АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXVI 1980 Вып. 1

УДК 534.26

ДИФРАКЦИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА ДИАФРАГМЕ В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ

Ф. Е. Григорьян

Рассмотрена дифракция нормальных волн в круглом волноводе на диафрагме, имеющей круглое концентрическое отверстие. Для расчета матриц рассеяния применен метод преобразований в функциональных пространствах. Приведены расчетные результаты и установлена граница применимости квазистатического (низкочастотного) приближения.

В настоящее время в технической акустике при рассмотрении явления рассеяния звука на диафрагме в круглом волноводе обычно используется квазистатическое приближение, причем проводимость отверстия вычисляется по значениям функции Фока [1]. Более строгие методы расчета полей в волноводах с неоднородностями получили развитие, главным образом, в связи с исследованиями по замедляющим системам для электромагнитных волн (волноводы с периодически расположенными диафрагмами или ячеистые структуры). В работе [2] приведена составленная П. Е. Краснушкиным схема классификации имеющихся методов расчета полей в диафрагмированных волноводах.

Основными являются методы непосредственного сшивания полей на границах частичных областей: метод приравнивания коэффициентов Фурье разложений полей в частичных областях и вариационный метод Швингера. В свою очередь первый метод имеет разновидности: метод прямого сшивания и метод сшивания с выделением особенностей поля на острых кромках диафрагм. Эти методы различаются еще по выбранному способу разбиения на частичные области, параллельно или перпендикулярно продольной оси.

Вариационный метод нашел свое применение в работах [3, 4]. В работе [3] приведена вариационная формулировка задачи о расчете коэффициента прохождения основной нормальной волны через тонкую диафрагму в круглом волноводе (при однородных граничных условиях Неймана). В работе [4] исследована вариационным методом Швингера задача о приближенном определении коэффициента прохождения электромагнитной нормальной волны типа H_{01} через толстую диафрагму в круглом волноводе при условии, что ограничивающие поверхности идеально проводящие.

Вариационные решения для задач о волноводах обычно ограничены по частоте случаем одномодального распространения; это относится и к работам [3, 4].

При расчетах, ориентированных на использование ЭВМ, определенные преимущества имеет метод приравнивания коэффициентов Фурье. Решения, получаемые с его помощью, легко поддаются алгоритмизации, причем окончательные формулы естественным образом обобщаются на случай падающих нормальных волн произвольного номера, а результаты решения включают непосредственно численные значения амплитуды всего набора рассеянных нормальных волн. Данный метод позволяет решать задачу о дифракции на диафрагме произвольного поля с заданной симметрией, причем без принципиального ограничения по частоте. Примеры

эффективного использования этого метода можно найти, например, в работе [5] и в целом ряде других работ того же автора, см. библиографию в работе [2].

Нами использована некоторая разновидность метода приравнивания коэффициентов Фурье, весьма тесно примыкающая к методу Кука — Трантера, сведения решения одной смешанной краевой задачи теории потенциала для полубесконечного цилиндра к решению бесконечной системы алгебраических уравнений, смешанные краевые условия задачи задаются на торце полубесконечного цилиндра с разделяющей линией в виде концентрической окружности [6].

Рассмотрим волновод круглого сечения, имеющий поперечную диафрагму, с соосно расположенным круглым отверстием. Известно, что потенциал звукового поля в круглом волноводе с абсолютно жесткой стенкой может быть представлен для осесимметричного случая в виде разложения по нормальным волнам имеющего вид

$$\varphi_m(r, z) = A_m J_0(\mu_m r) \exp(\pm \Gamma_m z),$$

где r и z — радиальная и аксиальная координаты соответственно, J_0 — бесселева функция, μ_m — корни уравнения $J_1(\mu a)=0$, a — радиус волновода, $\Gamma_m = i\sqrt{k^2-\mu_m^2}$ — постоянные распространения, k — волновое число.

