delta^{m_q^{(s)}}(kr_s) = J_{m_q^{(s)}}(kr_s) - \frac{J_{m_q^{(s)}}(kr_{0s})}{N_{m_q^{(s)}}(kr_{0s})} \cdot N_{m_q^{(s)}}(kr_{0s}),$$

$$m_q^{(s)} = \frac{\pi q}{2\varphi_{0s}}, \quad q = 1, 2, \ldots, \quad s = 1, \ldots, N,$$

$A_q^{(s)}$ – неизвестные комплексные коэффициенты; $J_{m_q^{(s)}}(kr_s)$, $N_{m_q^{(s)}}(kr_s)$ – функции Бесселя и Неймана $m_q^{(s)}$ порядка. Потенциал скорости полного поля во второй области в координатах $s$-го цилиндра представим соотношением

$$\Phi_{\mathrm{II}}^{(s)} = e^{ikl(s-1)\cos\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kr_s) e^{in(\varphi_s - \alpha_s)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m^{(s)} H_m^{(1)}(kr_s) e^{im\varphi_s} + \tag{5}$$

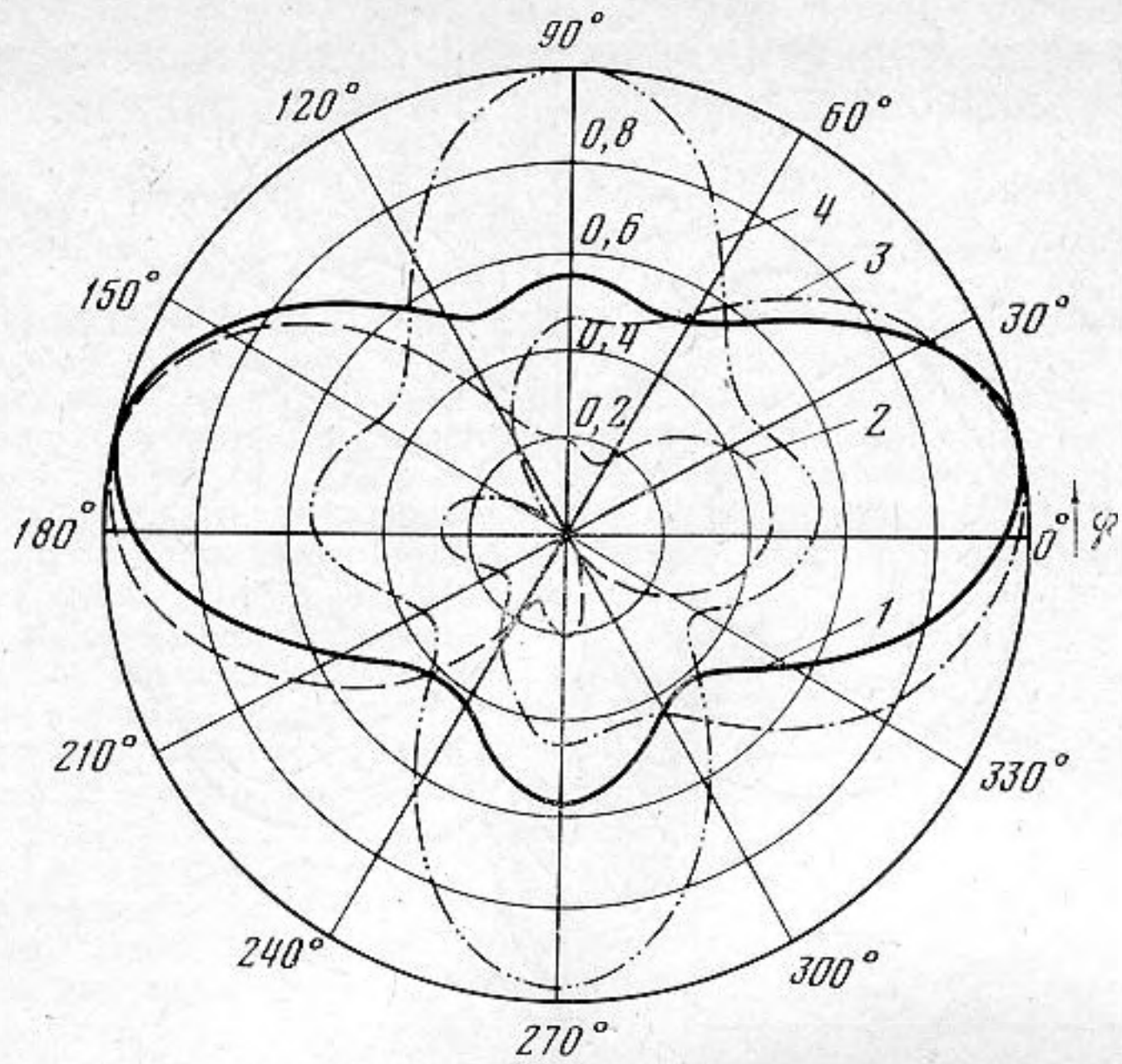
$$+ \sum_{\substack{p=1 \\ p\neq s}}^{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m^{(p)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{m-n}^{(1)}(kl_{ps}) J_n(kr_s) e^{i(m-n)\varphi_{ps} + in\varphi_s},$$

