АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXVI 1980 Вып. 2

УДК 548.0:539.37

БРЮСТЕРОВСКИЕ УГЛЫ ДЛЯ УПРУГИХ ВОЛН И ВОЛНЫ РЭЛЕЯ В КУБИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛАХ

В. Н. Любимов, В. В. Филиппов

Исследованы решения дисперсионных уравнений для рэлеевской волны в кубических кристаллах. Дисперсионное уравнение описывает единственную рэлеевскую волну и, в зависимости от соотношения между упругими постоянными, два брюстеровских угла, под которыми отражаются либо однородные (объемные), либо неоднородные упругие волны. Подробно рассмотрен случай, когда плоскость параллельна двум осям симметрии четвертого порядка, а направление распространения параллельно одной из этих осей. В результате численного счета в области возможных значений упругих постоянных кристаллов выделены подобласти, в которых отражающиеся под брюстеровскими углами волны являются или однородными, или неоднородными. Такое разделение на подобласти проведено для четырех различных случаев выбора плоскости и направления распространения.

Система уравнений для поверхностной упругой (рэлеевской) волны в кристаллах, как правило, описывает единственную поверхностную волну, амплитуда которой экспоненциально затухает с удалением от поверхности. Существование и единственность такого решения следуют из общих теорем [1, 2], которые, однако, могут не выполняться для некоторых специально выбранных поверхностей и направлений распространения (они исследованы в работе [3]). Далее рассмотрены только те случаи, когда применимы теоремы [1, 2], устанавливающие существование и единственность.

Кроме решения, отвечающего поверхностной рэлеевской волне, система уравнений движения и граничных условий содержит и другие решения. Для изотропной среды эти решения рассмотрены в работе [4] (см. также [5]). В этом случае система указанных уравнений при отношении упругих постоянных $c_{44}/c_{11} \geqslant \varkappa_0$ ($\varkappa_0=0{,}321$) имеет также решения, описывающие отражение однородных объемных волн (поперечной t' или продольной l), падающих на свободную границу под углом Брюстера, т. е. когда отсутствует отраженная волна, одноименная с падающей. При $c_{44}/c_{11} < \varkappa_0$ ситуация аналогична, однако падающая и отраженная волны являются неоднородными (их волновые векторы комплексны). Фактически этот последний случай соответствует так называемым оттекающим (leaky) волнам [6] *.

Цель настоящей работы — исследовать подобные решения для кубических кристаллов. Проанализированы специальным образом выбранные поверхности и направления распространения, когда дисперсионное уравнение сводится к бикубическому уравнению. Для того чтобы не рассматривать каждый из таких случаев отдельно, начнем с более общего случая ромбического кристалла. От него очень просто можно перейти ко всем че-

* В ряде случаев, когда параллельная поверхности составляющая волнового вектора содержит достаточно малую мнимую часть, можно говорить о псевдоповерхностных волнах.

