

УДК 534.231.3

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СХЕМЫ ТВЕРДЫХ И ЖИДКИХ СФЕРИЧЕСКИХ СЛОЕВ

М. Е. Вассергисер, А. Г. Дорош

Рассмотрен вывод эквивалентных электромеханических и электроакустических схем для твердых и жидких слоев сферической формы. Приведены формулы для расчета параметров эквивалентных схем на произвольной частоте и в области низких частот, в том числе для тонких слоев.

В ряде технических задач акустики требуется оценка свойств различных твердых и жидких слоев, плоских, цилиндрических или сферических. Обычные способы расчета многослойных структур требуют знания свойств предыдущих слоев для расчета последующих [1, 2], что не всегда удобно. Применение эквивалентных электромеханических схем позволяет рассматривать свойства каждого слоя независимо от остальных.

Рассмотрим эквивалентные схемы для сферического слоя, способ их построения и особенности на различных частотах. Сферический слой представим как механический четырехполюсник. В качестве интенсивных и экстенсивных переменных выберем силы и колебательные скорости соответственно. Колебания будем считать гармоническими и радиально-симметричными. Тогда уравнение движения и закон Гука можно записать в виде [3]

$$(1) \quad \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{2T_{rr} - T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi}}{r} = -\rho\omega^2 u,$$

$$(2) \quad \begin{cases} T_{rr} = \frac{E}{(1-2\sigma)(1+\sigma)} \left[(1-\sigma) \frac{\partial u}{\partial r} + 2\sigma \frac{u}{r} \right], \\ T_{\theta\theta} = T_{\varphi\varphi} = \frac{E}{(1-2\sigma)(1+\sigma)} \left[\sigma \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right], \end{cases}$$

где T_{rr} , $T_{\theta\theta}$, $T_{\varphi\varphi}$ — компоненты тензора механических напряжений, ρ — плотность материала, u — радиальное смещение, ω — круговая частота, E — модуль Юнга, σ — коэффициент Пуассона, r — радиус-вектор.

Условия на поверхностях (граничные условия) запишем в виде

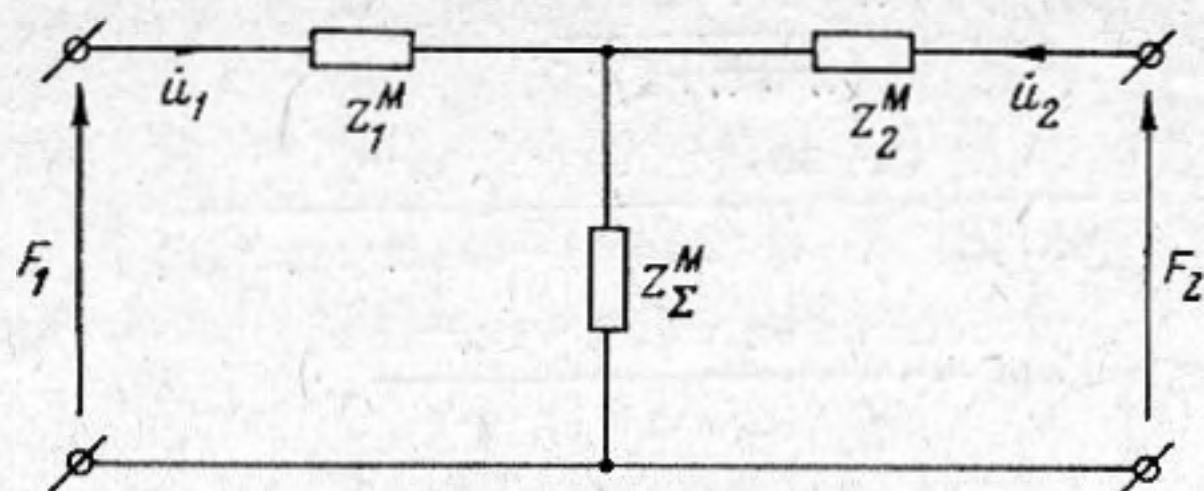
$$(3) \quad F_1 = -4\pi r_1^2 T_{rr}(r_1), \quad \dot{u}_1 = j\omega u(r_1),$$