где $C_m^{(s)}$ – неизвестные комплексные коэффициенты, $H_m^{(1)}(kr_s)$ – функция Ханкеля I рода.

Для отыскания неизвестных коэффициентов $A_q^{(s)}$ и $C_m^{(s)}$ воспользуемся системой функциональных уравнений, объединяющих граничное условие (3) и условия сопряжения полей на границах раздела первых и вторых областей:

$$\Phi_{\mathrm{II}}^{(s)} = \begin{cases} 0, & r_s = r_{1s}, \quad \varphi_{0s} \leqslant |\varphi_s| < \pi, \\ \Phi_{\mathrm{I}}^{(s)}, & r_s = r_{1s}, \quad -\varphi_{0s} \leqslant \varphi_s \leqslant \varphi_{0s}; \end{cases} \tag{6}$$

$$\frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial \Phi_{\mathrm{II}}^{(s)}}{\partial(kr_s)} = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial \Phi_{\mathrm{I}}^{(s)}}{\partial(kr_s)}, \quad r_s = r_{1s}, \quad -\varphi_{0s} \leqslant \varphi_s \leqslant \varphi_{0s}. \tag{7}$$




Фиг. 2. Угловое распределение нормированных амплитуд полей рассеяния отдельных цилиндров решетки из пяти идентичных цилиндров при угле падения плоских волн $\alpha=\pi/2$. Параметры решетки: $kr_0=0{,}5\pi$; $kr_1=0{,}55\pi$; $\varphi_0=\pi/2$; $\gamma=\pi/2$; $l=1{,}1\pi$; $N=1$ (кривая *1*); $N=5$; $s=1$ (кривая *2*); $s=2$ (кривая *3*); $s=3$ (кривая *4*)

Алгебраизация функциональных уравнений (6) и (7) путем подстановки выражений (4) и (5) и использование свойств ортогональности систем функций $e^{i\nu\varphi_s}$ и $\sin[m^{(s)}(\varphi_s+\varphi_{0s})]$ на интервалах $[0,2\pi]$ и $[-\varphi_{0s}, \varphi_{0s}]$ соответственно позволяет получить систему уравнений, аналогичную приведенной в работе [1], причем

$$\Delta_{m_q^{(s)}}(kr_{1s}) = J_{m_q^{(s)}}(kr_{1s}) - \frac{J_{m_q^{(s)}}(kr_{0s})}{N_{m_q^{(s)}}(kr_{0s})} \cdot N_{m_q^{(s)}}(kr_{1s}); \tag{8}$$

$$\Delta'_{m_q^{(s)}}(kr_{1s}) = J'_{m_q^{(s)}}(kr_{1s}) - \frac{J_{m_q^{(s)}}(kr_{0s})}{N_{m_q^{(s)}}(kr_{0s})} N'_{m_q^{(s)}}(kr_{1s}).$$