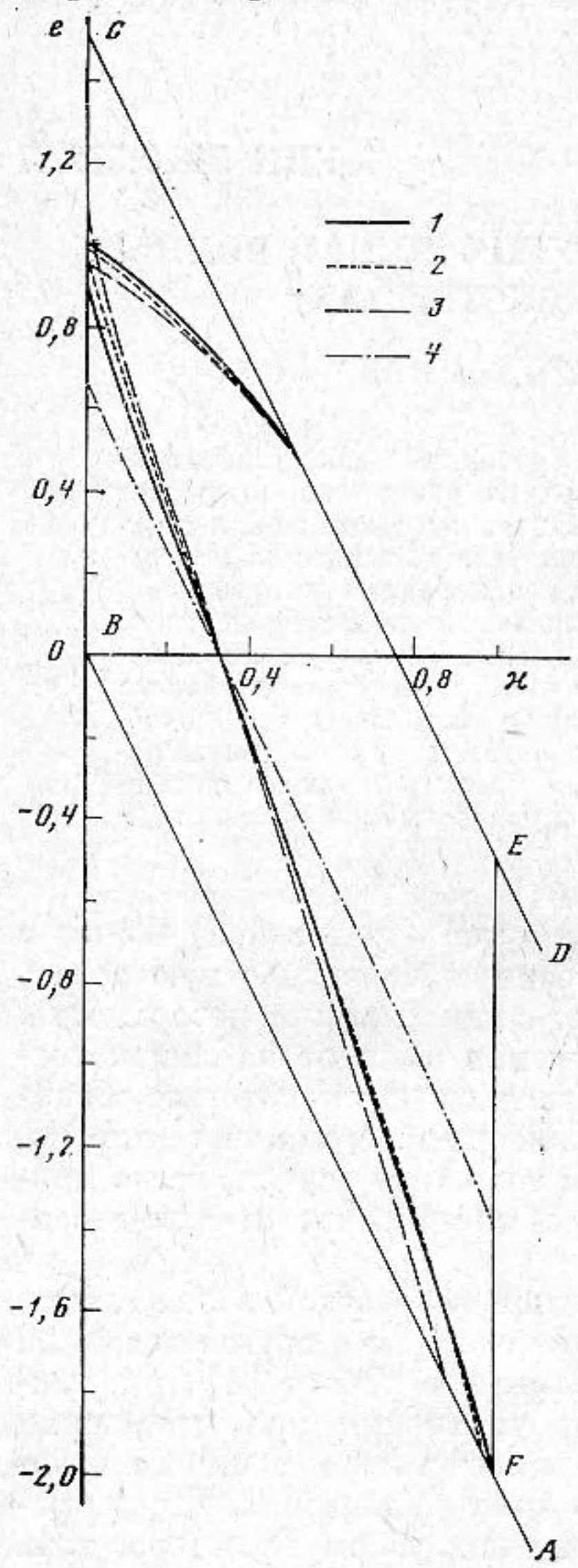
тырем различным выборам плоской поверхности и направлениям распространения, которые рассмотрены ниже.

Пусть поверхность проходит через кристаллофизические оси x_2, x_3 ромбического кристалла, а направление распространения совпадает с x_2 (оси координат параллельны осям симметрии второго порядка). Дисперсионное уравнение для рэлеевской волны в этом случае имеет вид