$$F_2 = -4\pi r_2^2 T_{rr}(r_2), \quad \dot{u}_2 = -j\omega u(r_2),$$

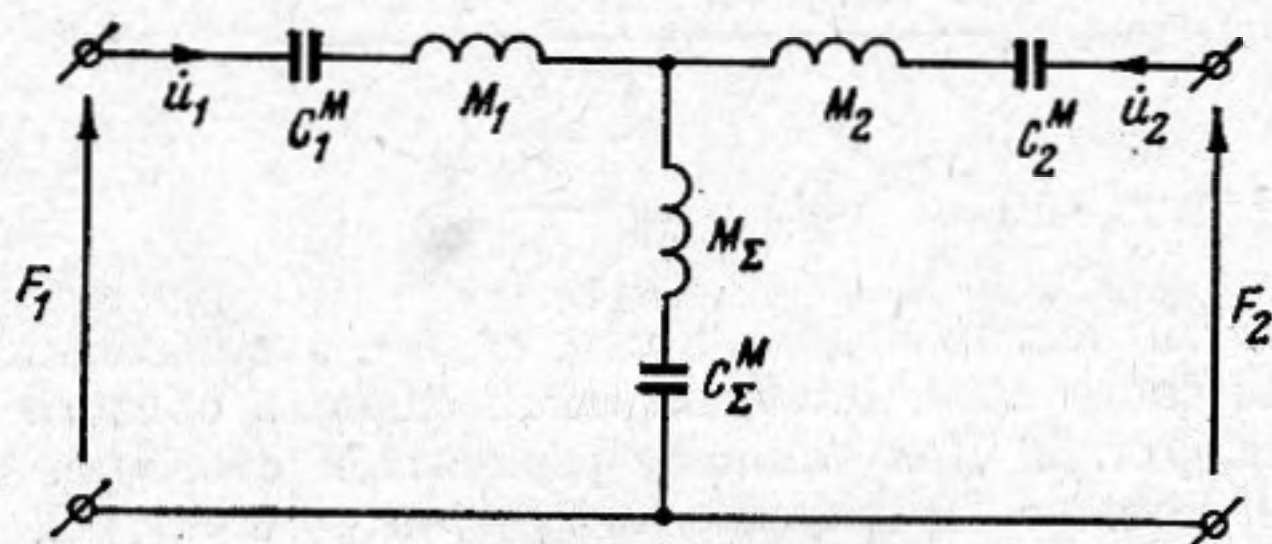
где F_1 , F_2 — силы, действующие на поверхностях слоя, \dot{u}_1 , \dot{u}_2 — колебательные скорости, r_1 , r_2 — радиусы, причем индекс 1 относится к внутренней поверхности, а индекс 2 — к наружной.

Совместное решение (1)–(3) приводит к соотношениям

$$(4) \quad \begin{cases} F_1 = Z_{2(T)}^M (\dot{u}_1 + \dot{u}_2) + Z_{1(T)}^M \dot{u}_1, \\ F_2 = Z_{2(T)}^M (\dot{u}_1 + \dot{u}_2) + Z_{2(T)}^M \dot{u}_2, \end{cases}$$



Фиг. 1. Эквивалентная электромеханическая схема сферического слоя



Фиг. 2. Эквивалентная электромеханическая схема сферического слоя в области низких частот

которым, согласно первой системе электромеханических аналогий [4], можно поставить в соответствие эквивалентную схему, изображенную на фиг. 1. При этом механические импедансы $Z_{i(T)}^M$ равны:

$$Z_{\Sigma(T)}^M = \frac{4\pi E}{j\omega k W_1 (1-2\sigma)(1+\sigma)},$$

$$(5) \quad Z_{1(T)}^M = Z_{\Sigma(T)}^M \left[x_1^2 W_3(x_2, x_1) - 2\sigma x_1 \frac{W_1}{1-\sigma} - 1 \right],$$

$$Z_{2(T)}^M = Z_{\Sigma(T)}^M \left[x_2^2 W_3(x_1, x_2) + 2\sigma x_2 \frac{W_1}{1-\sigma} - 1 \right],$$

