

АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXVI
1980
Вып. 3

АКАДЕМИЯ
НАУК
СССР

Май
Июнь

Основан в 1955 г.

МОСКВА

Выходит 6 раз в год

УДК 534.222

ОПТИМАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ЭФФЕКТИВНОЙ ГЕНЕРАЦИИ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ В АКУСТИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ СО СЛАБОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

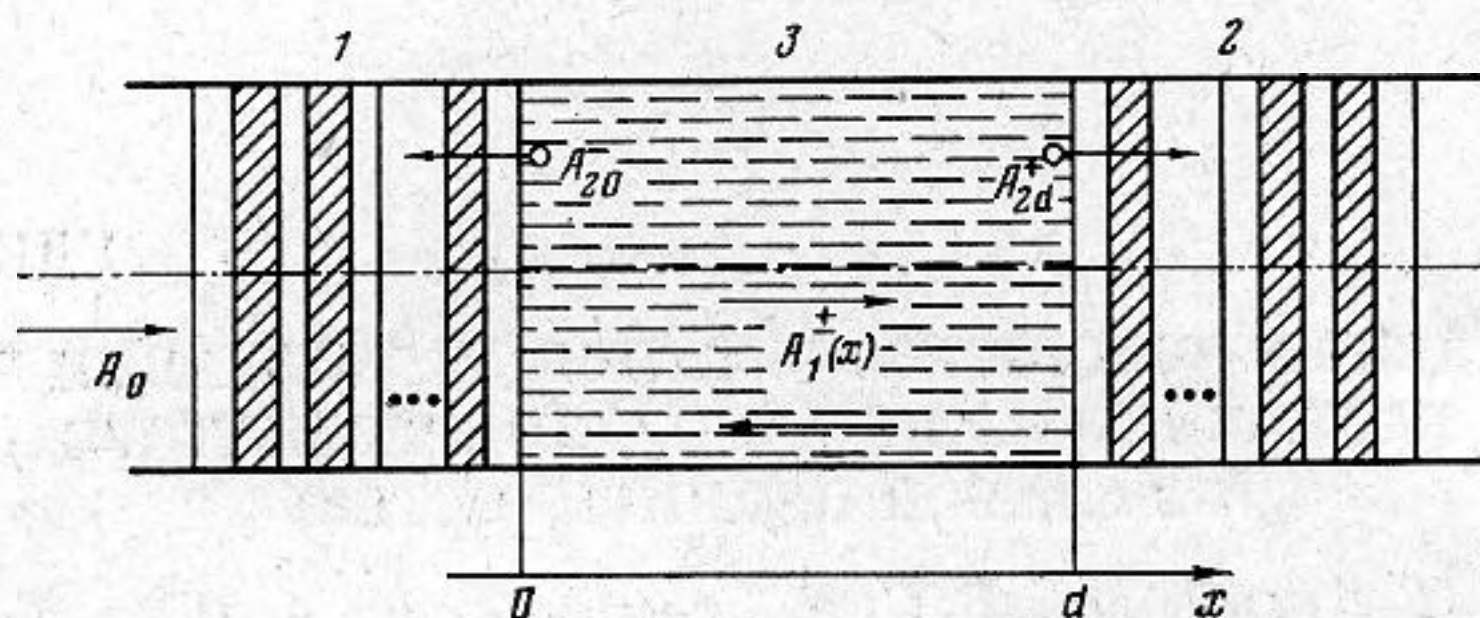
С. И. Ашитков, В. С. Колесников, Ю. А. Пирогов

В приближении заданной интенсивности волны накачки в резонаторном промежутке найдены оптимальные условия эффективной генерации второй гармоники в акустическом резонаторе со слабой нелинейностью. Определены основные характеристики такого резонатора и оптимальная интенсивность накачки на входе.

