

УДК 534.2-16

ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, ВЫЗВАННЫЕ ПОПЕРЕЧНЫМ УДАРОМ

В. М. Болгов, А. С. Никифоров

Получены выражения для усилия, действующего на пластину при ударе, а также уровней вибраций пластины в точке удара с учетом отскока ударяющего тела от пластины. Выполнен анализ временных и спектральных характеристик удара и получено соотношение для затрат энергии на создание изгибных колебаний пластины и на отскок тела от пластины.

Известно [1], что поперечный удар жесткого тела по упругой конструкции, например с помощью маячкового вибратора возбуждает изгибные колебания с достаточно широким спектром частот. Вместе с тем часть суммарной энергии удара затрачивается при отскоке тела от конструкции. В данной работе рассматривается влияние этой затраты энергии на спектр возбуждаемых вибраций. Для решения задачи использован метод, примененный в работах [2, 3] для случая возбуждения вибраций ударом в ограниченных стержнях и пластинах. Однако в отличие от [2, 3] в настоящей работе сделано предположение, что удар по пластине относительно слабый, и поэтому смещение поверхности пластины в точке удара и сила удара связаны линейно. С учетом этого предположения для бесконечной пластины удастся получить представляющие интерес параметры колебаний в виде достаточно простых математических выражений, что позволяет проанализировать физическую сущность явления.

Пусть пластина расположена в плоскости XOY и со стороны полуплоскости $z \geq 0$ по ней в точке с координатами $x=y=0$ ударяет жесткое тело.

Запишем уравнение изгибных колебаний пластины

$$(1) \quad B \nabla^4 \zeta_{\text{н}} + m \ddot{\zeta}_{\text{н}} = f(x, y, t),$$

уравнение для смещения поверхности пластины в точке удара из-за деформации ее материала

$$(2) \quad \zeta_{\text{д}} = K_1 f(t),$$

и уравнение сохранения количества движения для ударяющего тела

$$(3) \quad M \dot{\zeta}_0 - M \dot{\zeta} = \int_0^t f(t) dt,$$

которые связаны при $x=y=z=0$ условием

$$(4) \quad \zeta = \zeta_{\text{н}} + \zeta_{\text{д}}$$

и начальными условиями

$$(5) \quad \zeta_{\text{н}} = \dot{\zeta}_{\text{н}} = 0 \quad \text{при } t=0.$$

Здесь ξ_n , B , m — изгибные смещения, цилиндрическая жесткость и удельная масса пластины; ξ_d , K_1 — смещение поверхности из-за деформирования и податливость материала пластины в точке удара; ξ , M — смещение и масса ударяющего тела; f — усилие, действующее со стороны тела на пластину, t — текущее время; ξ_0 — начальная скорость тела; точка над функцией означает дифференцирование по времени.

Представив значения ξ_n и f в виде интегралов Фурье по волновым числам λ и ν и выразив усилие f в виде δ -функции

$$(6) \quad f(x, y, t) = f(t) \delta(x) \delta(y),$$

получим решение уравнения (1) в виде

$$(7) \quad \xi_n = \frac{8}{(2\pi)^2} \frac{1}{Z_{пл}} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x} e^{i\nu y}}{(\lambda^2 + \nu^2)} \int_0^t f(\eta) \sin \frac{Z_{пл}(\lambda^2 + \nu^2)(t - \eta)}{8m} d\eta d\lambda d\nu,$$

где $Z_{пл} = 8\sqrt{Bm}$ — механическое сопротивление пластины в точке действия усилия $f(t)$.

Взяв двойной интеграл в (7), из контактного условия (4) с учетом (2) и (3), получим интегральное уравнение

$$(8) \quad \xi_0 t - \frac{1}{M} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} f(\eta) d\eta = K_1 f(t) + \frac{1}{Z_{пл}} \int_0^t f(\eta) d\eta.$$

Продифференцируем (8) дважды по времени

$$(9) \quad \ddot{f}(t) + \frac{1}{K_1 Z_{пл}} \dot{f}(t) + \frac{1}{MK_1} f(t) = 0$$

и обозначим

$$2h = \frac{1}{K_1 Z_{пл}}, \quad K^2 = \frac{1}{MK_1}, \quad \omega_1^2 = K^2 - h^2.$$

Решив уравнение (9), определим усилие, действующее на пластину при ударе тела

$$(10) \quad f(t) = e^{-ht} (A \cos \omega_1 t + C \sin \omega_1 t),$$

при условии

$$(11) \quad K^2 > h^2 \text{ или } M/4Z_{пл}K_1 < 1,$$

что наиболее интересно практически.