Поместим теперь при $z=0$ абсолютно жесткую диафрагму с соосным отверстием радиуса b. Граничные условия в плоскости диафрагмы включают условие непрерывности звукового давления в апертуре

$$(1) \qquad p^-(r, z)\,|_{z=-0} = p^+(r, z)\,|_{z=+0} \quad \text{при } 0 \leqslant r < b,$$

а также условие непрерывности нормальной составляющей колебательной скорости

$$(2) \qquad v_z^-(r, z)\,|_{z=-0} = v_z^+(r, z)\,|_{z=+0} = v_z(r),$$

где $v_z(r)$ может быть представлена как

$$\sum_{m=0}^{\infty} X_m J_0(\mu_m r).$$

Здесь функции с верхними индексами $-$, $+$ описывают поля при $z<0$ и $z>0$ соответственно. Условие равенства нулю нормальной к диафрагме составляющей колебательной скорости может быть записано так:

$$(3) \qquad v_z(r) = 0 \quad \text{при } b < r \leqslant a.$$

С помощью условий (1)—(3), применяя разложения в ряды по собственным функциям задачи, можно составить бесконечную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных X_m. Однако такой прямой путь не приводит к эффективному решению задачи, поскольку получающаяся система уравнений сходится чрезвычайно медленно и для вычислений непригодна.

Причина заключается в том [7], что собственные функции задачи оказываются здесь «плохо приспособленными» для описания поля в плоскости диафрагмы, т. е. в той плоскости, по которой и надо произвести «сшивание» полей. Учитывая это обстоятельство, напишем следующее равенство:

$$(4) \qquad \sum_{m=0}^{\infty} X_m J_0(\mu_m r) = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n F_n(r) & \text{при } 0 \leqslant r < b, \\ 0 & \text{при } b < r \leqslant a, \end{cases}$$

где $\{F_n(r)\}$ — какая-то полная система функций, определенная в промежутке $[0, b]$, α_n — коэффициенты разложения. Установим связь между X_m и α_n. Для этого разложим (4) по системе $\{J_0(\mu_m r)\}$, которая, как известно, является полной системой функций ортогональных с весом r в промежутке $[0, a]$. Тогда

$$X_m = \frac{1}{N_m} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \alpha_n, \tag{5}$$

где

$$N_m = \int_0^a J_0^2(\mu_m r) r\, dr,$$

$$A_{mn} = \int_0^b F_n(r) J_0(\mu_m r) r\, dr. \tag{6}$$

Используем теперь разложение цилиндрической функции по сферическим функциям Бесселя [3]:

$$J_0(\mu_m b \sin \eta) = \sum_{q=0}^{\infty} M(q) \mathscr{P}_{2q}(\cos \eta) j_{2q}(\mu_m b), \tag{7}$$

где

$$M(q) = (4q+1) \frac{\Gamma(q+{}^1/_2)}{q!\, \Gamma({}^1/_2)},$$

$\mathscr{P}_{2q}(\cos \eta)$ — полиномы Лежандра, $j_{2q}(\mu_m b)$ — сферические функции Бесселя.

Положив $r = b \sin \eta$ и подставив выражение (7) в формулу (6), получим

$$A_{mn} = b^2 \sum_{q=0}^{\infty} M(q) j_{2q}(\mu_m b) \int_0^{\pi/2} F_n(b \sin \eta) \mathscr{P}_{2q}(\cos \eta) \sin \eta \cos \eta\, d\eta. \tag{8}$$

Если подставить выражение (8) в формулу (5) и поменять порядок суммирования, то X_m можно выразить через новые неизвестные β_q:

$$X_m = \frac{1}{N_m} \sum_{q=0}^{\infty} j_{2q}(\mu_m b) \beta_q, \tag{9}$$

где множества $\{\beta_q\}$ и $\{\alpha_n\}$ связаны между собой некоторым линейным преобразованием. Поскольку в итоге надо знать амплитуды нормальных волн X_m, достаточно найти величины β_q.

