

УДК 534.2

РАССЕЯНИЕ И УСИЛЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН
ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ВИХРЕМ

Г. М. Големиток, А. Л. Фабрикант

Рассмотрена устойчивость цилиндрического вихря и рассеяние на нем звука. Для вихрей с кусочно-постоянной завихренностью получены дисперсионные уравнения с учетом малой вязкости в ядре вихря. Исследовано рассеяние звука на колебаниях вихря как целого, поглощение за счет вязкой диссипации в ядре и резонансное поглощение (усиление) звука на вихре в идеальной жидкости за счет резонансов цилиндрических гармоник с угловой скоростью вихря.

Взаимодействие малых звуковых колебаний с вихревыми течениями определяет многие акустические явления: аэродинамическую генерацию звука, распространение звука в турбулентной среде и т. д. Изучение рассеяния акустических волн на вихрях важно для диагностики вихревых течений и управления турбулентностью. В данной работе рассмотрены цилиндрические вихри: безграничные аксиально-симметричные течения с замкнутыми линиями тока. Колебания таких течений рассматривались ранее в связи с проблемой разрушения концевых вихрей за крылом самолета [1] и смерчей [2], а также при исследовании устойчивости вращающихся струй [3, 4] и др.

Рассмотрим стационарное течение, скорость которого в цилиндрических координатах: $V_r=0$, $V_\phi=r\Omega(r)$, $V_z=U=\text{const}$, а давление $P(r)=\int \rho r \Omega^2 dr$. Здесь Ω — угловая скорость вращения, ρ — плотность. Линеаризуем уравнения Навье — Стокса в цилиндрических координатах и разложим малые возмущения скорости $\mathbf{v}=(v_r, v_\phi, v_z)=(\tilde{v}, \tilde{u}, \tilde{w})$, давления \tilde{p} и плотности $\tilde{\rho}$ этого течения по цилиндрическим гармоникам $\exp(i\omega t - in\phi - ikz)$. Тогда для амплитуд гармоник v, u, w, p получим:

$$\begin{aligned}
 & i\kappa v - 2\Omega u + \frac{p'}{\rho} - \frac{r\Omega^2}{\rho c^2} p = v \left[v'' + \frac{v'}{r} - \left(k^2 + \frac{n^2+1}{r^2} \right) v + 2in \frac{u}{r^2} \right], \\
 & i\kappa u + 2\Omega v + r\Omega' v - \frac{in}{\rho r} p = v \left[u'' + \frac{u'}{r} - \left(k^2 + \frac{n^2+1}{r^2} \right) u - \frac{2in}{r^2} v \right], \\
 & i\kappa w - \frac{ik}{\rho} p = v \left[w'' + \frac{w'}{r} - \left(k^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) w \right], \\
 & \frac{i\kappa}{\rho c^2} p + \frac{\rho'}{\rho} v + v' + \frac{v}{r} - \frac{in}{r} u - ikw = 0.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Здесь штрих означает d/dr , а возмущения давления и плотности связаны через локальную скорость звука: $\tilde{p}=c^2\tilde{\rho}$. Пренебрегая вязкостью ($\nu=0$), выразим из (1) амплитуды компонент скорости через амплитуду давления и при отсутствии стратификации ($\rho'=0$, $c'=0$) мы получим уравнение

для амплитуды давления:

$$(2) \quad p'' + \left(\frac{1}{r} - \frac{\beta'}{\beta} - r \frac{\Omega^2}{c^2} \right) p' + \left[\frac{\beta}{c^2} - \frac{n^2}{r^2} - \frac{\beta k^2}{\kappa^2} - \frac{2n\Omega'}{\kappa r} + \frac{2n\Omega}{\kappa r} \frac{\beta'}{\beta} + \frac{\Omega^2}{c^2} \left(r \frac{\beta'}{\beta} - 2r \frac{\Omega'}{\Omega} - 2n \frac{\Omega}{\kappa} - 2 \right) \right] p = 0,$$

где $\alpha = 2\Omega + r\Omega'$ — завихренность невозмущенного потока, $\kappa = \omega - n\Omega - kU$, $\beta = \kappa^2 - 2\alpha\Omega$. Если пренебречь сжимаемостью ($c \rightarrow \infty$), это уравнение сильно упрощается и в двух частных случаях сводится к уравнению Бесселя: для потенциального течения ($\alpha = 0, \Omega \sim r^{-2}$)

$$(3) \quad (p/\kappa)'' + \frac{1}{r} (p/\kappa)' - (n^2/r^2 + k^2) (p/\kappa) = 0$$