Из начальных условий (5) вытекает, что $A=0$, и, следовательно,

$$(12) \quad f(t) = C e^{-ht} \sin \omega_1 t.$$

Нас будет интересовать взаимодействие падающего тела и пластины только до первого отскока. Обозначим момент времени, когда тело отскакивает от пластины $t = \tau$. В этот момент $\omega_1 t = \omega_1 \tau = \pi$, и, следовательно,

$$(13) \quad \tau = \pi / \omega_1 \approx \pi \sqrt{MK_1} (1 + M/8K_1 Z_{пл}^2)$$

или с учетом условия (11)

$$(14) \quad \tau \approx \pi \sqrt{MK_1}.$$

Таким образом, практически время действия усилия τ определяется массой падающего тела и податливостью материала пластины. Определив постоянную $C = \xi_0 \tau / K_1 \pi$ из (12) и (8) при $t = \tau$, получим окончательное выражение для усилия, действующего на пластину при ударе в точке

удара:

$$(15) \quad f(t) = \frac{\zeta_0 \tau}{K_1 \pi} e^{-ht} \sin\left(\frac{\pi}{\tau} t\right).$$

Из (15) видно, что изменение усилия $f(t)$ со временем соответствует синусоиде, причем с увеличением t синусоидальная форма искажается за счет экспоненты, которая характеризует необратимые потери энергии падающего тела, обусловленные возбуждением изгибных колебаний пластины.

Смещение поверхности пластины в точке удара, обусловленное деформацией материала пластины при ударе, определим из (2) и (15) в виде

$$(16) \quad \zeta_d = \frac{\zeta_0 \tau}{\pi} e^{-ht} \sin\left(\frac{\pi}{\tau} t\right)$$

Сравнение выражений (15) и (16) показывает, что смещение пластины в точке удара из-за ее деформирования и действующее на нее усилие изменяются по одинаковому закону.

Смещение в точке удара, связанное с изгибом, получим из (8) и (15) в виде

$$(17) \quad \begin{aligned} \zeta_{\text{н0}} &= \frac{\zeta_0 \tau}{\pi K_1 Z_{\text{пл}}} \int_0^t e^{-ht} \sin\left(\frac{\pi}{\tau} t\right) dt = \\ &= \frac{\zeta_0 \tau^3}{\pi K_1 Z_{\text{пл}}} \left\{ \frac{\pi}{\tau} - e^{-ht} \left[h \sin\left(\frac{\pi}{\tau} t\right) + \frac{\pi}{\tau} \cos\left(\frac{\pi}{\tau} t\right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Из (17) видно, что закон изменения смещений при изгибных колебаниях сложнее, чем закон для смещений, обусловленных деформированием пластины при ударе. В частности, при $t = \tau$, т. е. в момент отскока тела от пластины $\zeta_d = 0$, в то время как $\zeta_{\text{н0}} \neq 0$ и достигает максимальной величины. С увеличением t величина $\zeta_{\text{н0}} \rightarrow 0$ при $t \approx 3\tau$.