Напишем теперь выражение (1) в виде разложения по собственным функциям задачи. Для этого обозначим потенциал звукового поля при $z<0$ через $\Psi^-(r, z)$. Условимся, что падающая волна — i-я нормальная волна с единичной амплитудой потенциала, приходящая из $-\infty$. Тогда

$$\Psi^-(r, z) = \sum_{m=0}^{\infty} (Y_m^- e^{\Gamma_m z} + \delta_{mi} e^{-\Gamma_i z}) J_0(\mu_m r), \tag{10}$$

где δ_{mi} — символ Кронекера. Потенциал при $z>0$

$$\Psi^+(r, z) = \sum_{m=0}^{\infty} Y_m^+ J_0(\mu_m r) e^{-\Gamma_m z}. \tag{11}$$

Условие (1) можно написать также и для потенциала, подставив затем в соответственное выражение разложения (10) и (11), получим

$$\sum_{m=0}^{\infty} \delta Y_m J_0(\mu_m r)=0 \quad \text{при} \quad 0\leqslant r<b, \tag{12}$$

где

$$\delta Y_m=Y_m^-+\delta_{mi}-Y_m^+.$$

Поскольку аксиальная колебательная скорость непрерывна при $z=0$ на полном промежутке ортогональности $[0, a]$,

$$\Gamma_m Y_m^+=-\Gamma_m Y_m^-+\Gamma_i\delta_{mi}=X_m, \tag{13}$$

$$\delta Y_m=2(\delta_{mi}-X_m/\Gamma_m). \tag{14}$$

Полагая $r=b\sin\eta$, используя разложение (7) и изменяя порядок суммирования, можно формулу (12) написать в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} M(k) A_k \mathscr{P}_{2k}(\cos\eta)=0 \quad \text{при} \quad 0\leqslant\eta<\frac{\pi}{2}, \tag{15}$$

где

$$A_k=\sum_{m=0}^{\infty} \delta Y_m j_{2k}(\mu_m b).$$

Поскольку полиномы Лежандра четных номеров $\mathscr{P}_{2k}(\cos\eta)$ образуют в указанном промежутке полную ортогональную систему, отсюда немедленно следует, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} \delta Y_m j_{2k}(\mu_m b)=0, \qquad k=0, 1, 2, \ldots \tag{16}$$

Подставив выражение (14) в формулу (16) и использовав разложение (9), можно написать следующую систему уравнений относительно неизвестных β_q:

$$\sum_{q=0}^{\infty} B_{kq}\beta_q=j_{2k}(\mu_i b), \tag{17}$$

где

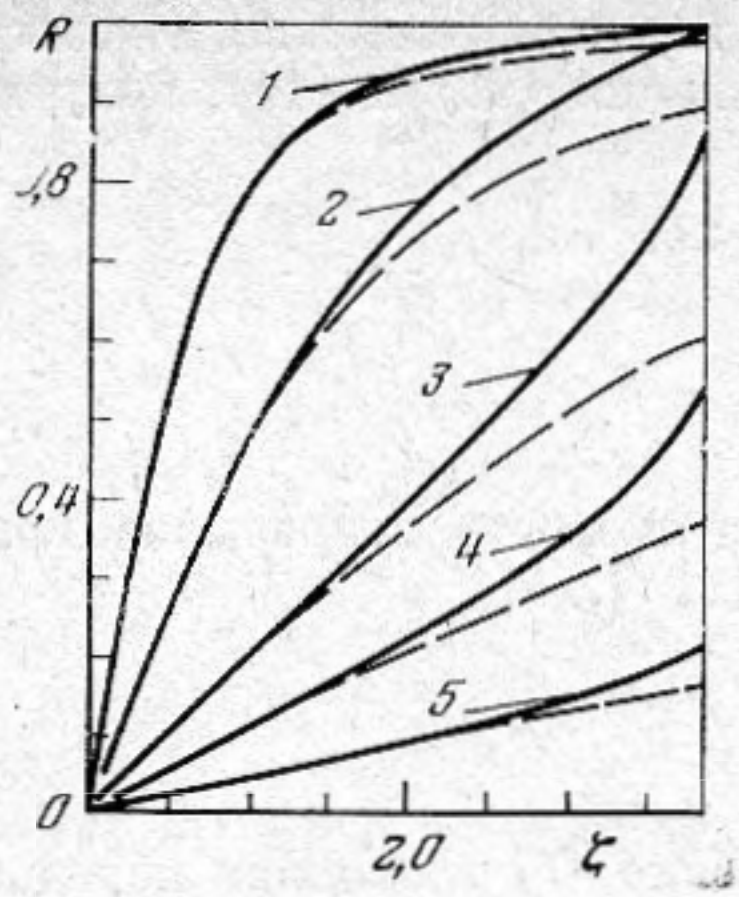
$$B_{kq}=\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{N_m\Gamma_m} j_{2k}(\mu_m b) j_{2q}(\mu_m b). \tag{18}$$

