

УДК 534-16+534.2

НОРМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ ТВЕРДОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ВОЛНОВОДА

А. Е. Вовк, В. В. Гудков, Т. В. Левченкова,  
В. В. Тютекин

Дан метод построения нормальных волн (собственных функций) в твердом прямоугольном волноводе со свободными от напряжений границами на основе его рассмотрения как части твердого слоя. Исследованы два способа вывода характеристического уравнения. На примере симметричных нормальных волн проведен анализ этих уравнений и представлены результаты их численных решений для нескольких значений отношения ширины волновода к его высоте при значении коэффициента Пуассона  $\nu=0,31$ . Показано, что зарождение распространяющихся нормальных волн в волноводе обусловлено либо сдвиговыми волнами, либо волнами Лэмба слоя.

Настоящая работа, являющаяся развитием работы [1], посвящена рассмотрению одного из возможных методов построения системы нормальных волн (собственных функций) твердого прямоугольного волновода со свободными границами на основе его представления как части твердого слоя [2] и расчету соответствующих собственных значений. Отдельные результаты по исследованию распространения возмущений в твердом прямоугольном волноводе содержатся также в работах [2-12].

Рассмотрим бесконечный вдоль оси  $y$  твердый прямоугольный волновод ( $-h < x < h, -l < z < l, -\infty < y < \infty$ ) (фиг. 1) со свободными от напряжений границами:

$$(1) \quad \sigma_x(\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}) = 0, \quad x = \pm h,$$

$$(2) \quad \sigma_z(\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}) = 0, \quad z = \pm l,$$

где  $\sigma_x, \sigma_z$  — обобщенные векторы напряжений [13].

Можно считать, что интересующий нас волновод является частью твердого слоя со свободными от напряжений границами ( $-h < x < h, \sigma_x = 0, x = \pm h$ ); смещение в нем можно представить в виде сумм собственных функций смещений лэмбовских  $v_n^a$  и сдвиговых  $v_m^c$  нормальных волн слоя и записать в следующей форме:

$$(3) \quad u = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n^a(x) \Phi(z) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m v_m^c(x) \psi(z) \right] e^{i\beta y}$$

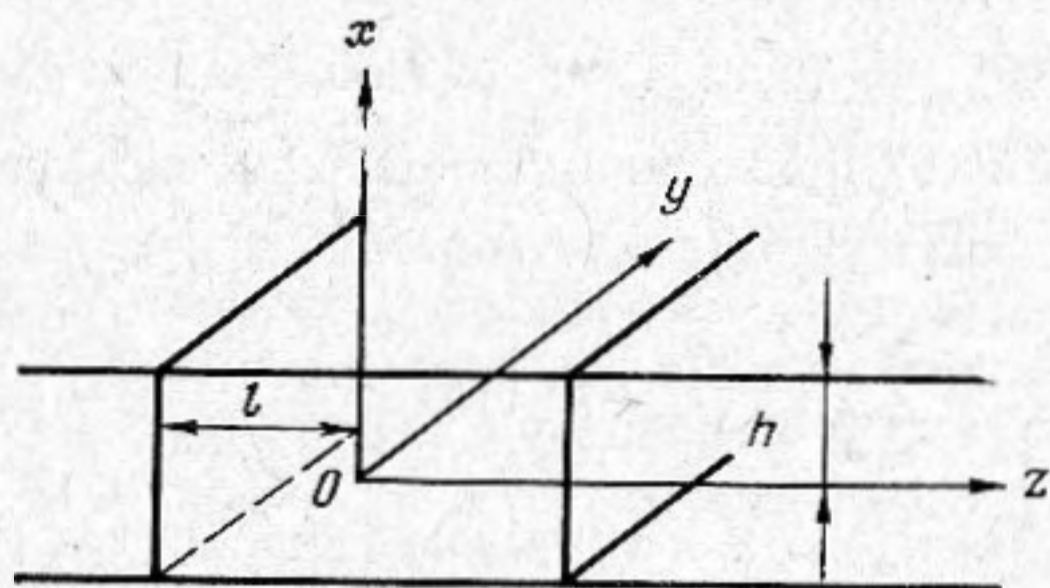
Здесь  $a_n, b_m$  — произвольные постоянные,  $\Phi(z), \psi(z)$  — тригонометрические функции, задающие распределение смещений вдоль координаты  $z$ ,  $\beta$  — неизвестная величина, подлежащая определению в краевой задаче на собственные значения, вытекающей из граничных условий, и физически соответствующая постоянной распространения нормальных волн вдоль оси волновода  $y$ .

Для каждого найденного значения  $\beta$  и определенных при этом соотношениях между произвольными постоянными  $a_n, b_m$  с точностью до одной

из них, две бесконечные суммы при множителе  $l^{|\beta|}$  соответствуют отдельной собственной функции рассматриваемой краевой задачи, т. е. собственной функции смещений нормальных волн прямоугольного волновода.