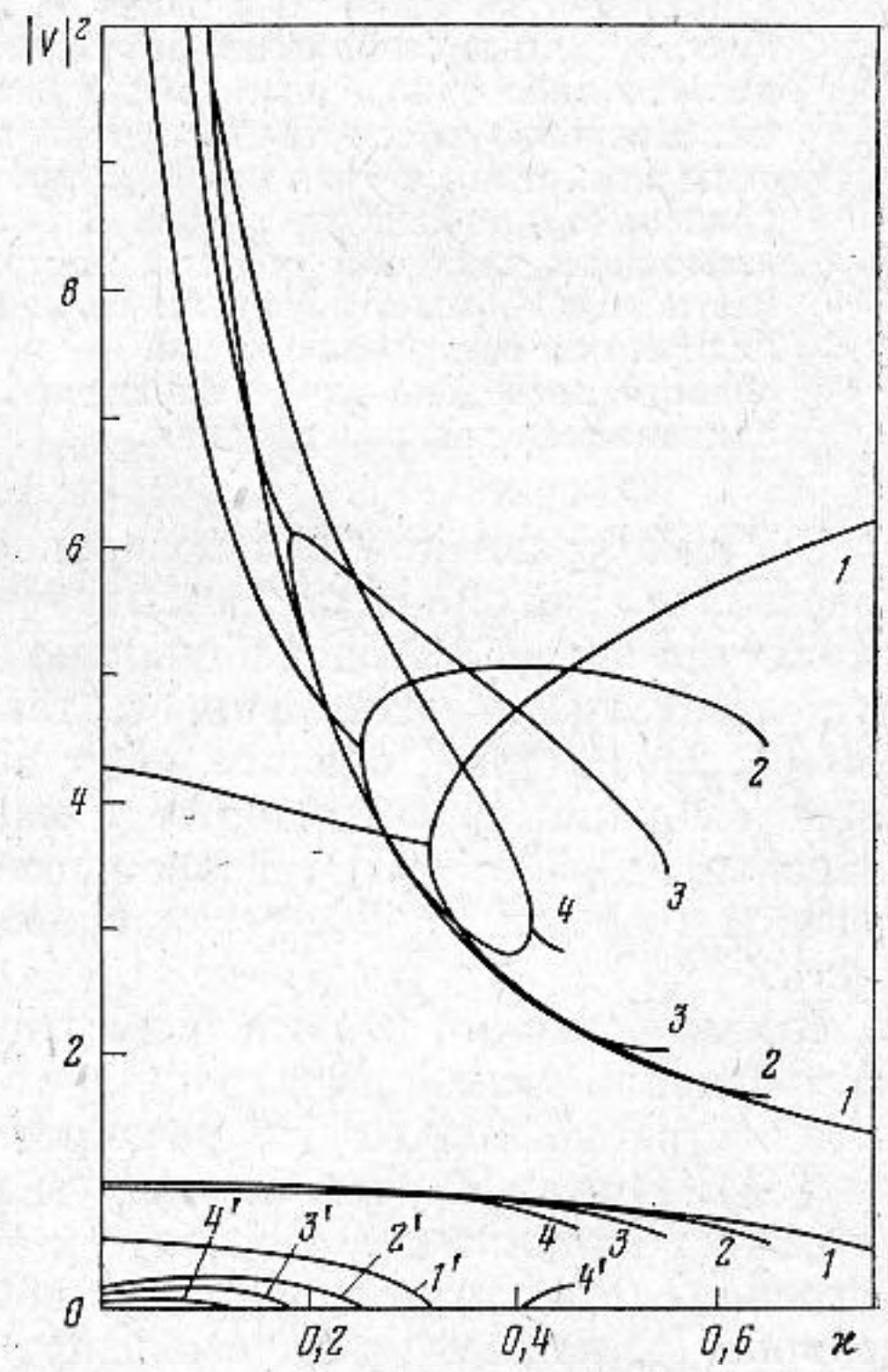
$$m_{1l}m_{1t'}\left(m_2^2\frac{c_{11}c_{22}-c_{12}^2}{c_{11}c_{66}}-1\right)=-\left(m_2^2\frac{c_{22}}{c_{66}}-1\right)\frac{c_{66}}{c_{11}}. \tag{1}$$

Здесь вместо волновых векторов k_i введены безразмерные векторы

$$m_i=k_iv_{t'}/\omega,$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Разбиение области значений параметров c, $\varkappa$ на подобласти для четырех различных случаев ориентации кристалла: *1* – направление распространения [010], плоскость (100), *2* – направление распространения [010], плоскость (101), *3* – направление распространения [110], плоскость (001), *4* – направление распространения [110], плоскость ($\bar{1}10$)

Фиг. 2. Зависимость корней уравнения (3) от $\varkappa$ (случай *1*) при $c>0$: *1* – $c=0$; *2* – $c=0{,}2$; *3* – $c=0{,}4$; *4* – $c=0{,}6$. Цифры со штрихами отмечают кривые зависимости фазы φ комплексно-сопряженных корней от $\varkappa$; $\varphi=\mathrm{arctg}(\mathrm{Im}\,V^2/\mathrm{Re}\,V^2)$