В настоящее время одним из наиболее перспективных направлений нелинейной акустики, связанных с решением ряда прикладных задач, является изучение процессов, происходящих в акустических резонаторах, и возможности их использования для повышения эффективности различных нелинейных волновых взаимодействий. Как известно, отсутствие частотной дисперсии в акустически однородной среде обуславливает одновременное взаимодействие большого числа гармонических составляющих и образование ударных волн [1–3]. В отсутствие избирательных свойств, позволяющих осуществлять интенсивный обмен энергией лишь между отдельными модами, это обстоятельство существенно ограничивает применение акустических резонаторов обычного типа, например, для осуществления нелинейного преобразования частоты и параметрического усиления сигнала [4, 5]. Весьма перспективным в этой связи считается использование сред с искусственной дисперсией, имеющей место, например, в периодически неоднородных средах с модулированными волновыми параметрами [6].

В данной работе рассматривается принципиальная возможность повышения эффективности акустических резонаторов типа Фабри — Перо и исследуется оптимальный режим их работы для генерации второй гармоники звуковой волны. Получение более высокого коэффициента преобразования на второй гармонике и подавление высших гармоник в резонаторе можно осуществить путем специального подбора дисперсионных характеристик его зеркал. Так, если при однократном прохождении нелинейного слоя в энергию второй гармоники перекачивается лишь малая часть энергии основной волны, накопленной в резонаторном промежутке, а сама волна на удвоенной частоте после прохождения резонатора выво-

дится из него, можно ожидать, что дальнейшей интенсивной перекачки энергии вверх по спектру происходить не будет. Именно таким образом можно ограничить число взаимодействующих мод, а при анализе нелинейных колебаний использовать известный метод медленно меняющихся амплитуд [2] в двухволновом приближении. При этом удастся получить физически наглядные результаты и на их основе проанализировать основные закономерности нелинейных процессов в таких системах. В работе показана возможность применения приближения заданной интенсивности [7] для анализа нелинейных взаимодействий в диссипативных недиспергирующих средах, т. е. при отсутствии рассогласования фаз взаимодействующих волн. Найдены условия оптимальной эффективности преобразо-



Фиг. 1. Акустический резонатор: 1 — зеркало 1, 2 — зеркало 2, 3 — нелинейный слой

вания частоты. Отметим, что подобная задача для оптических систем рассматривалась ранее в работе [8].

В основу анализа положим систему гидродинамических уравнений с учетом членов второго порядка малости, описывающую распространение плоских упругих волн в вязкой теплопроводящей среде [1]:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} (\rho' v), \\
 (1) \quad & \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + c_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial t} (\rho' v) - 2\rho_0 v \frac{\partial v}{\partial x} - \\
 & - \frac{\gamma-1}{\rho_0} \rho' \frac{\partial \rho'}{\partial x} + b \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},
 \end{aligned}$$

где ρ' и v — соответственно возмущенные значения плотности и скорости частиц среды; c_0 — скорость звука; γ — показатель адиабаты; b — коэффициент, характеризующий вязкость среды.

Рассмотрим акустический резонатор (фиг. 1), представляющий отрезок волноведущей линии, заполненный нелинейной средой и расположенный между двумя зеркалами, образованными, например, наборами слоев линейных материалов с различными волновыми параметрами. Звуковое поле во внутррезонаторном промежутке с точностью до членов второго порядка малости по числу Маха можно представить в виде суперпозиции невзаимодействующих волн, бегущих навстречу друг другу [9, 10]:

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & v_1(x, t) = 1/2 [A_1^+(x) e^{i(\omega t - k_1 x)} + A_1^-(x) e^{i(\omega t + k_1 x)}] + \text{к.с.}, \\
 & v_2(x, t) = 1/2 [A_2^+(x) e^{i(2\omega t - k_2 x)} + A_2^-(x) e^{i(2\omega t + k_2 x)}] + \text{к.с.}
 \end{aligned}$$