и для однородно-завихренного течения ($\Omega = \text{const}$)

$$(4) \quad p'' + \frac{1}{r} p' - (n^2/r^2 + k^2 - 4k^2\Omega^2/\kappa^2) p = 0.$$

Для двумерных ($k=0$) несжимаемых возмущений из (2) можно получить уравнение для амплитуды функции тока ψ :

$$(5) \quad \psi'' + \psi/r + \left[\frac{n}{\kappa} (\Omega'' + 3\Omega'/r) - n^2/r^2 \right] \psi = 0,$$

через которую выражаются амплитуды скорости и давления: $u = \psi'$, $v = in\psi/r$, $p = \rho(\kappa r\psi'/n + \alpha\psi)$. Как и уравнение Рэлея для амплитуды функции тока колебаний плоскопараллельного течения [5], уравнение (5) содержит особые точки r_n , в которых частота колебаний (с учетом доплеровского сдвига за счет движения по вертикали z) кратна угловой скорости потока: $\kappa = \omega - kU - n\Omega(r_n) = 0$. Для сшивки решений по обе стороны от особой точки r_n , очевидно, необходимо, как и в уравнении Рэлея, воспользоваться правилом обхода Линя: использовать нарастающие во времени решения ($\text{Im } \omega < 0$), которые затем аналитически продолжаются на случай нейтральных или затухающих решений ($\text{Im } \omega \geq 0$) [5].

Отметим, что в уравнении (5) вычет коэффициента в особой точке r_n пропорционален производной от завихренности стационарного потока: $\alpha' = 3\Omega' + r\Omega''$; в уравнении Рэлея вычет в особой точке имеет тот же смысл и пропорционален второй производной профиля скорости плоскопараллельного течения. Можно доказать также (см. [6]) утверждение, аналогичное теореме Рэлея [5]: нарастающие возмущения в невязком цилиндрическом вихре могут существовать лишь при наличии точек, где завихренность экстремальна: $\alpha' = 0$ (в плоскопараллельном течении это — точки перегиба профиля скорости).

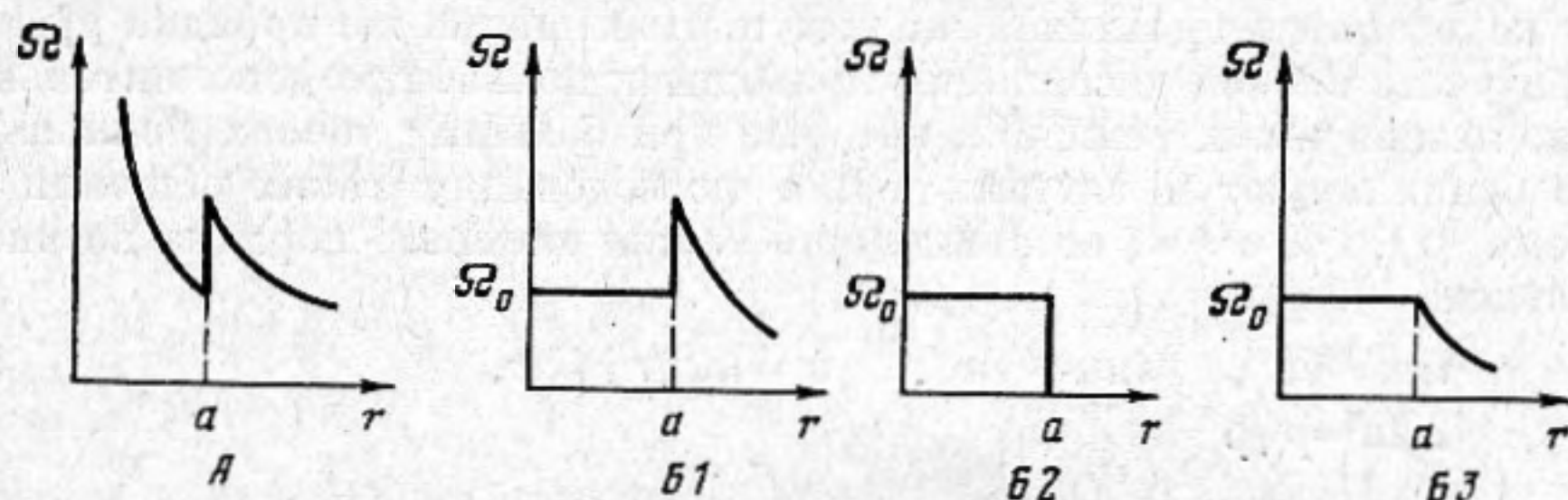
Найти общее решение (5) удастся лишь для течений с $\alpha' = 0$ (т. е. $\Omega(r) = B + A/r^2$) — это течения с постоянной, либо равной нулю завихренностью. Если $A = 0$, либо $B = 0$, то можно решить не только (5), но и более общую — трехмерную задачу, воспользовавшись уравнениями (3) либо (4). Непрерывный профиль угловой скорости аппроксимируется модельным профилем, составленным из нескольких частей с однородной завихренностью ($\alpha' = 0$) и разграниченных тангенциальными разрывами или изломами скорости. Для такого «кусочного» профиля можно исследовать малые возмущения, «склеивая» решения в каждой из частей с помощью граничных условий на разрывах. По аналогии с плоскопараллельным течением, где уравнение Рэлея допускает точное решение для кусочно-линейных профилей скорости, назовем такую «кусочную» аппроксимацию с последующей склейкой точных решений на разрывах алгебраическим методом.