Таким образом, задача свелась к нахождению величин β_q из системы (17) и вычислению X_m по формуле (9). При этом система (17) должна быть близка к диагональной, по крайней мере для малых $\theta=b/a$, так как можно показать, что в этом случае

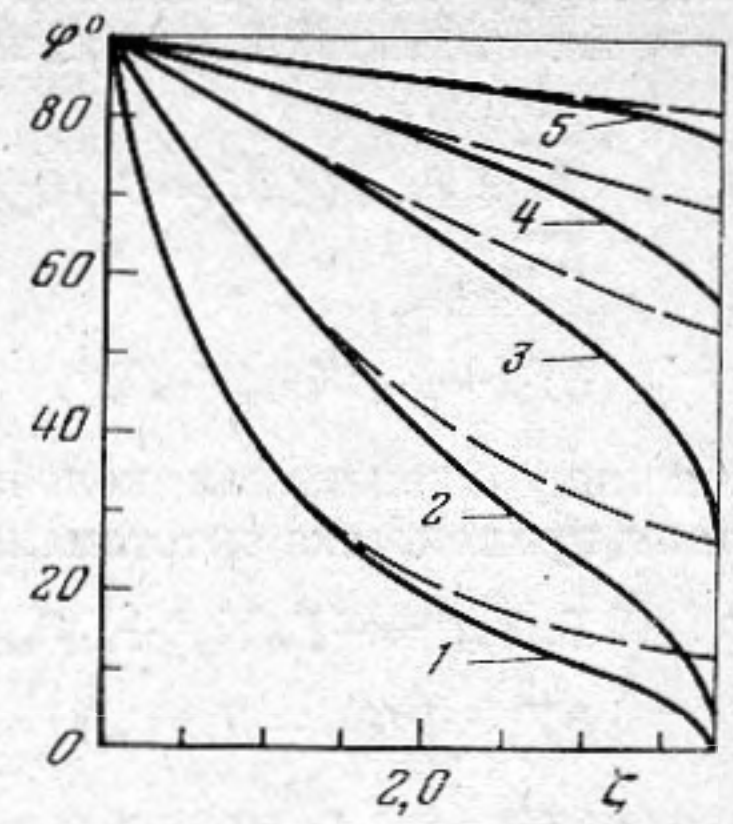
$$B_{kq}\approx\text{const}\int_0^{\infty} \frac{J_{2k+1/2}(x) J_{2q+1/2}(x)}{x}\,dx.$$

Поскольку интеграл в правой части равен $\sin\pi(k-q)/\pi(k-q)(2k+2q+1)$ [8], то $B_{kq}\approx 0$ при $k\neq q$.