Это справедливо, как указывалось в [5], для почти периодических волн с достаточно высокой частотой колебаний. Считая амплитуды волн медленно меняющимися по длине нелинейного слоя функциями, аналогично выводу укороченных уравнений в [2] из (1), (2) можно получить систему дифференциальных уравнений для комплексных амплитуд волн пер-

вой и второй гармоники в диссипативной недиспергирующей нелинейной среде:

$$(3) \quad \frac{dA_1^\pm}{dx} = \pm i\sigma_1(A_1^\pm) \cdot A_2^\pm \mp \delta_1 A_1^\pm, \quad \frac{dA_2^\pm}{dx} = \pm i\sigma_2(A_1^\pm)^2 \mp \delta_2 A_2^\pm,$$

где $\varepsilon = (\gamma + 1)/2$; $\sigma_{1,2} = \varepsilon\omega/2c_0^2$ — нелинейный параметр; $\delta_1 = b\omega^2/2\rho_0 c_0^3$ и $\delta_2 = 2b\omega^2/\rho_0 c_0^3$ — коэффициенты затухания.

Амплитуды волн с различными частотами на границах нелинейного слоя связаны граничными условиями:

$$(4) \quad \begin{aligned} A_1^+(0) &= A_0 t_{10} + A_1^-(0) r_{10}; & A_1^-(d) &= A_1^+(d) r_1 e^{-2ik_1 d}; \\ A_2^+(0) &= A_2^-(0) r_{20}; & A_2^-(d) &= A_2^+(d) r_2 e^{-2ik_2 d}. \end{aligned}$$

Здесь r_1, r_2 и r_{10}, r_{20} — коэффициенты отражения для волн первой и второй гармоник соответственно от правого и левого зеркал; t_{10} — коэффициент пропускания зеркала 1 для волны с частотой ω .

Рассмотрим установившиеся колебания в резонаторе для случая сильноотражающего зеркала 2, т. е. для $|r_2| = 1$ (более общий случай принципиально не отличается от указанного и будет кратко обсужден ниже). При анализе (3) воспользуемся приближением заданной интенсивности волны накачки в резонаторном промежутке, т. е. положим, что [7]

$$(5) \quad A_1^\pm(x) = A_{10} e^{i\varphi_1^\pm(x)},$$

где $A_{10} = \text{const}$. Это приближение позволяет ввести в рассмотрение потери энергии основной волны на нелинейное преобразование и диссипацию, что необходимо учитывать при изучении стационарных колебаний в резонаторах. При этом система уравнений (3) приводится к виду

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 A_2^\pm}{dx^2} \pm (\delta_2 + 2\delta_1) \frac{dA_2^\pm}{dx} + (\Gamma_0^2 + 2\delta_1 \delta_2) A_2^\pm &= 0, \\ \frac{d}{dx} e^{2i\varphi_1^\pm(x)} &= \pm 2i\sigma_1 A_2^\pm \mp 2\delta_1 e^{2i\varphi_1^\pm(x)}, \end{aligned}$$

$$\left. \frac{dA_2^\pm}{dx} \right|_{x=0} = \pm i\sigma_2 A_{10}^2 e^{2i\varphi_{10}^\pm} \mp \delta_2 A_2^\pm \Big|_{x=0},$$

где

$$\Gamma_0^2 = 2\sigma_1 \sigma_2 A_{10}^2; \quad \varphi_{10}^\pm = \varphi_1^\pm(0).$$

Решение совместной системы уравнений (4) и (6) позволяет получить точные выражения для амплитуд волн второй гармоники и фазы основной волны внутри резонатора:

$$(7) \quad \begin{aligned} A_{20}^- = A_2^-(0) &= -i\sigma_2 A_{10}^2 \frac{\sin \Gamma d}{\Gamma} e^{i\varphi_0} \frac{e^{-i(\beta-\alpha)+\Delta d} + r_2 e^{i(\beta-\alpha)-\Delta d}}{B_1 e^{i\alpha+\Delta d} - r_2 r_{20} B_2 e^{-i(\alpha+\Delta d)}}, \\ A_{2d}^+ = A_2^+(d) &= -i\sigma_2 A_{10}^2 \frac{\sin \Gamma d}{\Gamma} e^{i\varphi_0} \frac{B_1 e^{i(\beta+\alpha)} + r_{20} B_2 e^{-i(\beta-\alpha)}}{B_1 e^{i\alpha+\Delta d} - r_2 r_{20} B_2 e^{-i(\alpha+\Delta d)}}, \\ \frac{\Gamma_0^2}{\Gamma^2} \sin^2 \Gamma d [r_{20} e^{-i(\beta-\varphi_{r_1})} + r_2 e^{i(\beta-\varphi_{r_1})}] &= \\ &= [r_2 r_{20} B_2^2 - e^{2(i\alpha+\Delta d)}] e^{-i(\beta+\varphi_{r_1})} + [B_1^2 - r_2 r_{20} e^{-2(i\alpha+\Delta d)}] e^{i(\beta+\varphi_{r_1})}. \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$B_1 = \cos \Gamma d + \frac{\Delta'}{\Gamma} \sin \Gamma d; \quad B_2 = \cos \Gamma d - \frac{\Delta'}{\Gamma} \sin \Gamma d; \quad \alpha = 2k_1 d;$$

$$\Gamma^2 = \Gamma_0^2 - \Delta'^2; \quad \Delta'^2 = \frac{\delta_2 - 2\delta_1}{2}, \quad \Delta = \frac{\delta_2 + 2\delta_1}{2}; \quad \beta = \varphi_{10}^+ - \varphi_{10}^-;$$

$$\varphi_0 = \varphi_{10}^+ + \varphi_{10}^-;$$

φ_{r_1} — фаза коэффициента отражения основной волны от зеркала 2.

Полученное решение значительно упрощается, когда нелинейные эффекты преобладают над диссипативными ($\sqrt{2}eRe > 1$) и существует малый параметр $\mu = (\Gamma_0 d)^2 \ll 1$, отражающий достаточную малость нелинейности системы и длины нелинейного слоя, которая много меньше расстояния образования ударных волн $d_{\text{разр}} = c_0^2 / \varepsilon \omega A_{10}$. Как указывалось выше, физически это означает, что при однократном прохождении основной волной резонаторного промежутка в энергию волны второй гармоники преобразуется лишь небольшая ее часть. При этом выражение для $e^{i\beta}$ принимает вид

$$(8) \quad e^{i\beta} \simeq e^{2\delta_1 d + i(\alpha - \varphi_{r_1})} (1 + \mu \cdot E),$$

где E — комплексная функция коэффициентов отражения и длины резонатора, определяющая обратное воздействие второй гармоники на фазу основной волны:

$$(9) \quad E = \frac{1}{2} \times e^{-2\Delta' d} \times \\ \times \frac{1 + |r_2| |r_{20}| e^{-4\delta_1 d - i(2\alpha - \varphi_{r_2} - \varphi_{r_{20}})} + |r_2| e^{-i(2\varphi_{r_1} - \varphi_{r_2})} + |r_{20}| e^{-4\delta_1 d - i(2\varphi_{r_{10}} - \varphi_{r_{20}})}}{1 - |r_2| |r_{20}| e^{-2\delta_2 d - i(2\alpha - \varphi_{r_2} - \varphi_{r_{20}})}}$$

Используя первое из граничных условий (4), для амплитуды поля основной волны в резонаторном промежутке нетрудно получить

$$(10) \quad A_{10}^2 = \frac{A_0^2 |t_{10}|^2}{|e^{2\delta_1 d + i(\alpha - \varphi_{r_1} - \varphi_{r_{10}})} (1 + \mu e^{-2\Delta' d} E) - |r_{10}||^2},$$