В общем случае рассматриваемым методом могут быть описаны четыре формы колебаний, отличающихся симметрией смещений относительно срединных плоскостей волновода [1].

На первый взгляд метод решения задачи о собственных колебаниях прямоугольного волновода с использованием нормальных волн слоя кажется наиболее приемлемым для значений  $l/h > 1$ . Однако, как показал расчет  $\beta$  и сравнение с результатами, приведенными в работе [11], в которой расчет собственных значений прямоугольного волновода основан на преобразовании кругового цилиндра в прямоугольник и поэтому боль-



Фиг. 1. Схема волновода

ше отвечает случаю квадрата  $l/h \approx 1$ , этот случай также хорошо описывается и предлагаемым нами методом.

Возвращаясь к поставленной задаче, констатируем, что выбранная форма смещений в прямоугольном волноводе (3), благодаря тому что  $V_n^a(x)$  и  $V_m^c(x)$  являются собственными функциями смещений слоя, обеспечивает точное выполнение граничных условий (1) и остается требование — удовлетворить граничным условиям (2), причем благодаря симметрии прямоугольника только на части границы одного из квадрантов, например при  $z=l$ ,  $0 < x < h$ .

Поскольку точный учет оставшихся граничных условий (2), как это в общем случае характерно для твердых волноводов, отличных от слоя и цилиндра, невозможен, то были рассмотрены два возможных способа приближенного учета этих условий. В первом из них аналогично работе [11] условия (2) записываются в ряде точек  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, I$ ) при  $z=l$  для суммы нормальных волн  $N+M$ , в пределе число точек и число нормальных волн должны стремиться к бесконечности. Таким образом, получается алгебраическая система уравнений (в пределе бесконечная) относительно неизвестных  $a_n, b_m$  с параметром  $\beta$ . При этом следует отметить, что поскольку каждая нормальная волна (и лэмбовская, и сдвиговая) входит в общее смещение со своим коэффициентом ( $a_n, b_m$ ), то для конечной системы суммарное число нормальных волн должно быть равно общему числу граничных условий.

В общем случае, если в каждой из выбранных  $I$  точек записываются все три условия (2), то  $N+M=3I$ , что определяет порядок системы;  $N, M$  — число учтенных в расчете лэмбовских и сдвиговых нормальных волн соответственно.

Второй способ основан на попытке удовлетворить условиям (2) в среднем по всей границе волновода  $0 < x < h$  и заключается в минимизации величины

$$(4) \quad G = \int_0^h |\sigma_z|_{z=l}^2 dx.$$

В нашем случае

$$(5) \quad |\sigma_z|^2 = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sigma_{zn}^{\pi} + \sum_{m=0}^{\infty} b_m \sigma_{zm}^c \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n \bar{\sigma}_{zn}^{\pi} + \sum_{m=0}^{\infty} \bar{b}_m \bar{\sigma}_{zm}^c \right),$$

где черта обозначает комплексное сопряжение. Согласно теореме Грамма [14], о которой в связи с аналогичной задачей упоминается в работе [15], выполнение этого требования должно обеспечивать точное решение задачи о прямоугольном волноводе.

Заметим, что исходя из вариационного принципа для учета граничных условий (2) может быть принят способ, изложенный в работе [16].

Минимум  $G$ , определяется из условий

$$(6) \quad dG/d\bar{a}_n = 0 \quad n=0, 1 \dots \infty, \quad dG/db_m = 0, \quad m=0, 1 \dots \infty.$$

Выполнение условий (6) приводит к бесконечной системе однородных алгебраических уравнений вида

$$(7) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_{rn}^{\pi\pi} a_n + \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_{rm}^{\pi c} b_m = 0, \quad r=1 \dots \infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_{in}^{c\pi} a_n + \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_{im}^{cc} b_m = 0, \quad i=1 \dots \infty$$

где

$$\Gamma_{rn}^{\pi\pi} = \int_0^h \bar{\sigma}_{zn}^{\pi} \sigma_{zn}^{\pi} |_{z=l} dx, \quad \Gamma_{in}^{c\pi} = \int_0^h \bar{\sigma}_{zn}^c \sigma_{zn}^{\pi} |_{z=l} dx, \text{ и т. д.}$$

Требование нетривиальности решения в обоих способах приводит к характеристическому детерминанту (в пределе бесконечного порядка) относительно величины  $\beta$ . В численных расчетах, как обычно, приходится ограничиваться конечным числом членов в рядах (7) и конечным числом точек в первом способе.