Определим сопротивление пластины в точке удара. Спектр усилия имеет вид

$$(18) \quad f(\omega) = C \int_0^{\tau} e^{-ht} \sin\left(\frac{\pi}{\tau} t\right) e^{-i\omega t} dt = C \frac{\pi}{\tau} \frac{1 + \exp[-(h+i\omega)\tau]}{(h+i\omega)^2 + (\pi/\tau)^2}.$$

Спектр скорости движения поверхности пластины из-за деформирования при ударе выражается в виде

$$(19) \quad \begin{aligned} \zeta_d(\omega) &= CK_1 \int_0^{\tau} e^{-ht} \left[\frac{\pi}{\tau} \cos\left(\frac{\pi}{\tau} t\right) - h \sin\left(\frac{\pi}{\tau} t\right) \right] e^{-i\omega t} dt = \\ &= CK_1 i\omega \frac{\pi}{\tau} \frac{1 + \exp[-(h+i\omega)\tau]}{(h+i\omega)^2 + (\pi/\tau)^2} \end{aligned}$$

а спектр скорости при изгибных колебаниях — в виде

$$(20) \quad \begin{aligned} \zeta_{\text{н0}}(\omega) &= \frac{C}{Z_{\text{пл}}} \int_0^{\tau} e^{-ht} \sin\left(\frac{\pi}{\tau} t\right) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{C}{Z_{\text{пл}}} \frac{\pi}{\tau} \frac{1 + \exp[-(h+i\omega)\tau]}{(h+i\omega)^2 + (\pi/\tau)^2}. \end{aligned}$$

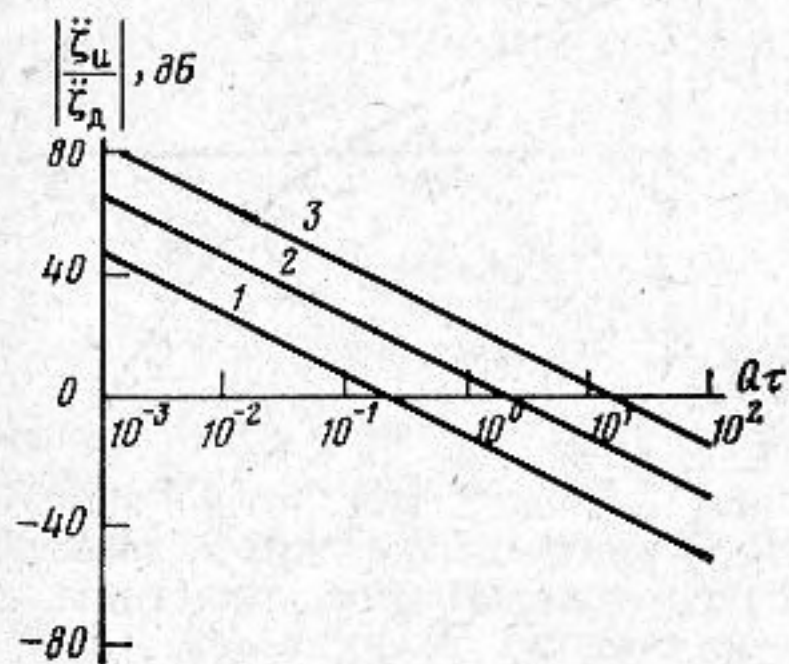
Из (18) и (19) получим сопротивление пластины по отношению к смещению ее поверхности из-за деформирования при ударе:

$$(21) \quad Z_d = f(\omega) / \zeta_d = 1 / iK_1 \omega.$$

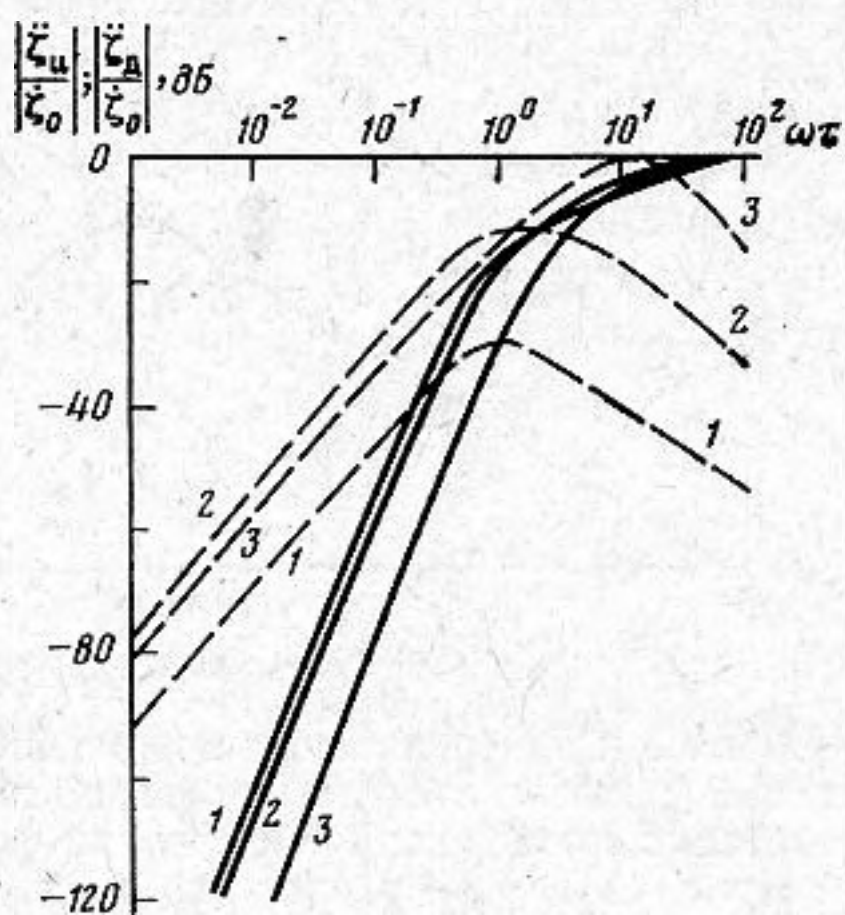
Из (18) и (20) получим сопротивление пластины по отношению к изгибу:

$$(22) \quad Z_{\text{н0}} = f(\omega) / \zeta_{\text{н0}}(\omega) = Z_{\text{пл.}}$$

Из формул (21) и (22) следует, что сопротивление пластины по отношению к изгибу имеет активный характер, а по отношению к смещению поверхности из-за деформирования — упругий. Физически это означает, что часть энергии ударяющего тела, которая идет на создание изгибных колебаний, безвозвратно уходит от места возбуждения, а энергия, затра-



Фиг. 1. Зависимость отношения спектральных уровней вибраций пластины в точке удара от частоты: 1 — $h\tau=0,1$; 2 — 1; 3 — 10



Фиг. 2. Зависимость спектральных уровней вибраций пластины в точке удара от частоты. Сплошные линии — вибрации поверхности, обусловленные деформированием при ударе, штриховые — колебания изгиба: 1 — $h\tau=0,1$; 2 — 1; 3 — 10

чиваемая на деформирование пластины, передается обратно телу, тем самым вызывая его отскок от пластины.

Рассмотрим спектр вибраций (ускорений) пластины в точке удара.

Из (19) и (20) определим

$$(23) \quad \ddot{\zeta}_d = \zeta_0 (\omega\tau)^2 \frac{1 + e^{-h\tau} e^{-i\omega\tau}}{(h\tau + i\omega\tau)^2 + \pi^2},$$

$$(24) \quad \ddot{\zeta}_{\text{н0}} = 2\zeta_0 (h\tau) (\omega\tau) \frac{1 + e^{-h\tau} e^{-i\omega\tau}}{(h\tau + i\omega\tau)^2 + \pi^2}.$$

Из (23) и (24) легко получить отношение ускорений в точке удара, обусловленных изгибом и деформированием:

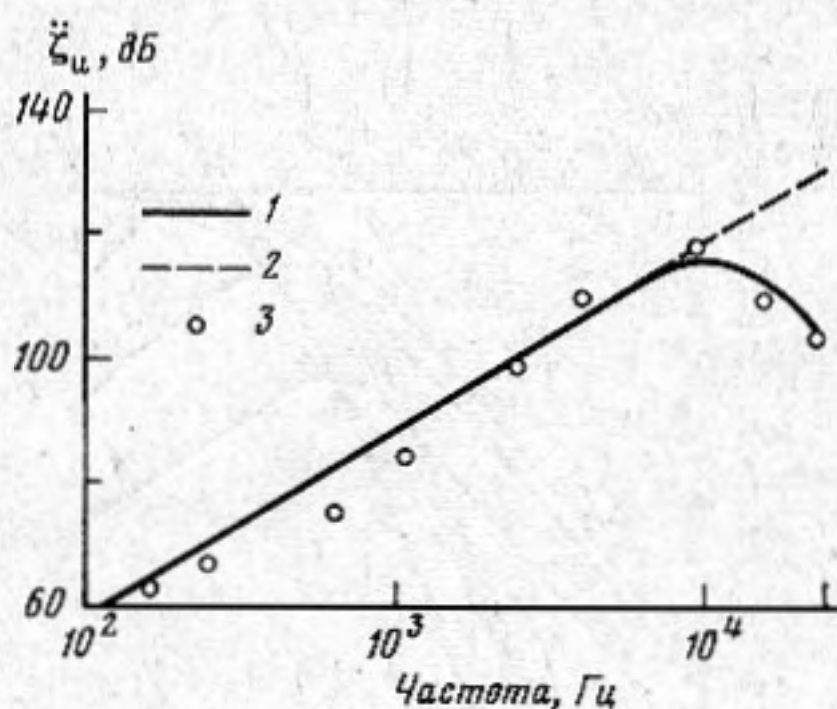
$$(25) \quad \frac{\ddot{\zeta}_{\text{н0}}}{\ddot{\zeta}_d} = 2 \frac{h\tau}{\omega\tau} = \frac{1}{\omega K_1 Z_{\text{пл}}} = \frac{iZ_d}{Z_{\text{пл}}};$$

это отношение проиллюстрировано на фиг. 1. Видно, что соотношение между спектральными уровнями вибраций, связанных с изгибом и деформированием, зависит от произведения трех величин — частоты, сопротивления пластины изгибу и смещению поверхности пластины при ее деформировании.

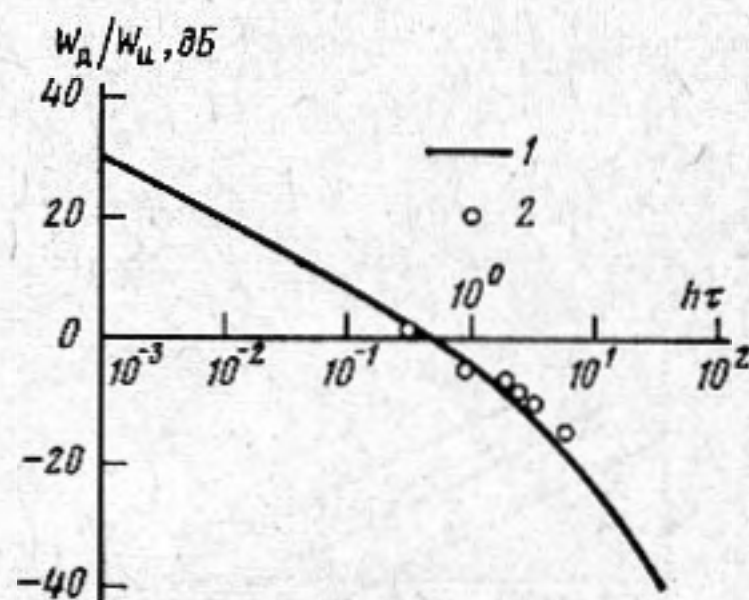
На фиг. 2 показаны безразмерные спектральные уровни вибраций в зависимости от частоты и параметров пластины. Из фиг. 2 видно, что уровень вибраций, обусловленных деформированием пластины, на низких частотах мал, а с возрастанием частоты резко увеличивается. Уровень изгиб-

ных колебаний на низких частотах превышает уровень вибраций, обусловленных деформированием, а затем достигает максимума и падает с увеличением частоты. Это падение обусловлено оттоком энергии, необходимой для создания связанных с деформированием пластины смещений ее поверхности в высокочастотной области спектра.