откуда следует, что A_{10} достигает максимального значения при выполнении следующего условия [11]:

$$\alpha - \varphi_{r_1} - \varphi_{r_{10}} = 0 \pmod{2\pi}.$$

Далее, не ограничивая общности рассмотрения (в более общем виде оно требует более полного анализа выражения (9)), положим в (9), (10) $\varphi_{r_1} = \varphi_{r_{10}} = 0$ и $\varphi_{r_2} = \varphi_{r_{20}} = 0$. Коэффициенты преобразования удвоителя на прохождение η^+ и на отражение η^- от резонатора определим следующим образом:

$$(11) \quad \eta^+ = \frac{I_2^+}{I_0} = \frac{|A_{2d}^+|^2}{A_0^2} (1 - |r_2|^2); \quad \eta^- = \frac{I_2^-}{I_0} = \frac{|A_{20}^-|^2}{A_0^2} (1 - |r_{20}|^2),$$

где I_2^+ и I_2^- — интенсивности волн второй гармоники на выходе из резонатора, распространяющихся в прямом и обратном по отношению к волне I_0 направлениях. Подставляя (7), (10) в (11), с точностью до слагаемых порядка малости μ легко получить выражения для коэффициентов преобразования:

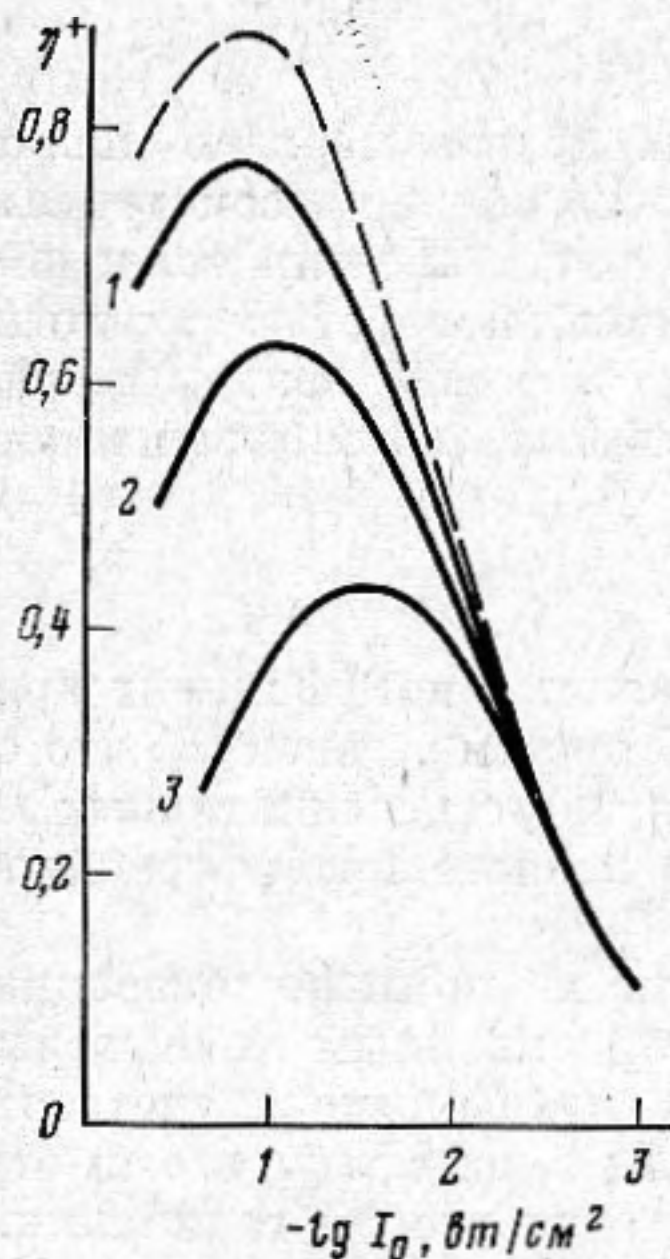
$$(12) \quad \eta^+ = \frac{(1 + |r_{10}|) \xi_0 (1 - |r_2|) (1 + |r_{20}|)}{(1 + \xi_0 + \xi_1)^2 (1 - |r_2| |r_{20}|)}, \\ \eta^- = \frac{1 + |r_{10}| \xi_0 (1 - |r_{20}|) (1 + |r_2|)}{(1 + \xi_0 + \xi_1)^2 (1 - |r_2| |r_{20}|)},$$