где

$$W_1 = j_1(x_1)n_1(x_2) - j_1(x_2)n_1(x_1),$$

$$W_3(x_2, x_1) = j_1(x_2)n_0(x_1) - n_1(x_2)j_0(x_1) + 2W_1/x_1,$$

$$W_3(x_1, x_2) = j_1(x_1)n_0(x_2) - n_1(x_1)j_0(x_2) - 2W_1/x_2,$$

$$x_1 = kr_1, \quad x_2 = kr_2, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad c = \sqrt{\frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}},$$

c — скорость звука в слое, k — волновое число, $j_\nu(x)$, $n_\nu(x)$ — сферические функции Бесселя и Неймана [5].

Значительный интерес представляет эквивалентная схема, изображенная на фиг. 1, в области низких частот. Раскладывая выражения (5) в ряды по частоте и ограничиваясь первыми двумя членами каждого ряда, получим

$$Z_{i(T)}^M \approx \frac{1}{j\omega C_{i(T)}^M} + j\omega M_{i(T)},$$

$$C_{\Sigma(T)}^M = \frac{(1-2\sigma)(1+\sigma)(\alpha^3-1)}{12\pi\alpha r_2 E(1-\sigma)}$$

$$\begin{aligned}
 M_{\Sigma(T)} &= -0,9m \frac{\alpha^2(\alpha^2+3\alpha+1)}{(\alpha^2+\alpha+1)^3}, \\
 C_{1(T)}^M &= \frac{(1-2\sigma)(1+\sigma)(\alpha^2+\alpha+1)}{4\pi r_1 E [(\alpha-1)(2\alpha+1) - \sigma(4\alpha^2+\alpha+1)]}, \\
 M_{1(T)} &= 0,3m \frac{3\alpha^4+19\alpha^3+15\alpha^2+6\alpha+2}{(\alpha^2+\alpha+1)^3}, \\
 C_{2(T)}^M &= \frac{(1-2\sigma)(1+\sigma)(\alpha^2+\alpha+1)}{4\pi r_2 E [(\alpha-1)(\alpha+2) + \sigma(\alpha^2+\alpha+4)]}, \\
 M_{2(T)} &= 0,3m \frac{\alpha^2(2\alpha^4+6\alpha^3+15\alpha^2+19\alpha+3)}{(\alpha^2+\alpha+1)^3}, \\
 m &= \frac{4}{3} \pi r_1^3 (\alpha^3-1), \quad \alpha = \frac{r_2}{r_1},
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

где $C_{i(T)}^M$ — механические податливости, $M_{i(T)}$ — эквивалентные массы, m — масса сферического слоя. Эквивалентная схема в области низких частот приведена на фиг. 2. Для тонкой сферической оболочки (толщина слоя значительно меньше радиуса — $h=r_2-r_1 \ll r_{cp}=(r_2+r_1)/2$, приближенно получим:

$$\begin{aligned}
 C_{\Sigma(T)}^M &\approx \frac{(1-2\sigma)(1+\sigma)h}{4\pi r_{cp}^2 E (1-\sigma)}, \\
 C_{1(T)}^M &\approx -\frac{(1-2\sigma)(1+\sigma)}{8\pi r_{cp} E \sigma} \left(1 + \frac{h}{2\sigma r_{cp}}\right), \\
 C_{2(T)}^M &\approx \frac{(1-2\sigma)(1+\sigma)}{8\pi r_{cp} E \sigma} \left(1 - \frac{h}{2\sigma r_{cp}}\right), \\
 M_{\Sigma(T)} &\approx -\frac{m}{6}, \quad M_{1(T)} \approx M_{2(T)} \approx \frac{m}{2}, \quad m \approx 4\pi r_{cp}^2 h \rho.
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Если внутренняя поверхность сферы свободна ($F_1=0$), то механический импеданс со стороны наружной поверхности равен

$$\begin{aligned}
 Z_{вх(T)}^M &= \frac{F_2}{\dot{u}_2} = Z_{2(T)}^M + \frac{Z_{1(T)}^M Z_{\Sigma(T)}^M}{Z_{1(T)}^M + Z_{\Sigma(T)}^M} \approx \frac{1}{j\omega C_{вх(T)}^M} + j\omega M_{вх(T)}, \\
 C_{вх(T)}^M &= \frac{C_{2(T)}^M (C_{1(T)}^M + C_{\Sigma(T)}^M)}{C_{1(T)}^M + C_{2(T)}^M + C_{\Sigma(T)}^M} = \frac{(2\alpha^3+1) - \sigma(4\alpha^3-1)}{8\pi r_2 E (\alpha^3-1)}
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