Граничные условия на цилиндрическом тангенциальном разрыве скорости, расположенном при $r=a+\zeta$ (ζ — смещение колеблющейся границы относительно $r=a$), заключаются в непрерывности на движущейся границе давления и нормальной к этой границе компоненты скорости. Для амплитуд возмущений эти условия записываются в виде [2, 3]

$$(6) \quad \left[p + \zeta \frac{\partial p}{\partial r} \right]_{r-a}^{r+a} = [p + \rho \Omega^2 \zeta]_{r-a}^{r+a} = 0, \quad \left[\frac{v}{\kappa} \right]_{r-a}^{r+a} = 0.$$

С помощью этих граничных условий мы будем сшивать в соседних областях потока решения уравнений (3) или (4) для амплитуд.

Мы рассмотрим здесь простейшие «кусочные» профили угловой скорости, содержащие только один разрыв, который разделяет внешнюю область потенциального течения и ядро вихря с потенциальным (фиг. 1, А) либо с однородно-вращающимся ($\Omega = \text{const}$) течением



Фиг. 1. Профили угловой скорости для цилиндрических вихрей с кусочно-постоянной завихренностью: А — с потенциальным ядром, В — с однородно вращающимся ядром

(фиг. 1, В). Исследуем устойчивость таких течений в идеальной жидкости — обобщение задачи Кельвина — Гельмгольца для цилиндрической геометрии. В дальнейшем мы будем полагать $U=0$, т. е. рассмотрим двумерные течения с замкнутыми линиями тока. Обобщение полученных результатов на случай $U \neq 0$ очевидно: надо лишь учесть $U \neq 0$ в выражениях для κ , входящих в дисперсионные уравнения и другие формулы (см. [3, 4], где исследовалось влияние вращения на устойчивость жидких струй). Столь же тривиален учет капиллярного натяжения на разрыве (см. [3]).

Решения уравнений (3) или (4) мы выберем, учитывая ограниченность собственных решений при $r \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$. Во внутренней области (ядре) вихря это — модифицированные функции Бесселя первого рода I_n , а во внешней области — второго рода K_n . С помощью алгебраического метода мы получим дисперсионное уравнение для собственных значений частоты ω возмущений в кусочно-потенциальных течениях (фиг. 1, А):

$$(7) \quad \rho_i [\kappa_i^2 Z_{in}(ka) + \Omega_i^2] = \rho_o [\kappa_o^2 Z_{on}(ka) + \Omega_o^2].$$

Здесь индексы i и o означают соответствующие величины во внутренней и во внешней областях, в частности: $\Omega_i = \Omega$ ($r=a-0$), $\Omega_o = \Omega$ ($r=a+0$), $Z_{in}(ka) = [I_n(kr)/rI_n'(kr)]_{r=a}$, $Z_{on}(ka) = [K_n(kr)/rK_n'(kr)]_{r=a}$. Аналогично имеем дисперсионное уравнение для вихрей с равномерно вращающимся ядром (фиг. 1, В):

$$(8) \quad \rho_i \left[\kappa_i^2 s^2 \left(Z_{in}^{-1}(ska) - \frac{2n\Omega_i}{\kappa_i} \right)^{-1} + \Omega_i^2 \right] = \rho_o [\kappa_o^2 Z_{on}(ka) + \Omega_o^2],$$