Анализ полученных указанными способами характеристических детерминантов и их численный расчет проводился для случая симметричных нормальных волн. В этом случае компоненты смещений лэмбовских и сдвиговых нормальных волн слоя можно написать в виде

$$(8) \quad v_{xn}^{\pi} = -p_n \left[ \sin p_n x \sin q_n h + \frac{\xi_n^2}{\gamma_n^2} \sin q_n x \sin p_n h \right],$$

$$v_{yn}^{\pi} = i\beta \left[ \sin q_n h \cos p_n x - \frac{p_n q_n}{\gamma_n^2} \sin p_n h \cos q_n x \right],$$

$$v_{zn}^{\pi} = -\sqrt{\xi_n^2 - \beta^2} \left[ \sin q_n h \cos p_n x - \frac{p_n q_n}{\gamma_n^2} \sin p_n h \cos q_n x \right],$$

$$v_{ym}^c = -\sqrt{\xi_m^2 - \beta^2} \cos q_m x, \quad v_{zm}^c = \beta \cos q_m x,$$

а распределение смещений по  $z$  следующими функциями  $\Phi(z)$  и  $\psi(z)$ , написанными в виде вектор-столбцов:

$$(9) \quad \Phi(z) = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\xi_n^2 - \beta^2} z \\ \cos \sqrt{\xi_n^2 - \beta^2} z \\ \sin \sqrt{\xi_n^2 - \beta^2} z \end{pmatrix}, \quad \psi(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \sqrt{\xi_m^2 - \beta^2} z \\ \sin \sqrt{\xi_m^2 - \beta^2} z \end{pmatrix},$$

где  $\xi_n$  — собственные значения симметричных лэмбовских волн твердого слоя, определяемые из характеристического уравнения

$$(10) \quad \gamma_n^4 \cos p_n h \sin q_n h + p_n q_n \xi_n^2 \sin p_n h \cos q_n h = 0,$$

$\xi_m$  — собственные значения сдвиговых симметричных нормальных волн упругого слоя, определяемые из характеристического уравнения:

$$(11) \quad \begin{aligned} \sin q_m h &= 0, & q_m h &= m\pi, & m &= 0, 1, \dots \\ p_n &= \sqrt{k_t^2 - \xi_n^2}, & q_n &= \sqrt{k_t^2 - \xi_n^2}, & q_m &= \sqrt{k_t^2 - \xi_m^2}, \\ \gamma_n^2 &= \frac{k_t^2}{2} - \xi_n^2, \end{aligned}$$

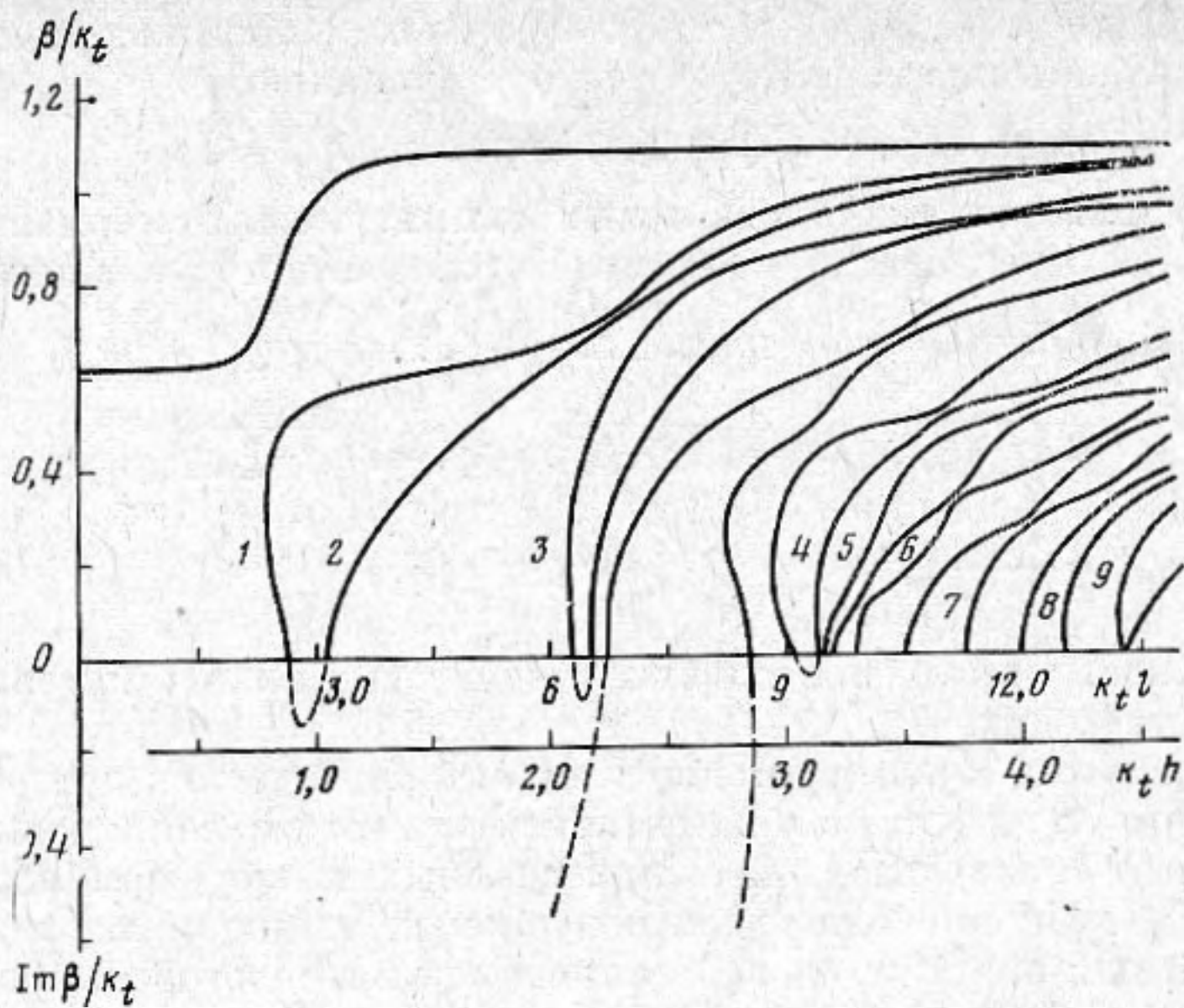
$k_t, k_i$  — волновые числа продольных и сдвиговых волн в материале волновода соответственно.