Для проведения численных расчетов систему (17) удобнее несколько преобразовать путем подстановки $\beta_q'=\pi\beta_q/b$. Тогда мы получим систему



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Зависимости модуля R коэффициента отражения основной нормальной волны от волнового параметра ζ при последовательных значениях $\theta={}^1/_3$ (*1*), ${}^1/_2$ (*2*), ${}^2/_3$ (*3*), ${}^3/_4$ (*4*), ${}^5/_6$ (*5*). Цифры в скобках – номера кривых. Штриховые кривые рассчитаны по формуле (22)

Фиг. 2. Зависимости фазы φ коэффициента отражения основной нормальной волны от волнового параметра ζ. Значения параметра θ и обозначения те же, что для фиг. 1

уравнений с коэффициентами $\overline{B}_{kq}$, которые являются функциями двух безразмерных параметров: волнового параметра $\zeta=ka$ и $\theta=b/a$. С учетом того, что

$$N_m=\frac{a^2}{2}J_0^2(\mu_m a),$$

выражение для $\overline{B}_{kq}$ можно написать в следующем виде:

$$\overline{B}_{kq}=\frac{2\theta}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma_m J_0^2(\varkappa_m)}j_{2k}(\varkappa_m\theta)j_{2q}(\varkappa_m\theta), \tag{19}$$

где $\Gamma_m=\sqrt{\varkappa_m^2-\zeta^2}$, $\varkappa_m$ – корни уравнения $J_1(\varkappa)=0$.

Рассматривая асимптотическое поведение членов ряда (19) при больших m, можно выделить часть ряда, монотонно убывающую как C/m^2. Эта составляющая дает вклад в ошибку при отбрасывании остатка после суммирования L членов порядка C/L, т. е. быстрота убывания ошибки с ростом L явно недостаточна. Поэтому целесообразно вычислять предварительно суммы вида

$$S_{k,\,q}=\overline{B}_{k,\,q-1}+\overline{B}_{k,\,q},\quad q=1,\ 2,\ 3,\ldots \tag{20}$$

Асимптотическая сходимость рядов для $S_{k,\,q}$ на два порядка выше, чем для $\overline{B}_{k,\,q}$, и приемлема уже для вычислений на ЭВМ. По известным S_{kq} можно вычислять затем $\overline{B}_{kq}$, применяя формулу (20) как рекуррентную и используя свойство симметрии матрицы $\{\overline{B}_{kq}\}$. Однако для начала рекуррентного процесса необходимо знать $\overline{B}_{00}$. Этот элемент приходится вычислять отдельно.

Для усиления сходимости ряда для $\overline{B}_{00}$ мы использовали преобразование по Куммеру следующего вида:

$$\overline{B}_{00}=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{2\theta j_0^2(\varkappa_m\theta)}{\pi\Gamma_m J_0^2(\varkappa_m)}-\frac{C}{\varkappa_m^2}\right)+CR_B/\pi^2, \tag{21}$$

где C — константа, равная $1/2\theta$,

$$R_B=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\bar{\varkappa}_m^{\,2}},\ \text{где}\ \bar{\varkappa}_m=\varkappa_m/\pi.$$