где $s = (1 - 4\Omega_i^2/\kappa_i^2)^{1/2}$. Различные частные решения этих уравнений рассматривались в работах [2—4]. В частности, для вихря Ранкина ($\Omega_i = \Omega_o = \Omega$), устойчивость которого показана еще Кельвином [7], частоты собственных двумерных ($k=0$) колебаний равны: $\omega_1 = \Omega(n-1)$, $\omega_2 = \Omega n$.

В вязкой среде разрывы размываются в сдвиговые слои конечной ширины, где малые возмущения имеют довольно сложную структуру [5]. Можно, однако, модельным образом оценить влияние вязкости на колебания вихрей, оставаясь в рамках алгебраического метода и ограничиваясь исследованием «кусочных» профилей скорости. Для этого, подобно тому как это делалось ранее для плоского тангенциального разрыва [8], мы рассмотрим разрыв между вязкой и невязкой средой, т. е. учтем вязкость только в ядре цилиндрического вихря.

Решения уравнения (3) для малых возмущений в потенциальном течении идеальной жидкости тождественно удовлетворяют и более общей системе (1) для несжимаемой ($c \rightarrow \infty$) вязкой жидкости, если положить в ней $\alpha = 2\Omega + r\Omega' = 0$. Для однородно-вращающейся жидкости ($\Omega = \text{const}$) системе (1) (где $c \rightarrow \infty$) тождественно удовлетворяют двумерные невязкие колебания: решения уравнения (4) при $k \rightarrow 0$. Таким образом, в этих двух частных случаях учет вязкости не изменяет решения, полученные для малых колебаний в идеальной жидкости. Повышение же порядка уравнений при учете вязкой диссипации приводит к появлению дополнительных линейно-независимых решений, которые при больших числах Рейнольдса быстро осциллируют и затухают. Для исследования таких решений мы в системе (1), где $c \rightarrow \infty$, оставим лишь члены старшего порядка по числу Рейнольдса:

$$i\kappa u = \nu u'', \quad i\kappa w = \nu w'', \quad v' = i\nu n/r + i\kappa w, \\ 2\Omega u = p'/\rho$$

и тогда решение, быстро спадающее при удалении от границы $r=a$, имеет вид

$$(9) \quad u = N\varepsilon, \quad v = \left(\frac{i\nu}{qa} N + \frac{i\kappa}{q} H \right) \varepsilon, \quad w = H\varepsilon, \quad p = \frac{2\rho\Omega}{q} N\varepsilon,$$

где $\varepsilon = \exp[q(r-a)]$, $q = \sqrt{i\kappa/\nu}$ ($\text{Re } q > 0$), N и H — произвольные константы. Динамические граничные условия — непрерывность нормальных к подвижной границе компонент потока импульса, т. е. компонент $\sigma_{ik}n_k$ тензора напряжений [9] (\mathbf{n} — единичный вектор, нормальный к разрыву). В линейном приближении по амплитуде колебаний мы можем считать непрерывными на невозмущенной границе $r=a$ величины:

$$\sigma_{rr} + \xi \frac{\partial \sigma_{rr}^{(0)}}{\partial r} - \sigma_{r\varphi}^{(0)} \frac{\partial \xi}{a \partial \varphi} = [-p + 2\rho\nu v' - \rho a \Omega^2 \xi + i\nu \rho v \Omega' \xi] E,$$

$$\sigma_{r\varphi} + \xi \frac{\partial \sigma_{r\varphi}^{(0)}}{\partial r} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} \frac{\partial \xi}{a \partial \varphi} = \left[u' - \frac{u}{r} - \frac{i\nu v}{r} + (r\Omega'' + \Omega') \xi \right] \rho\nu E,$$

$$\sigma_{rz} + \xi \frac{\partial \sigma_{rz}^{(0)}}{\partial r} - \sigma_{z\varphi}^{(0)} \frac{\partial \xi}{a \partial \varphi} = [w' - i\kappa v] \rho\nu E.$$