Численные расчеты углового распределения амплитуд полей рассеяния одиночных цилиндров и решеток в волновой зоне были выполнены с использованием асимптотических представлений функций Ханкеля при больших $kr$ ($kr \gg 1$) по формулам:

$$F^{(s)}(\varphi) = \frac{|\Phi^{(s)}_{\text{IIд}}|}{|\Phi^{(s)}_{\text{IIд}}|_{\max}}$$

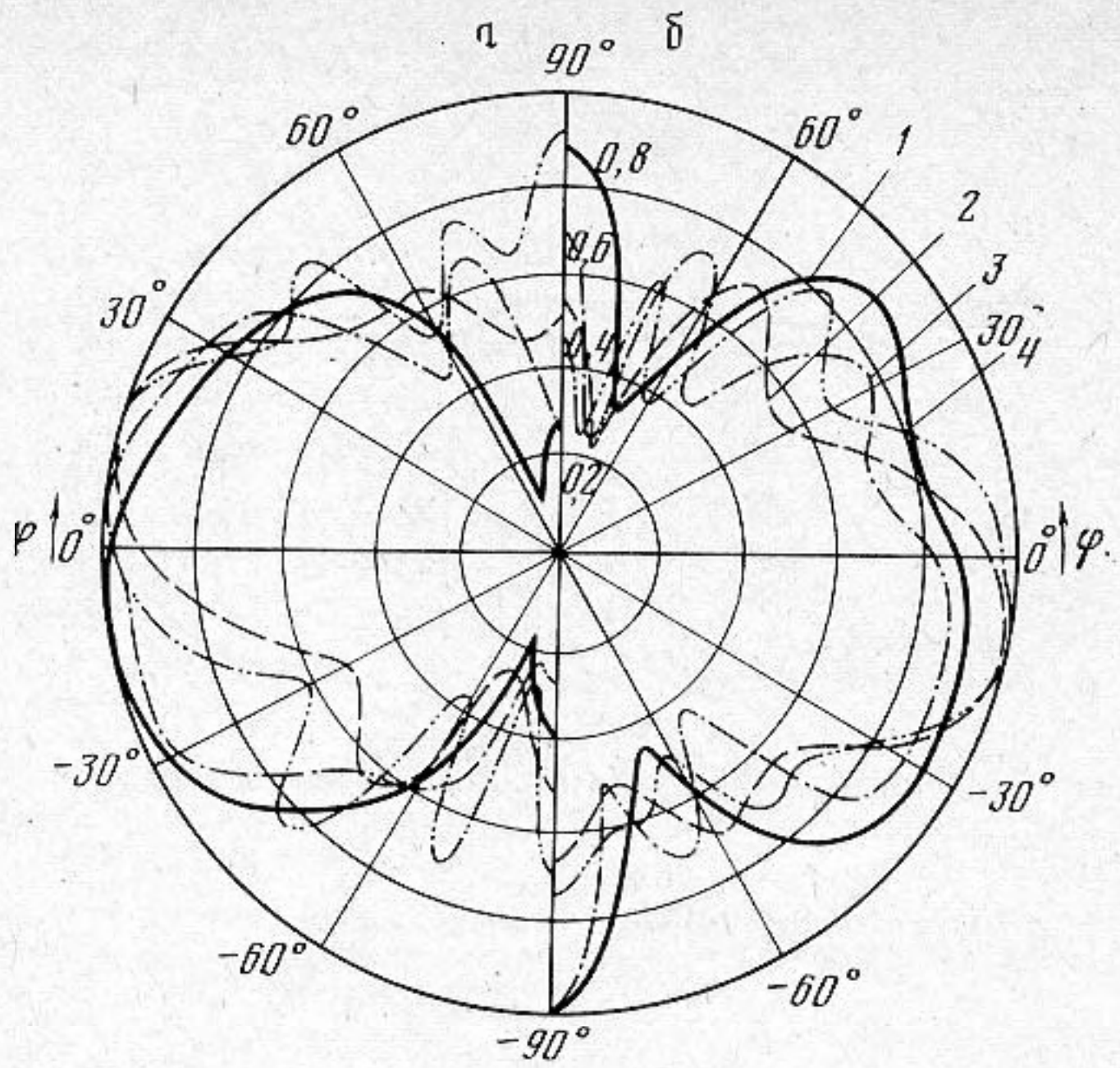
для одиночного цилиндра в составе решетки и

$$F^{(N)}(\varphi) = \frac{|\Phi^{(N)}_{\text{IIд}}|}{|\Phi^{(N)}_{\text{IIд}}|_{\max}}$$