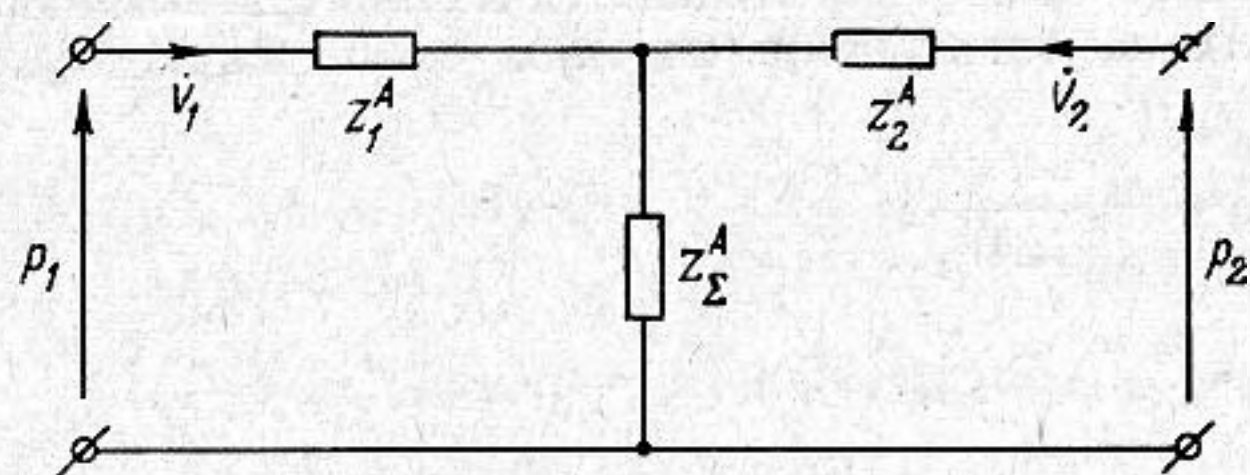
$$M_{вх(T)} = M_{2(T)} + \frac{M_{1(T)} (C_{1(T)}^M)^2 + M_{\Sigma(T)} (C_{\Sigma(T)}^M)^2}{(C_{1(T)}^M + C_{\Sigma(T)}^M)^2}$$