Здесь $\sigma_{ik}^{(0)}$ — невозмущенный тензор напряжений, $E = \exp(i\omega t - i\nu\varphi - i\kappa z)$. Эти граничные условия вместе с кинематическим условием (непрерывность величины v/κ) позволяют сплести невязкие решения уравнения (3) во внешней области вихря и линейную комбинацию невязких и затухающих вязких (9) решений для колебаний в ядре вихря. Для кусочно-потенциальных течений мы получим вместо (7) дисперсионное уравнение с учетом малой вязкости:

$$\rho_o [\kappa_o^2 Z_{on} + \Omega_o^2] = \rho_i \left[\Omega_i^2 + \kappa_i^2 Z_{in} + \frac{2i\nu}{\kappa_i a^2} (\kappa_i^2 + 4\Omega_i^2 + 3n\kappa_i \Omega_i + \right. \\ \left. + n^2 \kappa_i^2 Z_{in}^2 - 2n^2 \kappa_i^2 Z_{in} - 4i\nu \Omega_i \kappa_i Z_{in} - 2k^2 a^2 \kappa_i^2 Z_{in}) \right].$$

Аналогичным образом мы получим дисперсионное уравнение для двумерных возмущений в вихрях с однородно-вращающимся ядром с учетом малой вязкости внутри него:

$$\rho_0(n\Omega_0^2 - \kappa_0^2) = \rho_i[n\Omega_i^2 + \kappa_i(\kappa_i + 2\Omega_i)] - \frac{4i\nu}{a^2} \rho_i n \cdot (n-1) \kappa_i.$$

Малая поправка к частоте $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, обусловленная вязкой диссипацией для вихря Ранкина, принимает значение в первом приближении $\Delta\omega = i\nu n(n-1)/a^2$ и определяет затухание собственных колебаний.

Рассмотрим теперь рассеяние звуковых волн на двумерном вихре с характерной частотой Ω_0 и размером a , малым по сравнению с длиной звуковой волны $\lambda = 2\pi c/\omega$. Разложив плоскую звуковую волну, распространяющуюся в плоскости xz , по цилиндрическим гармоникам, мы получим поле амплитуды $\exp(i\omega t - ikz)$ возмущений давления вдали от вихря в виде

$$p = e^{-i\eta r \cos \varphi} + \frac{f(\varphi)}{\sqrt{r}} e^{-i\eta r} = \sqrt{\frac{1}{2\pi\eta r}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n e^{-in\varphi} \times \\ \times \left[e^{i(\eta r - n\pi/2 - \pi/4)} + \left(1 + \sqrt{\frac{2\pi\eta}{i}} f_n\right) e^{-i(\eta r - n\pi/2 - \pi/4)} \right].$$

Здесь $\eta = \sqrt{(\omega/c)^2 - k^2} = \frac{\omega \cos \theta}{c}$, $f(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{-in\varphi}$ — амплитуда рассеяния.

Коэффициент отражения R_n каждой цилиндрической гармоники выражается через парциальную амплитуду $f_n = \sqrt{\frac{i}{2\pi\eta}} (R_n - 1)$. Дифференциальное сечение упругого рассеяния

$$d\sigma_e = |f(\varphi)|^2 d\varphi = \frac{1}{2\pi\eta} \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} (R_n - 1) (R_m^* - 1) e^{i(m-n)\varphi} d\varphi$$

определяется набором коэффициентов отражения R_n для цилиндрических волн с $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Однако при $\eta a \ll 1$ вихрь целиком находится в неволновой зоне, где звуковое поле цилиндрических гармоник убывает как $r^{2|n|}$. Поэтому коэффициенты отражения мало ($\approx (a/\lambda)^{2|n|}$) отличаются от единицы, так что сечения рассеяния и поглощения определяются лишь первыми гармониками.