для решетки в целом. Здесь

$$\Phi^{(s)}_{\text{IIд}} = \left(\frac{2}{\pi kR}\right)^{1/2} e^{-i(\pi/4-kR)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m^{(s)} J_m(kr_{1s})\, e^{-i\pi m/2} e^{im(\varphi-\gamma_s)};$$

$$\Phi^{(N)}_{\text{IIд}} = \left(\frac{2}{\pi kR}\right)^{1/2} e^{-i(\pi/4-kR)} \sum_{s=1}^{N} e^{ikl(s-1)\cos\varphi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m^{(s)} J_m(kr_{1s})\, e^{-i\pi m/2} e^{im(\varphi-\gamma_s)}.$$




Фиг. 3. Угловое распределение нормированных амплитуд полей рассеяния решеток идентичных цилиндров при углах падения плоских волн на систему $\alpha=\pi/2$ (*а*) и $3\pi/2$ (*б*). Параметры решеток: $kr_0=0{,}5\pi$; $kr_1=0{,}55\pi$; $\varphi_0=\pi/2$; $\gamma=\pi/2$; $l=1{,}1\pi$; $N=2$ (кривая *1*); 3 (кривая *2*); 4 (кривая *3*); 5 (кривая *4*)

Результаты расчетов приведены на фиг. 2 и 3.

Сравнение кривых, приведенных на фиг. 2, показывает существенное отличие характеристик рассеяния поля плоской волны одиночными цилиндрами при работе их в составе решетки (кривые *2–4*, фиг. 2) и вне ее (кривая *1*, фиг. 2). Диаграммы рассеяния крайних ($s=1{,}5$) и средних ($s=2{,}4$) цилиндров пятиэлементной решетки вытянуты вдоль плоскости решетки, а максимумы их полей рассеяния лежат во взаимно противоположных направлениях (кривые *2*, *3*, фиг. 2). Диаграмма рассеяния центрального ($s=3$) цилиндра (кривая *4*, фиг. 2) имеет максимум рассеянного поля в направлении падения плоской волны. Во всех случаях взаимодействие полей, рассеянных на цилиндрах решетки, приводит к существенному отличию диаграмм рассеяния цилиндра в составе решетки от таковых для одиночного цилиндра. Дифракция волн, падающих нормально к плоскости решетки, характеризуется тем, что рассеянное поле формируется в секторе углов, прилегающих к плоскости решетки (кривые *1–4*, фиг. 3, *а*, *б*). При четном числе цилиндров в решетке и угле прихода плоских волн $\alpha=3\pi/2$ по направлению падающей волны имеет место основной лепесток (кривые *1*, *3*, фиг. 3, *б*), а при $\alpha=\pi/2$ лепесток по направлению падающей волны практически отсутствует (кривые *1*, *3*, фиг. 3, *а*). При нечетном количестве цилиндров и $\alpha=\pi/2$, $3\pi/2$ (кривые *2*, *4*, фиг. 3, *а*, *б*) основные лепестки полей рассеяния формируются вдоль плоскости решетки.

В рассмотренных случаях одинаковый характер граничных условий, заданных на поверхностях цилиндров и кольцевых слоев, и малая по сравнению с диаметром цилиндра толщина слоя обусловливают плавное изменение дифрагированного поля в углах, близких к плоскости решетки.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Климов А. Е., Лейко А. Г.* Дифракция звуковых волн на системе цилиндров, расположенных в незамкнутых кольцевых слоях. Акуст. ж., 1979, *25*, 5, 717–724.

Поступила
2 апреля 1979 г.