По нашим вычислениям

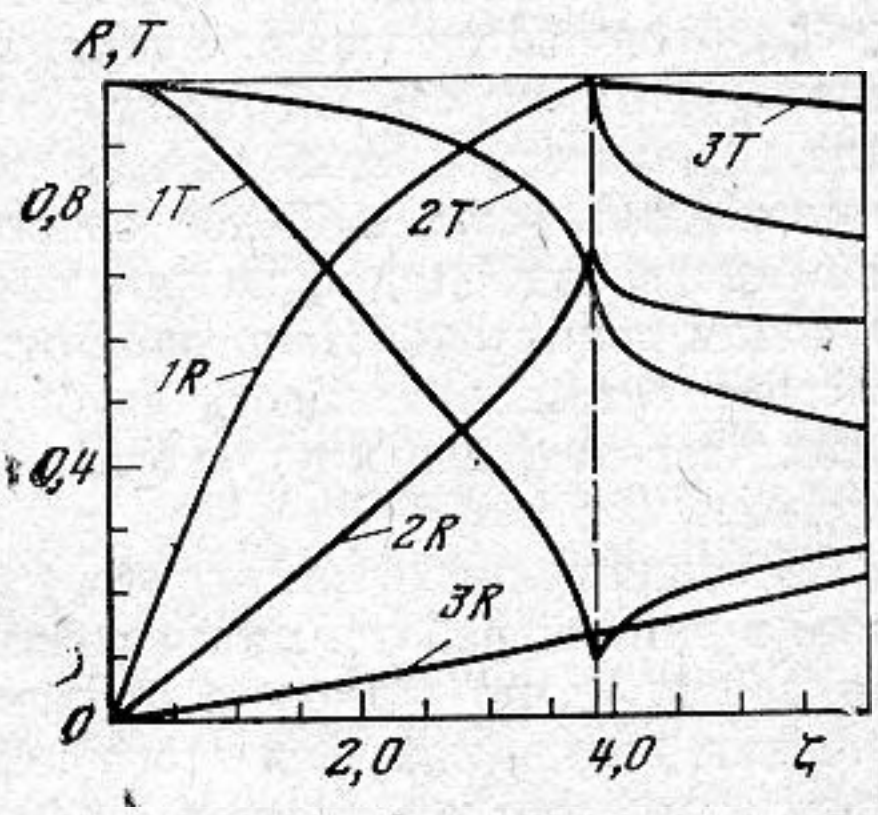
$$R_B=1{,}233700550\ldots$$

Считая $\bar{B}_{kq}$ вычисленными и решив с необходимой точностью соответственную систему уравнений, найдем величины β_q, а по ним, с помощью формулы (9), амплитуды X_m. Переход к амплитудам потенциала Y_m^+, Y_m^- осуществляется по формулам

$$Y_m^+=X_m/\Gamma_m,\quad Y_m^-=\delta_{mi}-X_m/\Gamma_m,$$

которые непосредственно следуют из формулы (13). Наборы векторов $\{Y_m^+\}$, $\{Y_m^-\}$ для последовательных номеров i падающих волн единичной амплитуды потенциала определят матрицы прохождения (отражения) $\{Y_{im}^+\}$, $\{Y_{im}^-\}$. Диагональные элементы этих матриц численно равны соответственным коэффициентам прохождения (отражения).

Описанный алгоритм был реализован в виде программы для ЭВМ ЕС-1020 (на языке Фортран IV). Начальные 10 значений $\varkappa_m$ вводились таблично. Далее вычисления величин $\varkappa_m$ проводились по асимптотическим формулам Мак-Магона. Для вычисления сферических функций Бесселя наиболее эффективным при $\varkappa_m\theta>1$ оказался метод Голдстейна — Тейлера [9], дающий сразу для данного аргумента необходимый набор функций с последовательными значениями индекса. При $\varkappa_m\theta<1$ использовалось разложение в степенной ряд. Для решения системы (17) с последовательно возрастающим рангом использовался итеративный метод.



Фиг. 3. Зависимости модуля коэффициента отражения R (номера кривых сопровождаются буквой R) и коэффициента прохождения T (номера кривых сопровождаются буквой T) основной нормальной волны от волнового параметра ζ при $\theta_s=0{,}25$ (*1*); 0,50 (*2*); 0,75 (*3*). Цифры в скобках — номера кривых

В результате проведенных численных экспериментов оказалось, что описанный метод расчета матриц прохождения и отражения обладает сходимостью, достаточно хорошей для практических вычислений. Например, система (17), редуцированная к системе трех уравнений, уже обеспечивает вычисление коэффициента отражения (прохождения) для основной нормальной волны с тремя верными знаками во всем диапазоне изменения θ. Для практических целей оказывается достаточной точность, получаемая при решении системы двух уравнений.