Решая уравнение (2) при $n=0$ методом сращиваемых асимптотических разложений [10] по малому параметру $\eta a \sim \Omega a/c \sim \omega a/c$, нетрудно показать, что в первом приближении по $(\eta a)^2 \ll 1$ коэффициент отражения для нулевой гармоники $R_0 = 1$. Для $|n| \geq 1$ в области вне ядра вихря ($r \gg a$) можно пренебречь движением среды ($\Omega = 0$). Решение уравнения (2) здесь принимает вид

$$(10) \quad p = H_n^{(1)}(\eta r) + R_n H_n^{(2)}(\eta r) = (1 + R_n) I_n(\eta r) + i(1 - R_n) N_n(\eta r).$$

В квазистатической области $r \ll |n|c/\omega$ можно пренебречь сжимаемостью, а также (при $n \neq 0$) наклоном волнового фронта к оси z : $ka \ll 1$. Для двумерных несжимаемых возмущений в идеальной жидкости мы получим уравнение (5) для амплитуды функции тока, через которую можно выразить амплитуду давления. В промежуточной области $a \ll r \ll \lambda$ решение

уравнения (5) имеет вид

$$(11) \quad \begin{aligned} \psi &= F(r/a)^{|n|} + G(r/a)^{-|n|}, \\ p &= \rho\omega [F(r/a)^{|n|} - G(r/a)^{-|n|}]. \end{aligned}$$

Сравнивая это решение с асимптотическим поведением решения (10) в области $\eta r \ll 1$, мы получим в первом исчезающем приближении

$$(12) \quad R_n = 1 + \frac{2\pi i}{|n|!(|n|-1)!} \left(\frac{\eta a}{2}\right)^{2|n|} q_n,$$

где $q_n = G/F$. Таким образом, чтобы найти коэффициент отражения парциальных волн с $|n| \geq 1$, необходимо решить уравнение (5) для амплитуды несжимаемых двумерных возмущений с граничными условиями (11) при $r \rightarrow \infty$ и определить величину $q_n = G/F$.

Для $n = \pm 1$ такое решение имеет вид $\psi = Ar(\Omega \mp \omega)$, и при $r \gg a$, где движение потенциально ($\Omega \approx \Omega_0 r^{-2}$), имеем $\psi = A(\Omega_0/r \mp \omega r)$. Величина $q_{\pm 1} = \mp \Omega_0/\omega$ действительна, так что в идеальной жидкости отражение первых цилиндрических гармоник является упругим. Этими гармониками определяется дифференциальное сечение упругого рассеяния плоской волны:

$$(13) \quad d\sigma_e = \frac{\pi a}{2} (\Omega_0 a \cos \theta/c)^3 (\omega/\Omega_0) \sin^2 \varphi d\varphi.$$

Рассмотрим поглощение звука на вихре, определяемое вязкой диссипацией в процессе рассеяния. Сечение вязкого поглощения можно оценить с помощью алгебраического метода для «кусочных» профилей угловой скорости Ω . Сплавая на границе $r = a$ решение с учетом малой вязкости внутри ядра вихря и решение (11) вне ядра, имеем

$$q_n = \frac{\rho_o(\kappa_o^2 + |n|\Omega_o^2) - \rho_i(\kappa_i T_n + |n|\Omega_i^2) + 2i\nu\rho_i\kappa_i S_n/a^2}{\rho_o(\kappa_o^2 - |n|\Omega_o^2) + \rho_i(\kappa_i T_n + |n|\Omega_i^2) - 2i\nu\rho_i\kappa_i S_n/a^2},$$

где для кусочно-потенциальных течений (фиг. 1, А): $T_n = \kappa_i$, $S_n = 2(n^2 - |n|) - \frac{n\Omega_i}{\kappa_i} \left(|n| - 4 + 4\frac{n\Omega_i}{\kappa_i}\right)$, а для вихрей с однородно-вращающимся ядром (фиг. 1, В): $T_n = \kappa_i + 2n\Omega_i/|n|$, $S_n = 2(n^2 - |n|)$. Рассмотрим величину

$$(14) \quad 1 - |R_n|^2 = \frac{16\pi\nu\kappa_o^2\kappa_i S_n (\eta a/2)^{2|n|}}{|n|!(|n|-1)! a^2 [\kappa_i T_n + |n|\Omega_i^2 + (\kappa_o^2 - |n|\Omega_o^2)\rho_o/\rho_i]^2},$$

которая характеризует поглощение цилиндрической волны. Для вихрей с однородно-вращающимся ядром знак выражения (14) определяется знаком величины $\kappa_i = \omega - n\Omega_i$: если $\kappa_i < 0$ — знак усиливается ($|R_n| > 1$). В частности, для вихря Ранкина ($\rho_o = \rho_i$, $\Omega_o = \Omega_i = \Omega$)

$$1 - |R_n|^2 = \frac{8\pi\nu}{(|n|-1)!(|n|-2)! a^2} \left(\frac{\eta a}{2}\right)^{2|n|} \frac{\kappa}{(\kappa + \Omega)^2}.$$