Компонентами строк и столбцов характеристических детерминантов в том и другом случае являются компоненты вектора напряжений (2) [1], составленные с использованием приведенных выше формул для смещений (8), (9). Не приводя здесь получаемых таким образом громоздких выражений для  $\sigma_{iz}$  ( $i=x, y, z$ ), остановимся на некоторых общих свойствах, которыми будут характеризоваться построенные на их основе детерминанты ( $\Delta$ ). Основными параметрами детерминантов являются величины  $T=l/h, k_i h$  (или  $k_t h$ ),  $\eta^2 = k_t^2/k_i^2$ .

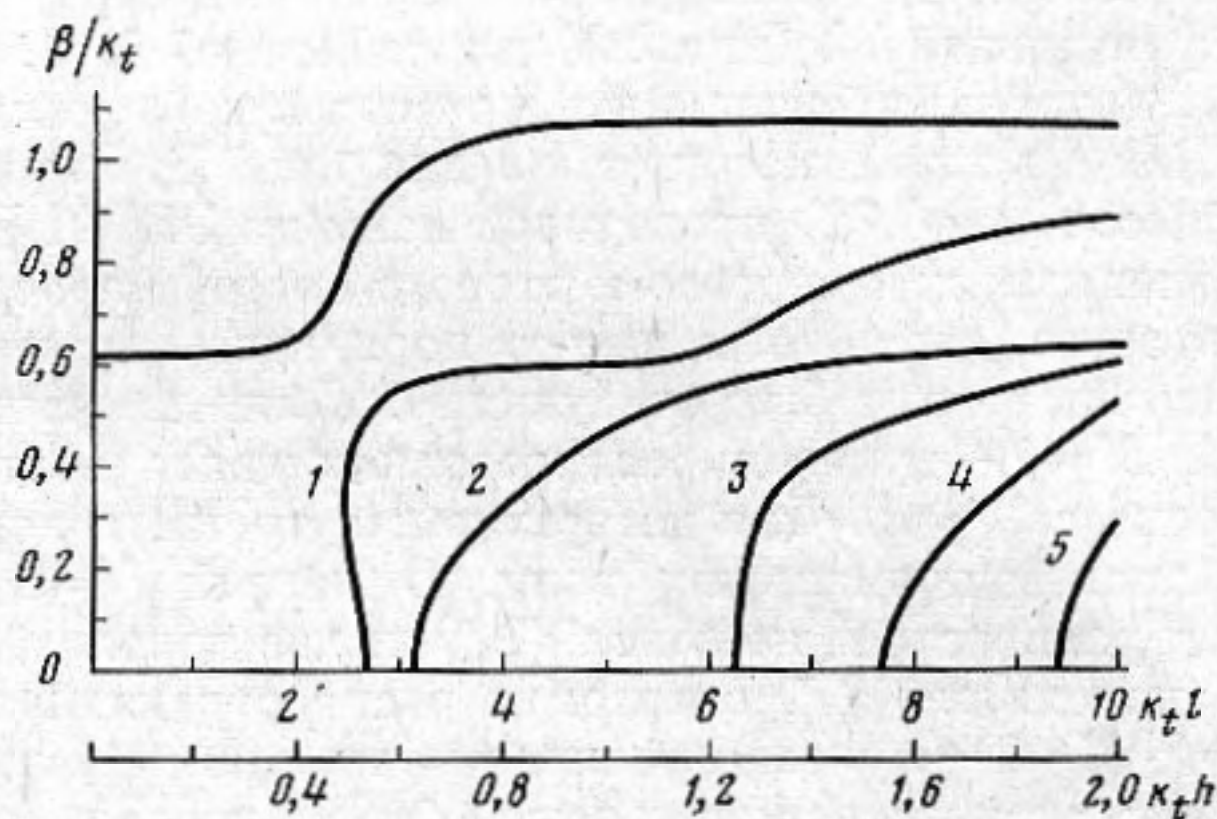
При заданных значениях  $T, \eta^2$  и выборе числа учитываемых нормальных волн, т. е. выборе значений  $\xi_n, \xi_m$  и порядка детерминантов, последние являются функциями  $k_i h$  (или  $k_t h$ ) и неизвестной  $\beta$ .