$$\text{где} \quad \xi_0 = \mu \frac{e^{2\delta_1 d} E}{1 - |r_{10}|}; \quad \xi_1 = \frac{e^{2\delta_1 d} - 1}{1 - |r_{10}|}.$$

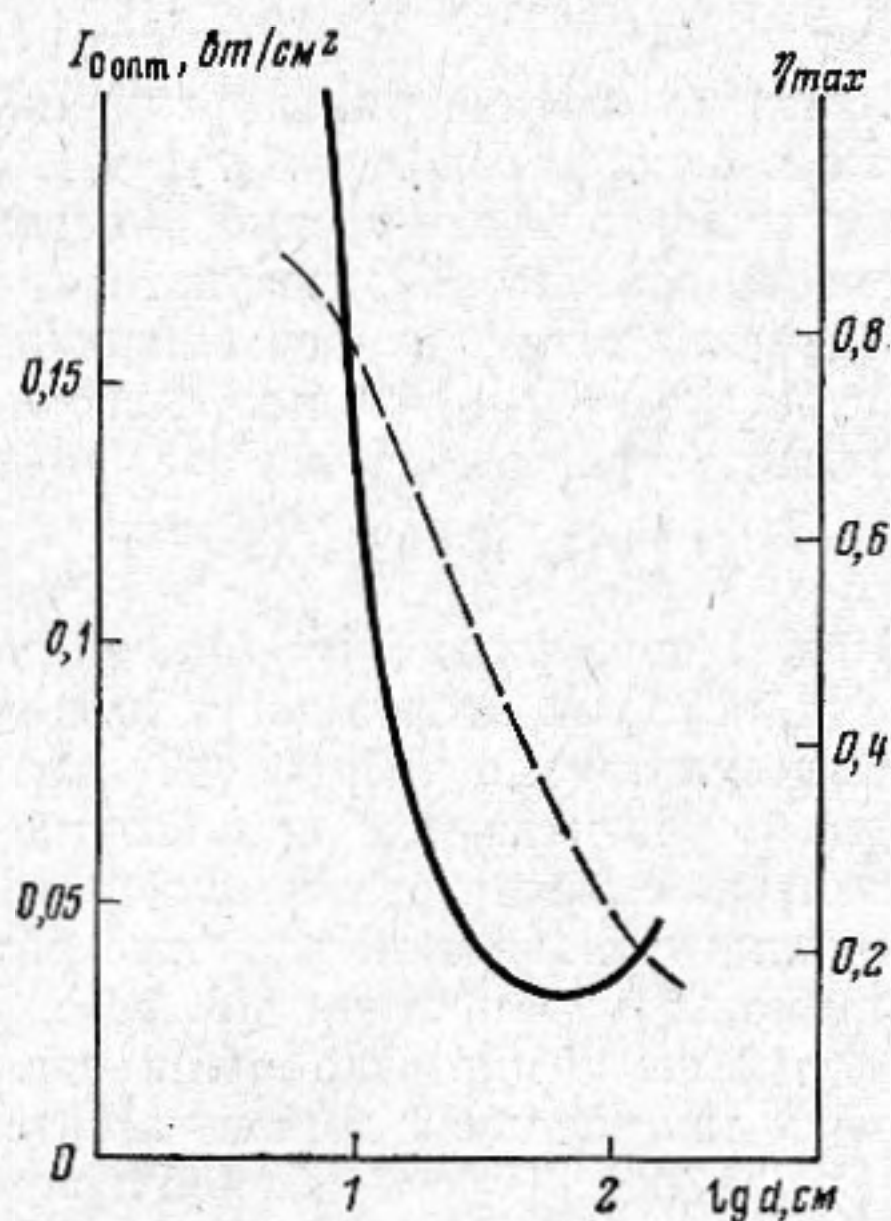
Как следует из (12), коэффициент преобразования достигает некоторого максимального значения (фиг. 2) при выполнении условия $\xi_0 = 1 + \xi_1$, являющегося, очевидно, условием оптимальной эффективности генерации второй гармоники и определяющего оптимальную в зависимости от характеристик зеркал и длины резонатора интенсивность волны накачки на входе:

$$(13) \quad I_{0\text{ опт}} = \frac{(1 - |r_{10}|)^2 \rho_0 c_0 (1 + \xi_1)^2}{1 + |r_{10}| \sigma_1 \sigma_2 d^2 E}$$

Из фиг. 3 видно, что при малых длинах нелинейного взаимодействия требуется значительная интенсивность накачки для достижения максимального преобразования. Увеличение длины резонатора сопровождается по-



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Зависимость коэффициента преобразования от интенсивности накачки на входе резонатора без учета поглощения при длине резонатора $d=12$ см (штриховая линия) и с учетом поглощения при различных длинах резонатора: 1 — $d=12$ см, 2 — $d=20$ см, 3 — $d=40$ см. Коэффициенты отражения зеркал: $|r_{10}|=0,98$; $|r_1|=1$; $|r_{20}|=0,9$; $|r_2|=0,1$

Фиг. 3. Зависимость оптимальной интенсивности накачки на входе резонатора (сплошная линия) и максимального коэффициента преобразования (штриховая линия) от длины резонатора при значениях коэффициентов отражения: $|r_{10}|=0,98$; $|r_1|=1$; $|r_{20}|=0,9$; $|r_2|=0,1$

нижением уровня оптимальной мощности накачки, однако при достаточно больших длинах взаимодействия начинают преобладать диссипативные потери, а также нелинейное затухание вследствие образования ударных волн, что неизбежно приводит к росту мощности накачки на входе и снижению коэффициента преобразования. Характер поведения $I_{0\text{ опт}}$ на больших длинах взаимодействия $d \geq d_{\text{разр}}$ формула (13) описывает лишь качественно, так как разложение по параметру μ перестает быть правомерным, а также становится необходим учет возбуждаемых высших гармонических составляющих.

Характеристики зеркал резонатора определяют степень обратной связи волн. Рассмотрим некоторые частные случаи.

Пусть резонатор симметричен относительно волны второй гармоники ($|r_2|=|r_{20}|$). Считая для простоты, что диссипативные потери пренебре-

жимо малы ($\xi_1 \ll \xi_0$), получим, что коэффициенты преобразования оказываются равными:

$$\eta^+ = \eta^- = 2\xi_0 / (1 + \xi_0)^2$$

и достигают максимального значения $1/2$ при выполнении резонансного условия $\xi_0 = 1$.

Пусть теперь резонатор несимметричен относительно волны второй гармоники. В этом случае энергия волны гармоники выводится либо через зеркало 1 ($|r_{20}| \neq 1$, $|r_2| = 1$), либо через зеркало 2 ($|r_{20}| = 1$, $|r_2| \neq 1$). Аналогично первому примеру здесь легко показать, что максимально возможный коэффициент преобразования удвоителя в обоих случаях при выполнении условия $\xi_0 = 1$ близок к единице:

$$\eta^+ = \eta^- = 4\xi_0 / (1 + \xi_0)^2.$$

Выше мы рассматривали случаи, когда правое зеркало полностью отражает основную волну ($|r_1| = 1$). При более общем рассмотрении следует учитывать прохождение определенной части энергии основной волны сквозь резонатор. В результате выкладок, полностью аналогичных проведенным ранее, для симметричного по основной волне резонатора (т. е. для $|r_1| = |r_{10}|$) можно легко получить выражение для полного коэффициента преобразования η :

$$\eta = \eta^+ + \eta^- = 2\xi_0 / (1 + \xi_0)^2.$$

Отсюда ясно видно, что максимальный полный коэффициент преобразования, которого можно достигнуть в такой системе, равен $1/2$, что совпадает с результатами работы [12] для случая чисто диссипативных потерь энергии в резонаторном промежутке многослойного интерференционного поглотителя с симметричными зеркалами.