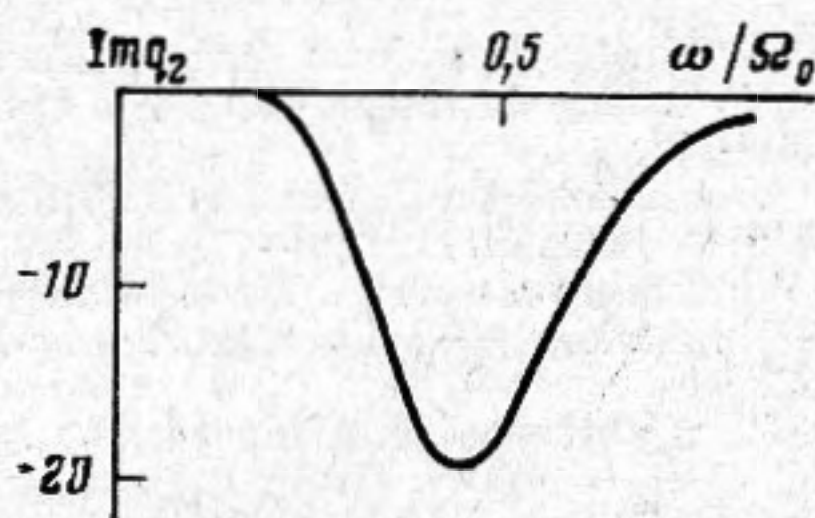
Усиление звука вращающимся жидким цилиндром представляет собой акустический аналог эффекта, рассмотренного Я. Б. Зельдовичем, который показал возможность усиления электромагнитных волн при рассеянии на вращающемся проводящем цилиндре, а также гравитационных волн на коллапсирующем вращающемся теле [11].

Заметим, однако, что механизм вязкой диссипации звука в рассмотренных нами примерах специфичен и не сводится к простому поглощению звука. Как показано выше, такое поглощение отсутствует для двумерных потенциальных колебаний в однородно-завихренной жидкости. Диссипа-

ция же звука, преломленного на разрыве, определяется линейной трансформацией в быстрозатухающие вихревые колебания (14).

Рассмотренные выше простые примеры являются модельными, и полученные решения заведомо непригодны при переходе к непрерывному профилю скорости, если ширина размытия разрыва l не мала по сравнению с вязким масштабом $l_v = \sqrt{\nu/\kappa_i}$. В обратном предельном случае, когда профиль $\Omega(r)$ гладкий и $l \gg l_v$, мы можем пользоваться приближением идеальной жидкости и решать уравнение (5), учитывая наличие малой вязкости лишь вблизи особых точек $\omega = n\Omega(r) = 0$. При этом учет малой вязкости сводится к правилу обхода Линя [5]. Линейная трансформация в быстроосциллирующую моду в окрестности резонансных точек рассматривалась для различных типов волн [12]. В частности, для звука исследо-

Фиг. 2. Величина $\text{Im } q_2$ для вихря с гладким профилем угловой скорости



ван механизм поглощения и усиления за счет резонанса волны с частицами плоскопараллельного потока [13, 14].

Здесь мы исследуем резонансный механизм усиления звука при отражении от цилиндрического вихря с произвольным непрерывным профилем угловой скорости $\Omega(r)$. Для этого рассмотрим интегральное соотношение, подобное полученному Майлсом для плоскопараллельных течений [15]. Умножим (5) на $r\psi^*$ и проинтегрируем от $r=0$ до $r=r_0 \gg a$ (a — размер вихря). Мы получим

$$r_0 |\psi(r_0)|^2 \text{Im} \frac{\psi'}{\psi} \Big|_{r=r_0} = \pi |\psi(r_n)|^2 \left[\frac{3\Omega' + r\Omega''}{|\Omega'|} \right]_{r=r_n},$$

где r_n — резонансная точка: $\Omega(r_n) = \omega/n$. Заметим, что особая точка в решении уравнения (5) и связанный с ней механизм диссипации в идеальной жидкости существуют лишь при $n \geq 2$. Используя решение (11) для