Численный расчет действительных, мнимых и комплексных безразмерных величин ( $\beta/k_t$ ) в зависимости от  $k_i h$  для  $T=1, 3, 5$  при  $\eta^2=0,276$  (коэффициент Пуассона  $\nu=0,31$ ) проводился нами на ЭЦВМ БЭСМ-6 по специально составленным для первого и второго способа программам для детерминантов второго, третьего и пятого порядков. Характер учтенных в расчетах нормальных волн был следующий. Для детерминанта второго порядка:  $N=1, M=1$  — нулевая распространяющаяся волна Лэмба ( $\xi_0^n$ ) и сдвиговая волна с  $\xi_0^c = k_t$ . Для детерминанта третьего порядка были учтены две комбинации нормальных волн. В первой  $N=2, M=1$  — волны Лэмба: нулевая распространяющаяся ( $\xi_0^n$ ) и две волны с комплексно-сопряженными значениями  $\xi_1^n$ , сдвиговая распространяющаяся с  $\xi_0^c = k_t$ . Во второй  $N=1, M=2$  — нулевая распространяющаяся волна Лэмба ( $\xi_0^n$ ), сдвиговые волны: распространяющаяся с  $\xi_0^c = k_t$  и первая нераспространяющаяся (мнимое значение  $\xi_1^c$ ), переходящая в распространяющуюся (действительное значение  $\xi_1^c$ ). Для детерминанта пятого порядка  $N=3, M=2$  — волны Лэмба: нулевая распространяющаяся ( $\xi_0^n$ ), две пары волн с комплексно-сопряженными значениями  $\xi_n^n$ , переходящие в две распространяющиеся волны с действительными значениями  $\xi_n^n$ ; волны сдвига: распространяющаяся с  $\xi_0^c = k_t$  и нераспространяющаяся (мнимое значение  $\xi_1^c$ ), переходящая в распространяющуюся (действительное значение  $\xi_1^c$ ). Заметим, что две волны Лэмба с комплексно-сопряженными значениями волновых чисел увеличивают порядок детерминанта только на единицу, поскольку входят в систему с одним коэффициентом.

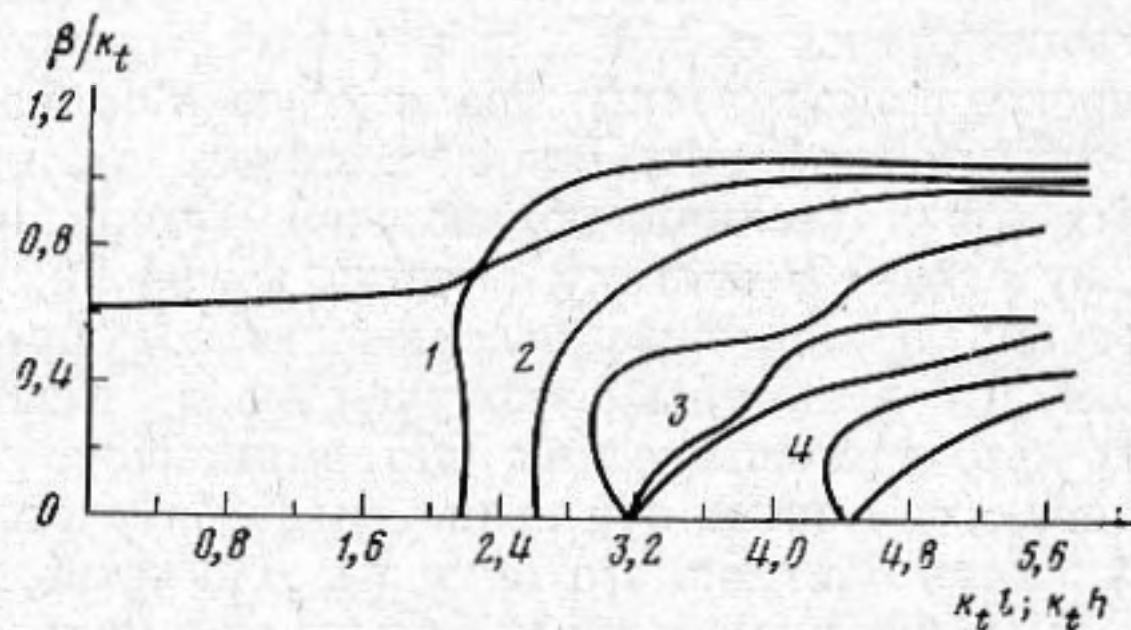
Переходя к рассмотрению численных результатов, представленных на фиг. 2—4, отметим, что величины  $\beta$ , полученные в сравнительных выборочных расчетах характеристических детерминантов, написанных на основе применения двух описанных выше способов учета граничных условий, имели одинаковые значения с точностью до четвертого знака, причем второй способ требует существенно больше машинного времени. Учитывая это обстоятельство, большая часть расчетов была выполнена для характеристических детерминантов, полученных из учета граничных условий в дискретных точках.