где $v_{t'}=(c_{66}/\rho)^{1/2}$ – скорость объемной поперечной волны при $k_i\|x_3$. Перпендикулярные границе составляющие волновых векторов волн l и t' определяются соотношениями

$$m_{1l,\,t'}^2=[-P\pm(P^2-4Q)^{1/2}]/2;$$

$$P=(m_2^2-1)+\left(m_2^2\frac{c_{22}}{c_{66}}-1\right)\frac{c_{66}}{c_{11}}+ \tag{2}$$
$$+m_2^2\frac{(c_{11}-c_{66})(c_{22}-c_{66})-(c_{12}+c_{66})^2}{c_{11}c_{66}},$$
$$Q=(m_2^2-1)\left(m_2^2\frac{c_{22}}{c_{66}}-1\right)\frac{c_{66}}{c_{11}}.$$

Избавившись от иррациональности в формуле (1), получим уравнение для относительной скорости $V=v/v_{t'}=1/m_2$ рэлеевской волны

$$V^6-\frac{2A+C}{B}V^4+\frac{A(A+2)}{B}V^2-\frac{A^2}{B}=0. \tag{3}$$

Здесь введены обозначения

$$A=\frac{c_{11}c_{22}-c_{12}^2}{c_{11}c_{66}},$$
$$B=1-c_{66}/c_{11},\quad C=1-c_{22}/c_{11}. \tag{4}$$

Из трех решений бикубического уравнения (3) одно всегда вещественно и описывает рэлеевскую волну; два других (вещественных или комплексных) описывают волны (однородные или неоднородные), падающие под брюстеровскими углами.

Переходя к кубическим кристаллам, обозначим $\varkappa=c_{44}/c_{11}$, $c=(c_{11}-c_{12}-2c_{44})/c_{11}$; параметр c характеризует кубическую анизотропию кристалла. Условия устойчивости для кубических кристаллов приводят к неравенствам [7, 8]

$$\varkappa+c/2<{}^3/_4,\quad \varkappa>0. \tag{5}$$

Область значений упругих постоянных $ABCD$ (фиг. 1) является бесконечно протяженной [8]. В работе [8], однако, выделена конечная область наиболее вероятных значений упругих постоянных. Эта область ограничена справа прямой EF, на которой разность скоростей v_l-v_t ($v_t=v_{t'}$) объемных волн, распространяющихся вдоль осей симметрии четвертого порядка в безграничном кристалле, проходит через ноль (более подробно границы этой области см. в [8]). Далее исследованы решения лишь в области $FBCE$, в которой и лежит область наиболее вероятных значений $\varkappa$ и c.