$r \gg a$, мы положим $\frac{\psi'}{\psi} = \frac{n}{r} \frac{F(r/a)^{|n|} - G(r/a)^{-|n|}}{F(r/a)^{|n|} + G(r/a)^{-|n|}}$, и из (12) получим

$$1 - |R_n|^2 = 4\pi^2 n^{-2} [(|n|-1)!]^{-2} (\eta r_0/2)^{2|n|} |\psi| + \\ + r\psi'/n \Big|_{r=r_0}^{-2} \left[|\psi|^2 \frac{r\Omega'' + 3\Omega'}{|\Omega'|} \right]_{r=r_n}.$$

Таким образом, знак диссипации — усиление либо ослабление цилиндрической звуковой волны при отражении от вихря — определяется знаком производной от завихренности $\alpha' = 3\Omega' + r\Omega''$ в резонансной точке. Обычно завихренность монотонно убывает при удалении от оси вихря, и, следовательно, звуковая волна усиливается при отражении. При этом сечение поглощения плоской волны на цилиндрическом вихре в идеальной жидкости

$$(15) \quad \sigma_r = \frac{1}{\eta} \sum_{n=2}^{\infty} (1 - |R_n|^2) \approx \frac{1}{\eta} (1 - |R_2|^2) = \frac{\pi a}{8} \left(\frac{\omega a \cos \theta}{c} \right)^3 \text{Im } q_2$$

будет отрицательным. Для вихря с профилем $\Omega = \Omega_0 (r/a)^{-2} [1 - \exp(-r^2/a^2)]$ величина $\text{Im } q_2$ получена численным расчетом (фиг. 2).

Следует отметить, что при $\omega < \Omega_0$ сечения поглощения (15) и упругого рассеяния (13) оказываются одного порядка по малой величине $\Omega_0 a/c$. Таким образом, рассеяние низкочастотной плоской звуковой волны на цилиндрическом вихре в идеальной жидкости определяется двумя физическими процессами: упругим рассеянием звуковой энергии на колебаниях вихря как целого (гармоники $n = \pm 1$) и резонансным усилением гармоники $n = 2$. Естественно ожидать также, что резонансное усиление звука играет существенную роль и при распространении инфразвука в турбулентной среде со случайным распределением вихрей.

Авторы выражают признательность А. А. Андронову за постановку задачи и обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hall M. G. Vortex breakdown. Annual Rev. Fluid Mech., 1972, 4, 87–99.
2. Rotunno R. A note on the stability of a cylindrical vortex sheet. J. Fluid Mech., 1978, 87, 4, 761–771.
3. Uberoi M. S., Show C. J., Narain J. P. Stability of coaxial rotating jet and vortex. Phys. Fluids, 1972, 15, 10, 1718–1727.
4. Lessen M., Deshpande N. V., Hadji-Ohanes B. Stability of a potential vortex with a non-rotating and rigid-body rotating top-hat jet core. J. Fluid Mech., 1973, 60, 3, 459–466.
5. Бетцов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. М., «Мир», 1971.
6. Michalke A., Timme A. On the inviscid instability of certain twodimensional vortex-type flows. J. Fluid Mech., 1967, 29, 4, 647–666.
7. Ламб Г. Гидродинамика. М., Гостехиздат, 1947.
8. Кикина Н. Г. О влиянии вязкости на неустойчивость тангенциальных разрывов в несжимаемой среде. Акуст. ж., 1967, 13, 2, 213–217.
9. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехтеориздат, 1953.
10. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
11. Зельдович Я. Б. Усиление цилиндрических электромагнитных волн при отражении от вращающегося тела. Ж. эксп. и теор. физ., 1972, 62, 6, 2076–2081.
12. Ерохин Н. С., Моисеев С. С. Вопросы теории линейной и нелинейной трансформации волн в неоднородных средах. Успехи физ. наук, 1973, 109, 2, 225–258.
13. Фабрикант А. Л. Резонансное взаимодействие звуковых волн с плоскопараллельным потоком. Акуст. ж., 1976, 22, 1, 107–114.
14. Андронов А. А., Фабрикант А. Л. Затухание Ландау, ветровые волны и свисток. Сб. Нелинейные волны, под ред. А. В. Гапонова. М., «Наука», 1979, 68–104.
15. Miles J. W. On the generation of surface waves by shear flows. J. Fluid Mech., 1957, 3, 2, 185–204.

Институт прикладной физики
Академии наук СССР

Поступила
31 мая 1979 г.