Фиг. 2. Безразмерные волновые числа прямоугольного волновода с  $\nu=0,31$  при  $T=3$ : 1 — волна  $L_{01}$ , 2—9 — волны  $S_{01}$ ,  $S_{02}$ ,  $S_{03}$ ,  $S_{10}$ ,  $S_{11}$ ,  $S_{12}$ ,  $S_{04}$ ,  $S_{13}$  соответственно



Фиг. 3. Безразмерные волновые числа прямоугольного волновода с  $\nu=0,31$  при  $T=5$ : 1, 4 — волны  $L_{01}$  и  $L_{02}$  соответственно, 2, 3, 5 — волны  $S_{01}$ ,  $S_{02}$ ,  $S_{03}$



Фиг. 4. Безразмерные волновые числа квадрата ( $T=1$ ) с  $\nu=0,31$ : 1, 2 — волны квадрата, 3 — волна  $S_{10}$  и  $S_{01}$ , 4 — волна  $S_{11}$

Кроме того, анализ результатов показывает, что влияние нераспространяющихся нормальных волн с комплексно-сопряженными и мнимыми значениями волновых чисел на характер дисперсии нормальных волн первых номеров прямоугольного волновода несущественно. Так, учет нормальных волн с комплексно-сопряженными и мнимыми значениями  $\xi_n^*$  изменяет значения  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ , а также комплексные значения  $\beta$  только в третьем или четвертом знаке вплоть до  $k_1 h \approx 2,5$ , когда появляется первая распространяющаяся волна слоя. Это позволяет сделать предположение, что при расчете  $\beta$  нормальных волн прямоугольного волновода следующих номеров можно также в первом приближении в предлагаемом нами методе ограничиться только распространяющимися нормальными волнами слоя, которые с учетом сказанного только и учитывались в наших расчетах для значений параметра  $k_1 h > 2,5$ .

На фиг. 2, 3 для более удобного сравнения результатов расчета даны две оси абсцисс  $k_1 h$  и  $k_1 l$ . Для случая  $T=3$  (фиг. 2) наряду с действительными значениями (распространяющиеся нормальные волны) также приведены результаты расчета  $\beta/k_1$  некоторых мнимых значений последнего, обозначенные на фигуре штриховыми линиями и представленные ниже оси абсцисс. Для случаев  $T=5$  и 1, для которых полученные результаты ниже будут более подробно рассмотрены (фиг. 3 и 4), приведены только действительные значения  $\beta/k_1$ , соответствующие распространяющимся нормальным волнам.

Как видно из фиг. 3, 4, в целом характер дисперсии собственных значений  $\beta/k_1$  прямоугольного волновода такой же, как и для подобных волн твердого слоя и кругового цилиндра [2]. Исключением является снижение значения фазовой скорости первых двух номеров нормальных волн до величины, меньшей скорости сдвиговых волн. В величинах  $\beta/k_1$  это соответствует значениям больше единицы (см. фиг. 2-4). Кроме того, в прямоугольном волноводе для гораздо большего числа нормальных волн, чем в слое и круговом цилиндре, появляется участков  $\beta$  (в разных диапазонах частот) с отрицательным углом наклона кривых  $\beta/k_1$  к оси  $k_1 h$ , т. е. с отрицательным значением групповой скорости.

При  $k_1 h \rightarrow 0$  для всех значений  $T$  (кроме представленных на фиг. 2-4 результатов, расчет  $\beta_0$  был также выполнен в непрерывном интервале от  $T=1$  до  $T=15$ ), скорость волны в прямоугольном волноводе ( $c_\phi = k_1 c_1 / \beta$ ), как и в работах [8-11], стремится к скорости продольной волны в стержне. Этот же результат получается из простых вычислений, если предположить, что при  $k_1 h \rightarrow 0$  симметричная волна в прямоугольном волноводе образуется из продольной волны слоя и сдвиговой волны.