или для тонкостенной сферы

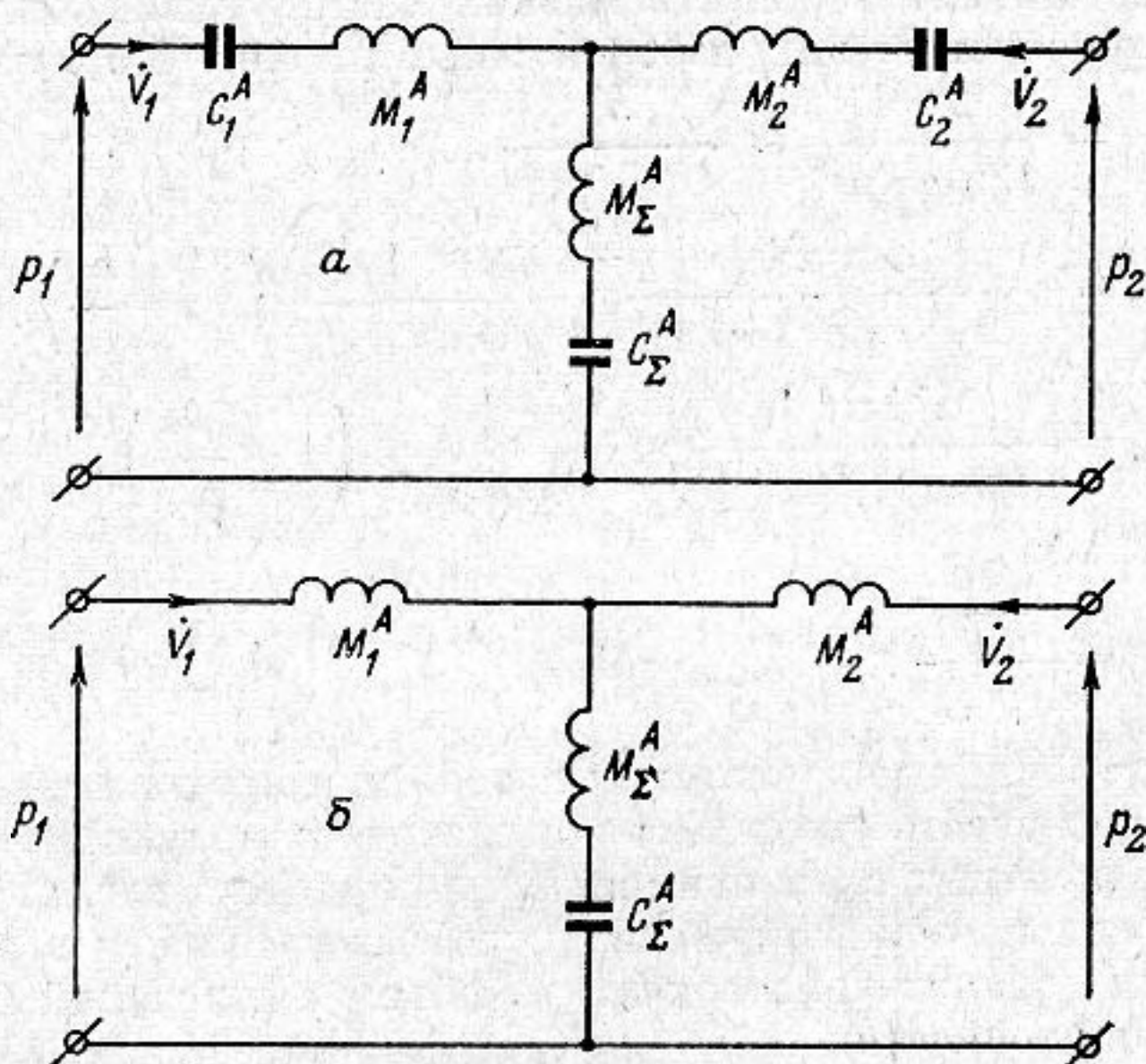
$$C_{вх(T)}^M \approx \frac{1-\sigma}{8\pi h E}, \quad M_{вх(T)} \approx m.
 \tag{9}$$

Заметим, что приведенные выше выражения (4)–(9) могут быть получены из эквивалентной схемы пьезокерамического преобразователя сферического типа [6], если учесть отсутствие у материала пьезосвойств и анизотропии.

Часто вместо электромеханических эквивалентных схем удобно пользоваться электроакустическими. При этом в качестве интенсивных и экстенсивных переменных принимают соответственно давления $p_i = F_i/S_i$ и объемные колебательные скорости $\dot{V}_i = \dot{u}_i S_i$ (S_i — площади поверхностей). Внешний вид эквивалентной схемы при этом не изменится (фиг. 3), но



Фиг. 3. Эквивалентная электроакустическая схема сферического слоя



Фиг. 4. Эквивалентные электроакустические схемы сферического слоя в области низких частот (а — для твердого слоя, б — для жидкого)

вместо механических импеданцов появятся акустические, связанные с механическими импеданцами соотношениями

$$Z_{\Sigma(T)}^A = \frac{Z_{\Sigma(T)}^M}{S_1 S_2}, \quad Z_{1(T)}^A = \frac{Z_{\Sigma(T)}^M + Z_{1(T)}^M}{S_1^2} - \frac{Z_{\Sigma(T)}^M}{S_1 S_2},$$

$$Z_{2(T)}^A = \frac{Z_{\Sigma(T)}^M + Z_{2(T)}^M}{S_2^2} - \frac{Z_{\Sigma(T)}^M}{S_1 S_2}, \quad S_i = 4\pi r_i^2.$$