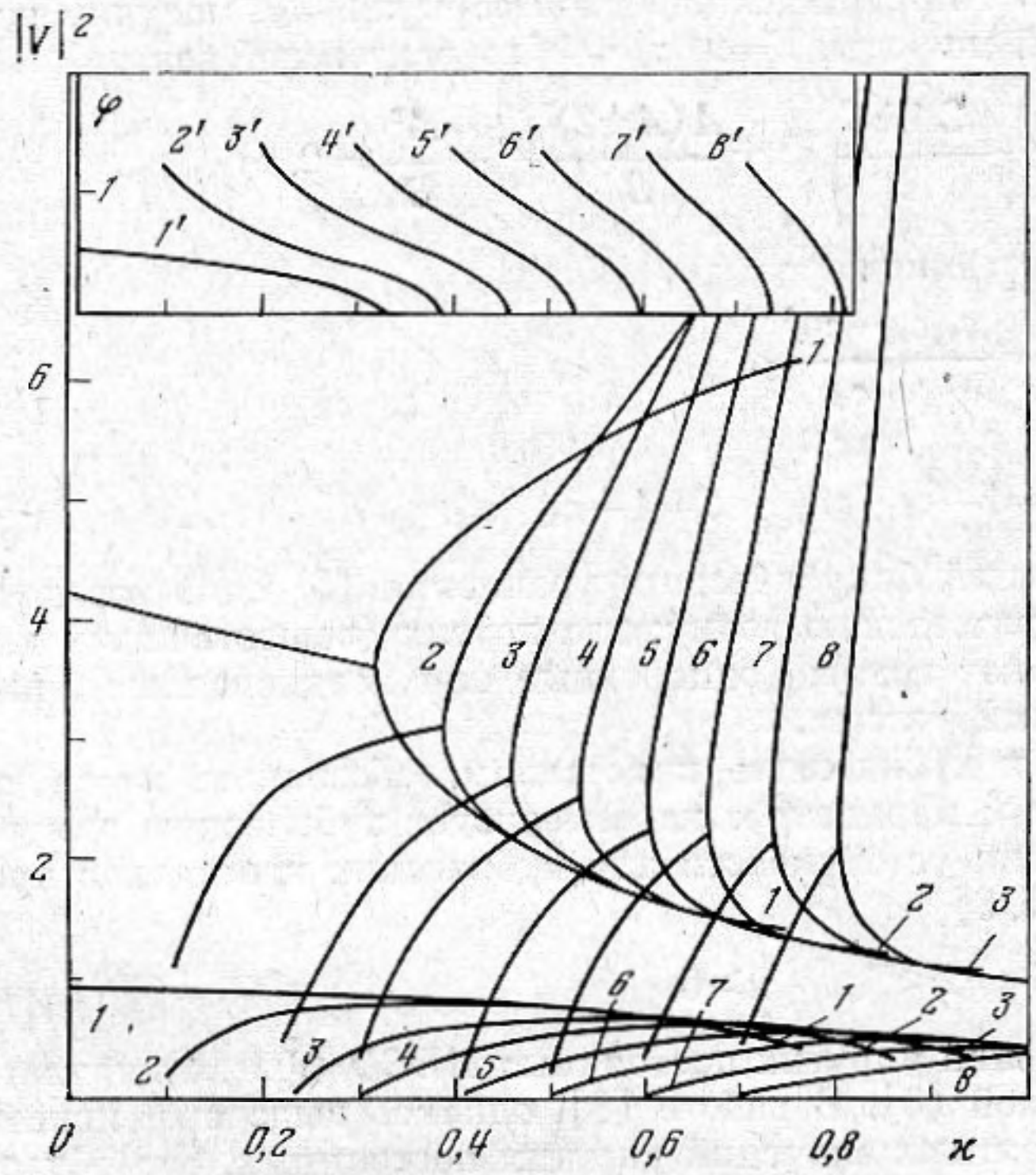
Рассмотрим случай, когда волна распространяется в плоскости (100) вдоль направления [010]; тогда

$$A=[-c^2+2c(1-2\varkappa)+4\varkappa(1-\varkappa)]/\varkappa,$$
$$B=1-\varkappa,\quad c=0. \tag{6}$$

Для этого случая зависимость корней уравнения (3) от $\varkappa$ для различных c представлена на фиг. 2, 3. Кривые $V^2(\varkappa, c)$, проходящие ниже прямой $V^2=1$, описывают рэлеевскую волну. Два других корня для $c<0{,}5$ при малых $\varkappa$ являются комплексно-сопряженными (на фиг. 2, 3 показаны зависимости от $\varkappa$ модуля и фазы). При некотором значении $\varkappa_0(c)$ они вырождаются ($V_1=V_2$), а при $\varkappa>\varkappa_0(c)$ становятся действительными. Для кристаллов, у которых $0{,}5<c<1{,}1$, таких значений параметра $\varkappa$ будет два. Например, при $c=0{,}6$ (см. фиг. 2) для $0<\varkappa<1{,}1$ и $0{,}41<\varkappa<0{,}45$ существуют два комплексно-сопряженных корня. В области $0{,}11<\varkappa<0{,}41$ все корни действительны.