В качестве иллюстрации приведем некоторые из полученных зависимостей. На фиг. 1, 2 приведены зависимости модуля R и фазы φ коэффициента отражения основной нормальной волны от волнового параметра $\zeta=ka$ при некоторых рациональных отношениях $b/a=\theta$. Штриховыми линиями даны кривые для R и φ, рассчитанные по формуле

$$\mathrm{R}e^{i\varphi}=\frac{i\dfrac{kS}{K}}{2+i\dfrac{kS}{K}},\tag{22}$$

где $S=\pi a^2$, K — проводимость отверстия, $K=2bF(\theta)$, $F(\theta)$ — функция Фока. Формулу (22) легко получить в рамках теории плоских волн в трубах [1], которая требует выполнения условия $2a \ll \lambda$. Поэтому формула (22) является низкочастотным (квазистатическим) приближением.

Анализируя приведенные графики, можно заключить, что низкочастотное приближение справедиво приблизительно в области $\zeta<1{,}2$. Этим же объясняется и хорошее совпадение результатов упомянутого в работе [1] экспериментального исследования Нестерова с теорией Фока, поскольку для использованных им частот и размеров установки $\zeta<0{,}8$.

На фиг. 3 приведены зависимости модуля коэффициента отражения R и коэффициента прохождения T основной нормальной волны от ζ при различных значениях параметра θ_s. Параметр θ_s представляет собой отношение площади отверстия к общей площади поперечного сечения волновода. Очевидно, что для круглого волновода $\theta_s=(b/a)^2=\theta^2$. Фигура 3 дает представление о характере поведения коэффициентов прохождения и отражения при прохождении системы через первое критическое значение $\zeta_{кр}=3{,}8317059702\ldots$ и в ближней закритической области при малых, средних и больших апертурах. Поскольку при $\theta_s=0{,}75$ значения T при $\zeta<\zeta_{кр}$ отличаются уже от единицы менее чем на 1%, то на фиг. 3 изображен лишь фрагмент соответственной кривой для $\zeta>\zeta_{кр}$. Качественное поведение зависимостей здесь такое же, как для плоского волновода с односторонней диафрагмой. Такое сравнение можно провести с учетом эквивалентности задачи дифракции на решетке полос [10] и на диафрагме в плоском волноводе. Некоторое отличие от кривых для плоского волновода состоит в том, что высота «зубцов», образуемых кривыми R на критических частотах, для круглого волновода значительно меньше, чем для плоского.

В заключение отметим, что, как и метод Кука — Трантера, рассмотренный в данной работе, метод позволяет рассчитывать не только осесимметричное поле, но и поля с произвольным видом симметрии в поперечном сечении волновода. Для этого необходимо лишь вместо формулы (7) использовать соответственное разложение, верное для цилиндрических функций с произвольным целым значком [3].

Автор глубоко благодарен Е. И. Михайлову за ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ржевкин С. Н.* Курс лекций по теории звука. Изд-во МГУ, 1960.
2. *Вальднер О. А., Собенин Н. П., Зверев Б. В., Шедрин И. С.* Справочник по диафрагмированным волноводам. М., Атомиздат, 1977.
3. *Морз Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики, т. 2. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
4. *Бутров М. В.* Симметричная диафрагма произвольной толщины в круглом волноводе. Радиотехника и электроника, 1958, *3*, 1, 56–60.
5. *Краснушкин П. Е.* Метод точного расчета периодического ячеистого волновода. Докл. АН СССР, 1964, *159*, 3, 528–531.
6. *Уфлянд Я. С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л., «Наука», 1977.
7. *Вайнштейн Л. А.* Теория дифракции и метод факторизации. М., «Советское радио», 1966.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М., «Наука», 1974.
9. Справочник программиста (под ред. Л. А. Оганесяна). Л., Судпромгиз, 1963.
10. *Шестопалов В. П.* Метод задачи Римана — Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. Изд-во Харьковского гос. ун-та, 1971.

Научно-производственное объединение
по исследованию и проектированию
энергетического оборудования
им. И. И. Ползунова

Поступила
18 августа 1978 г.
Окончательный вариант
16 августа 1979 г.