В области низких частот схема имеет вид, представленный на фиг. 4, а, и параметры ее выражаются как

$$C_{\Sigma(T)}^A = \frac{4\pi r_1^3 (\alpha^3 - 1) (1 - 2\sigma) (1 + \sigma)}{3E (1 - \sigma)}$$

$$M_{\Sigma(T)}^A = -0,9m \frac{\alpha^2 (\alpha^2 + 3\alpha + 1)}{S_1 S_2 (\alpha^2 + \alpha + 1)^3},$$

$$C_{1(T)}^A = 2\pi r_1^3(1+\sigma)/E, \quad C_{2(T)}^A = -2\pi r_2^3(1+\sigma)/E,$$

$$M_{1(T)}^A = 1,5m \frac{2\alpha+1}{S_1^2(\alpha^2+\alpha+1)^2}, \quad M_{2(T)}^A = 1,5m \frac{\alpha+2}{S_2^2(\alpha^2+\alpha+1)^2}.$$

Аналогичным образом рассчитываются параметры эквивалентных электромеханических и электроакустических схем жидкого сферического слоя, при этом

$$Z_{\Sigma(ж)}^M = -\frac{4\pi c_1^2 \rho}{j\omega W_1},$$

$$(10) \quad Z_{1(ж)}^M = Z_{\Sigma(ж)}^M \{x_1^2 [j_1(x_2)n_0(x_1) - n_1(x_2)j_0(x_1)] - 1\},$$

$$Z_{2(ж)}^M = Z_{\Sigma(ж)}^M \{x_2^2 [j_1(x_1)n_0(x_2) - n_1(x_1)j_0(x_2)] - 1\}.$$

В выражениях (10) c_1 — скорость звука в жидкости, $x_1 = k_1 r_1$, $x_2 = k_1 r_2$, $k_1 = \omega/c_1$. Соответственно в области низких частот эквивалентная схема жидкого слоя приобретает вид, изображенный на фиг. 4, б с параметрами:

$$C_{\Sigma(ж)}^M = \frac{\alpha^3 - 1}{12\pi r_1^2 \alpha r_2} \approx \frac{h}{4\pi r_{cp}^2 \rho c_1^2},$$

$$C_{1(ж)}^M = -\frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{12\pi r_1 \rho c_1^2 (\alpha + 1)} \approx -\frac{1}{8\pi r_{cp} \rho c_1^2} \left(1 + \frac{h}{r_{cp}}\right),$$

$$C_{2(ж)}^M = \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{12\pi r_2 \alpha \rho c_1^2 (\alpha + 1)} \approx \frac{1}{8\pi r_{cp} \rho c_1^2} \left(1 - \frac{h}{r_{cp}}\right),$$

$$M_{i(ж)} = M_{i(T)},$$

$$C_{\Sigma(ж)}^A = \frac{m}{(\rho c_1)^2}, \quad M_{i(ж)}^A = M_{i(T)}^A.$$

Наличие внутренних механических потерь при прохождении волны через слой нетрудно учесть введением комплексного модуля упругости [7].

Метод эквивалентных схем применялся для расчета влияния покрытия на характеристики пьезокерамических преобразователей и в ряде других задач и позволил значительно сократить объем вычислений без существенного снижения точности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М., «Наука», 1973.
2. Дианов Д. Б., Кузьменко А. Г. О входных сопротивлениях цилиндрических и сферических слоистых сред. Изв. ЛЭТИ, 1968, вып. 63, 53–59.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М., «Наука», 1965.
4. Римский-Корсаков А. В. Электроакустика. М., «Связь», 1973.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1973.
6. Браилов Э. С., Вассергисер М. Е., Дорош А. Г. Расчет параметров эквивалентной схемы радиально-поляризованной пьезокерамической сферы. Акуст. ж., 1979, 25, 3, 352–357.
7. Скучик Е. Основы акустики, т. 1. М., «Мир», 1976.

Всесоюзный научно-исследовательский институт метрологии измерительных и управляющих систем, Львов

Поступила
30 июля 1979 г.