Совокупность точек $\varkappa_0(c)$ образует линии, которые делят область $FBCE$ значений параметров c и $\varkappa$ [8] на подобласти. При $-2<c<0{,}5$ таких

подобластей две. Для одной из них, лежащей выше разделяющей их линии, падающие под брюстеровскими углами волны являются однородными, а ниже — неоднородными. При $0{,}5<c<1{,}1$ подобластей становится три, причем падающим однородным волнам соответствует центральная подобласть. Для $c>1{,}1$ эта подобласть исчезает, т. е. при любом $\varkappa$ падающие под брюстеровскими углами волны неоднородны. Для произвольно выбранных значений $\varkappa$ и c всегда существуют два различных брюстеровских угла.



Фиг. 3. Зависимость корней уравнения (3) от $\varkappa$ (случай *1*) при $c<0$: *1* – $c=0$; *2* – $c=-0{,}2$; *3* – $c=-0{,}4$; *4* – $c=-0{,}6$; *5* – $c=0{,}8$; *6* – $c=-1{,}0$. Цифры со штрихами относятся к фазе

На фиг. 1 представлены аналогичные кривые, построенные для других случаев выбора плоскости и направления распространения, указанных в подписи к фиг. 1. Эти случаи можно исследовать на основе соотношений (1) — (4). Отметим, что в случае *4* вся рассматриваемая область значений $\varkappa$ и c делится линией $\varkappa_0(c)$ только на две подобласти. В верхней (где все три корня вещественны) на линии $c=1-\varkappa$ коэффициент B в уравнении (3) обращается в нуль, а один из корней этого уравнения — в ∞, выше ее (для $c>1-\varkappa$) он становится отрицательным. Все четыре кривые, пересекающие ось $\varkappa$ ($c=0$), проходят через точку $\varkappa_0=0{,}321$, которая соответствует вырождению решений для случая изотропной среды.

Отметим, что для случая *1* при $c>0$ упругая кубическая анизотропия очень слабо влияет на относительную скорость рэлеевской волны (см. фиг. 2) и она оказывается близкой к относительной скорости рэлеевской волны в изотропной среде с тем же значением $\varkappa$. Если к тому же ограничиться областью наиболее вероятных значений c и $\varkappa$ [8], то при $\varkappa>0{,}3$ различие с рэлеевской волной в изотропной среде будет весьма небольшим. Например, при $\varkappa=0{,}3750$ для изотропной среды $V=0{,}9110$ и $0{,}9218$ для кристаллов с $c=0{,}2$. Для $\varkappa=0{,}25$ эти значения равны соответственно $0{,}9325$ и $0{,}9557$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lothe J., Barnett D. M.* On the existence of surface-wave solutions for anisotropic elastic half-spaces. J. Appl. Phys.. 1976, *47*, 2, 428–433.
2. *Barnett D. M., Lothe J.* Consideration of the existence of the surface wave (Rayleigh wave) solutions in anisotropic elastic crystals. J. Phys., 1974, *F4*, 5, 671–686.
3. *Любимов В. Н., Санников Д. Г.* О существовании поверхностных упругих волн для выделенных поверхностей и направлений в кристаллах. Кристаллография, 1979, *24*, 6, 1131–1134.
4. *Викторов И. А.* О волнах в изотропном твердом полупространстве. Акуст. ж., 1976, *22*, 5, 675–678.
5. *Любимов В. Н., Санников Д. Г.* К анализу корней дисперсионных уравнений задачи о поверхностных упругих волнах в анизотропных средах. Кристаллография, 1978, *23*, 2, 245–248.
6. *Фарнелл Дж.* Свойства упругих поверхностных волн. Физическая акустика (под ред. У. Мэзона, Р. Терстона). М., «Мир», 1973, т. *6*, 139–202.
7. *Федоров Ф. И.* Теория упругих волн в кристаллах. М., «Наука», 1965.
8. *Любимов В. Н.* Скорости волн деформации, коэффициенты Пуассона и возможная область значений модулей упругости кристаллов. Акуст. ж., 1977, *23*, 5, 823–825.

Научно-исследовательский
физико-химический институт
им. Л. Я. Карпова

Институт физики
Академии наук БССР

Поступила
26 июня 1979 г.