По аналогии с другими волноводами значения  $k_1 h$  или  $k_1 l$ , при которых  $\beta=0$ , можно считать критическими, соответствующими частотам зарождения распространяющихся нормальных волн. При  $\beta=0$  обращаются в нуль  $\sigma_{yz}^*$ ,  $\sigma_{xz}^0$  и  $\sigma_{zz}^0$ , откуда следует, что соответственные характеристические детерминанты как для первого, так и для второго из рассматриваемых способов распадаются на два; это говорит о том, что зарождение распространяющихся волн в прямоугольном волноводе связано или только со сдвиговыми волнами, или только с волнами Лэмба слоя.

В первом случае критические значения  $(k_1 h)$  определяются из уравнений:  $\sin \xi_m T = 0$  соответственно

$$(12) \quad (k_1 h)_{кр. fm} = \sqrt{(f/T)^2 + m^2 \pi^2},$$

$$(k_1 l)_{кр. fm} = \sqrt{f^2 + (mT)^2 \pi^2}, \quad \text{где } f=0, 1, 2, \dots$$

Число  $m$  определяет сдвиговые нормальные волны исходного слоя ( $-h < x < h$ ), каждая из которых дает начало семейству нормальных волн номера  $f$  в прямоугольном волноводе. Приведенные формулы (12) показывают, что зарождение распространяющихся нормальных волн сдвигового типа для твердого прямоугольного волновода полностью аналогично за-

рождению нормальных волн в подобном по форме и размерам акустическом волноводе.

Для определения критических значений  $(k, h)_{кр.пр}$  нормальных волн, зарождение которых обусловлено волнами Лэмба, простых уравнений, подобно (12) не получается. Исключение составляют низкие частоты, когда в слое существует одна распространяющаяся волна. В этом случае, учитывая тождество  $\sigma_{yz}^n = 0$  и то, что  $\sigma_{xz}^n = 0$  в точках  $x = \pm h$ , а при других значениях  $x$ , по-видимому, мало, в первом приближении можно ограничиться граничным условием  $a_0 \sigma_{zz}^n = 0$ , которое выполняется при

$$(13) \quad \cos \xi_{0t} h T = \cos \xi_{0t} l = 0, \quad \xi_{0t} l = \pi/2t, \quad \text{где } t = 1, 3, 5, \dots$$

Отсюда видно, что зарождение нормальных волн лэмбовского типа, по крайней мере первого номера, происходит на частоте, при которой по ширине волновода  $(2l)$  укладывается половина длины нулевой волны Лэмба слоя толщиной  $2h$ . В общем случае в зарождении в твердом прямоугольном волноводе нормальных волн, обусловленных волнами Лэмба, в силу неортогональности последних участвуют все волны этого типа. В подписи к фиг. 2—4 указаны номером ветви нормальных волн, зарождение которых обусловлено нулевой волной Лэмба  $L_{01}$  (формула (13)) и сдвиговыми волнами  $S_{jm}$  (формула (12)). Ненумерованные ветви соответствуют нормальным волнам, зарождение которых обусловлено комбинацией нескольких волн Лэмба.

Сравнение значений  $\beta/k_t$  для дисперсионных кривых, представленных на фиг. 2—4, а также пересчитанных к значениям  $\beta/k_t$  в зависимости от  $k_t h$  данных работы [8] при  $\nu = 0,3$ ,  $T = 1, 2, 8$  для первых трех номеров нормальных волн и данных работы [11] при  $T = 1; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8$  для нулевой волны, показывает, что на низких частотах, когда в твердом слое, частью которого является прямоугольный волновод, имеются только две, практически бездисперсионные (симметричный случай), распространяющиеся волны — продольная и сдвиговая — картина образования и дисперсии нормальных волн в прямоугольном волноводе полностью ими определяется. Основным характерным размером при этом является ширина волновода  $l$ , зарождение нормальных волн в волноводах с различными значениями  $T > 1$  происходит при одних и тех же значениях  $k_t l$  и ход дисперсионных кривых в указанном диапазоне частот для зародившихся в нем нормальных волн в зависимости от этого параметра также совпадает.

Квадрат ( $T = 1$ ) является вырожденной формой прямоугольника: появляются диагональные плоскости симметрии. Наличие дополнительных плоскостей симметрии означает возможность появления дополнительных форм колебаний.