Проиллюстрируем полученные результаты на примере генерации второй гармоники в акустическом резонаторе с нелинейным слоем воды длиной $d = 12$ см и многослойными зеркалами, являющимися «четвертьволновыми» для основной волны частотой 1 МГц с коэффициентами отражения $|r_{10}| = 0,98$, $|r_1| = 1$ и «полуволновыми» для второй гармоники. Расчет показывает, что коэффициент преобразования такой системы достигает максимальной величины $\eta \approx 0,8$ при значениях числа Рейнольдса $Re = \rho_0 c_0 A_{10} |b\omega| = 10$ и акустического числа Маха $M \sim 10^{-4}$. При этом малый параметр в разложении (8) имеет порядок $\mu \sim 10^{-2}$, а длина нелинейного взаимодействия является достаточно малой $d \approx 0,2 d_{\text{разр}}$ по сравнению с длиной образования разрыва.

В заключение необходимо отметить, что дифракционные потери, а также пространственная ограниченность фронта волны снижают эффективность преобразования [13]. Учет этих эффектов усложняет задачу, однако и в этом случае следует ожидать наличия оптимальных условий преобразования.

Авторы благодарят В. А. Красильникова, А. П. Сухорукова и О. В. Руденко за полезные обсуждения и интерес, проявленный к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику. М., «Наука», 1966.
2. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М., «Наука», 1975.
3. Новиков Б. К., Руденко О. В. О вырожденном параметрическом усилении звука. Акуст. ж., 1976, 23, 3, 461–472.
4. Островский Л. А. О разрывных колебаниях в акустических резонаторах. Акуст. ж., 1974, 20, 1, 140–142.
5. Канер В. В., Руденко О. В., Хохлов Р. В. К теории нелинейных колебаний в акустических резонаторах. Акуст. ж., 1977, 23, 5, 756–765.

6. Ланина Э. П., Руденко О. В., Шмальгаузен В. И. Акустические взаимодействия в средах со слабыми периодическими неоднородностями. Акуст. ж., 1978, 24, 4, 556-561.
7. Тагиев З. А., Чиркин А. С. Приближение заданной интенсивности в теории нелинейных волн. Ж. эксп. и теор. физ., 1977, 73, 4, 1271-1282.
8. Колесников В. С., Пирогов Ю. А. Оптимальные условия эффективной генерации второй гармоники в тонкослойном внешнем резонаторе. Письма в ж. техн. физ., 1978, 4, 6, 321-325.
9. Temkin S. Propagating and standing sawtooth waves. J. Acoust. Soc. America, 1969, 45, 1, 224-227.
10. Mortell M. P., Seymour B. R. The evolution of a self-sustained oscillation in a non-linear continuous system. Trans. ASME, 1973, E40, 1, 53-60.
11. Зарембо Л. К. К вопросу о вынужденных колебаниях конечной амплитуды в трубке. Акуст. ж., 1967, 13, 2, 298-300.
12. Козарь А. В., Колесников В. С., Пирогов Ю. А. О применении метода импедансных характеристик для анализа распространения волн в многослойных структурах с поглощением. Вестник Моск. ун-та, Сер. физика, астрономия, 1978, 19, 2, 76-83.
13. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Чиркин А. С. Об апертурных ограничениях эффективности оптических удвоителей частоты. Изв. вузов. Радиофизика, 1967, 10, 12, 1639-1655.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
физический факультет

Поступила
2 июля 1979 г.