На фиг. 3 показан спектр ускорений (в децибелах относительно $3 \cdot 10^{-4}$ м/с² в полосе частот $1/3$ октавы) для длинной стальной полосы толщиной 20 мм в точке удара при падении на нее жесткого шара с массой



Фиг. 3. Спектральные уровни вибраций полосы в точке удара по ней стальным шаром: 1 — расчет по формуле (24), 2 — расчет по формуле (26), 3 — эксперимент



Фиг. 4. Зависимость отношения колебательных энергий в точке удара от параметров пластины: 1 — расчет по формуле (29); 2 — эксперимент

30 г и скоростью $\xi_0 = 4,4$ м/с; спектр определен по формуле (24). Там же приведен для сравнения спектр такого же удара, но без учета отскока шара, вычисленный по формуле (24) при условии $h\tau \ll 1$ и $\omega\tau \ll 1$, т. е. в конечном счете по формуле

$$(26) \quad \ddot{\xi}_{\text{н0}} \approx \xi_0 \omega M / Z_{\text{пл.}}$$

Экспериментальные результаты для указанных параметров пластины и ударяющего тела приведены на той же фигуре. Сравнение расчетных кривых показывает, что влияние отскока сказывается лишь на высоких частотах. На фиг. 3 видно также, что экспериментальные данные хорошо согласуются с вычислениями, учитывающими отскок тела.

Рассмотрим распределение суммарной энергии W ударяющего тела между изгибными колебаниями и деформированием пластины. За время активного действия силы, т. е. за время $t = \tau/2$, определим величину W по формуле

$$(27) \quad W = \int_0^{\tau/2} \xi(t) f(t) dt.$$

Тогда с учетом (26), (15)–(17) путем несложных вычислений получим для энергии, затрачиваемой на деформирование пластины, выражение

$$(28) \quad W_{\text{д}} = \frac{C^2 K_1}{2} e^{-h\tau},$$

а для энергии изгиба

$$(29) \quad W_{\text{и}} = \frac{C^2}{4K^2 h Z_{\text{пл}}} \left[\left(\frac{\pi}{\tau} \right)^2 - e^{-h\tau} (K^2 + h^2) \right].$$

Из (28) и (29) определим искомое отношение энергий

$$(30) \quad \frac{W_d}{W_n} = \frac{e^{-h\tau}}{1 - [1 + (h\tau/\pi)^2] e^{-h\tau}}$$

На фиг. 4 представлено соотношение (30) в зависимости от параметров пластины и времени удара τ . Видно, что при относительно малой массе ударяющего тела, при большом сопротивлении изгибу и большой податливости материала пластины большая часть энергии удара затрачивается на отскок тела от пластины. При увеличении массы тела и соответственно уменьшении сопротивления изгибу и податливости пластины, энергия, затрачиваемая на отскок тела от пластины, уменьшается.

Соотношение (30) было проверено экспериментально. С этой целью на стальную пластину толщиной 8 мм, задемпфированную по кромкам, с одинаковой высоты H падали в одну точку стальные шарики различного диаметра: 3, 6, 10, 12, 15 и 20 мм. Искомое отношение энергий определялось по формуле

$$(31) \quad \frac{W_d}{W_n} = \frac{H_{\text{отск}}}{H - H_{\text{отск}}},$$

где $H_{\text{отск}}$ — высота, на которую отскакивал шарик от пластины.

Результаты эксперимента показаны на фиг. 4. Податливость материала пластины K_1 при ударе по ней шариком определялась в формулах (24) и (30) с учетом данных работы [4]. При этом в случае малых смещений поверхности пластины $\frac{R}{\xi_d} < 10$ и принятой нами линейной зависимости

(2) для податливости пластины K_1 было получено теоретически приближенное выражение

$$(32) \quad K_1 \approx 3(1 - \sigma^2)/ER,$$

где R — радиус шарика, E , σ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластины соответственно. Как видно из фиг. 4, результаты расчетов по формуле (30) и экспериментальные данные достаточно хорошо согласуются друг с другом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Клюкин И. И. Борьба с шумом и звуковой вибрацией на судах. Л., «Судостроение», 1971.
2. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М., «Наука», 1967.
3. Филиппов А. П. Колебания механических систем. Киев, «Наукова думка», 1965.
4. Гольдсмит В. Удар. М., Изд-во литературы по строительству, 1965.

Поступила
30 июля 1979 г.