Так, при симметричном относительно срединных плоскостей колебании в квадрате может быть две формы различной симметрии относительно диагоналей, т. е. наряду с формой колебаний полностью симметричной может появиться дополнительно колебание, антисимметричное относительно диагонали. Из общих соображений ясно, что антисимметричное распределение смещений относительно диагональной плоскости возможно только при соизмеримости размеров диагонали с половиной длины существующих в волноводе волн, т. е. эта форма не существует на низких частотах, а начинает распространяться, например, с частоты, при которой диагональ квадрата приблизительно равна половине нулевой волны Лэмба.

Из записи выбранных нами форм смещений в общем виде (3), (8), (9) без конкретных значений  $\beta$ ,  $a_n$ ,  $b_m$  в явном виде нельзя выделить смещения различной симметрии относительно диагональных плоскостей. Можно предположить, что при определенных значениях  $\beta$ ,  $a_n$ ,  $b_m$  смещения в виде (3) (8) (9) для  $T = 1$  описывают либо симметричную, либо антисимметричную относительно диагонали форму колебаний. Строго говоря, при  $T = 1$  также следовало бы ожидать разбиения характеристического детерминанта на два, один из которых соответствовал бы симметричным, а второй — антисимметричным относительно диагонали формам, од-

нако в явном виде это не удастся получить. Тем не менее сравнение значений  $\beta/k_1$ , представленных на фиг. 4 и приведенных к значениям  $\beta/k_1$  данных работы [11], позволяет предположить без дополнительного расчета распределения смещений, что ветви дисперсионных кривых, обозначенные на фиг. 4 цифрами 1, 2, относятся к нормальным волнам, которые возможны только в квадрате при антисимметрии смещения относительно диагональной плоскости.

В заключение отметим, что рассмотренный нами метод, по-видимому, позволяет наиболее физически наглядно трактовать процесс образования распространяющихся нормальных волн в этом волноводе ( $T \neq 1$ ) и определять соответствующие или критические частоты. Что касается способа учета граничных условий, то приведенное сравнение двух возможных в настоящей работе и сравнение с результатами других работ позволяет сделать вывод об их равнозначности с точки зрения конечных результатов. Вместе с тем метод учета граничных условий в отдельных точках хотя и не является строго обоснованным математически, но с точки зрения практической реализации более приемлем.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вовк А. Е., Тютюкин В. В. Построение системы нормальных волн упругого прямоугольного волновода. Тр. VIII Всес. акуст. конф. М., 1973, 100–104.
2. Микер Т., Мейцлер А. Волноводное распространение в протяженных цилиндрах и пластинах. В сб. Физическая акустика, под ред. У. Мэсона, т. I, ч. А. М., «Мир», 1966, 140–203.
3. Medick M. A. Exponential Waves in Elastic Bars of Rectangular Cross Section. J. Acoust. Soc. America, 1968, 43, 2, 152–161.
4. Медик М. А. Одномерная теория распространения волн и колебаний в упругих стержнях прямоугольного сечения. Прикладная механика, 1966, 3, 11–19.
5. Медик М. А. Дисперсия продольных волн в стержнях прямоугольного сечения. Прикладная механика, 1967, 3, 275–279.
6. Kynch G. J. The fundamental modes of vibration of uniform beams for medium Wavelengths. Brit. J. Appl. Phys., 1957, 8, 2, 111–115.
7. Morse R. W. The velocity of compressional waves in Rods of Rectangular Cross Section. J. Acoust. Soc. America, 1950, 22, 3, 219–222.
8. Nigro N. J. Steady-state wave propagation in Infinite Bars of Noncircular Cross Section. J. Acoust. Soc. America, 1966, 41, 5, 1501–1508.
9. Booker R. E. Velocity Dispersion of Isotropic Rods of Square Cross Section Vibration in the Lowest Order Longitudinal Mode. J. Acoust. Soc. America, 1969, 45, 5, 1284–1293.
10. Rosenfeld G., Keller J. Wave propagation in elastic rods of arbitrary cross section. J. Acoust. Soc. America, 1974, 55, 3, 211–217.
11. W. B. Fraser. Stress Wave Propagation in Rectangular Bars. Int. J. Solids Structures, 1969, 5, 2, 379–397.
12. Касаткин Б. А., Павин П. Я. Асимптотика нормальных волн прямоугольного волновода. Дальневосточный акустич. сб. (межвузовский), вып. 1. Владивосток, 1975, 213–222.
13. Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости. М., Физматгиз, 1963.
14. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1967.
15. Именитова Е. В., Чернышев К. В., Шегай В. В. О расчете свободных колебаний упругих цилиндров конечной длины. ДАН СССР, 1976, 229, 2, 315–317.
16. Zemanek J. Experimental and Theoretical Investigation of Elastic Wave Propagation in a Cylinder. J. Acoust. Soc. America, 1971, 51, 1, 265–283.

Акустический институт  
им. Н. Н. Андреева  
Академии наук СССР

Поступила  
7 мая 1979 г.