АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXVI 1980 Вып. 3

УДК 534.24

О ПОВЕРХНОСТНЫХ УПРУГИХ ВОЛНАХ В ТОЛСТОЙ ПЛИТЕ

А. С. Зильберглейт

Построена и изучена система поверхностных волн, распространяющихся вдоль свободного торца полубесконечного упругого слоя (толстой плиты), на боковых гранях которого обращаются в нуль нормальное смещение (напряжение) и касательные напряжения (смещения).

В течение последнего времени было получено много новых результатов, касающихся волн, способных распространяться у поверхности твердых тел; большинство из них обсуждается в обстоятельном обзоре [1]. В настоящей работе строится и изучается система поверхностных волн для полубесконечного упругого однородного изотропного слоя (толстой пластины или плиты). Эти волны существенно трехмерные, что отличает их от ранее изученных поверхностных волн в изотропной среде.

Представим комплексную амплитуду $\mathbf{u}=\mathbf{u}(x, y, z)\equiv\{u, v, w\}$ вектора смещения $\mathbf{v}(x, y, z, t)=\operatorname{Re}[\mathbf{u}(x, y, z)\exp(i\omega t)]$ через потенциалы Гельмгольца — Ламе:

$$u=\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{rot}\boldsymbol{\psi};\qquad \boldsymbol{\psi}=\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\};\tag{1}$$

$$\Delta\varphi+k_l^2\varphi=0;\qquad \Delta\boldsymbol{\psi}+k_t^2\boldsymbol{\psi}=0;\tag{2}$$

где $k_l=\omega/c_l$, $k_t=\omega/c_t$ — волновые числа продольных и поперечных волн соответственно, c_l, c_t — их скорости распространения, ω — частота колебаний. Выбор вектор-потенциала, как обычно, фиксируется условием

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\psi}=0.\tag{3}$$

Уравнения (2) допускают решения специального вида:

$$\begin{aligned}&\varphi=Ae^{-i\alpha x+\beta y}\cos pz;\qquad \beta=\sqrt{\alpha^2+p^2-k_l^2};\\ &\psi_{1,2}=A_{1,2}e^{-i\alpha x+\gamma y}\sin pz;\qquad \gamma=\sqrt{\alpha^2+p^2-k_t^2};\\ &\psi_3=A_3e^{-i\alpha x+\gamma y}\cos pz;\end{aligned}\tag{4}$$

и соответственно

$$\begin{aligned}&\varphi=Be^{-i\alpha x+\beta y}\sin pz;\qquad \psi_{1,2}=B_{1,2}e^{-i\alpha x+\gamma y}\cos pz;\\ &\psi_3=B_3e^{-i\alpha x+\gamma y}\sin pz\end{aligned}\tag{5}$$

при произвольных постоянных A, A_j, B, B_j, α, p. Комплексные амплитуды вектора смещения и тензора напряжений в случае (4):

$$\begin{aligned}&u=[-i\alpha Ae^{\beta y}+(-pA_2+\gamma A_3)e^{\gamma y}]e^{-i\alpha x}\cos pz;\\ &v=[\beta Ae^{\beta y}+(pA_1+i\alpha A_3)e^{\gamma y}]e^{-i\alpha x}\cos pz;\\ &w=[-pAe^{\beta y}-(\gamma A_1+i\alpha A_2)e^{\gamma y}]e^{-i\alpha x}\sin pz;\\ &\sigma_x=2G[(p^2-\beta^2-{}^1/{}_2k_t^2)Ae^{\beta y}+i\alpha(pA_2-\gamma A_3)e^{\gamma y}]e^{-i\alpha x}\cos pz;\\ &\sigma_y=2G[(p^2+\alpha^2-{}^1/{}_2k_t^2)Ae^{\beta y}+\gamma(pA_1+i\alpha A_3)e^{\gamma y}]e^{-i\alpha x}\cos pz;\end{aligned}\tag{6}$$

$$\sigma_z=2G[(\alpha^2-\beta^2-{}^1/{}_2k_t^2)Ae^{\beta y}-p(\beta A_1+i\alpha A_2)e^{\gamma y}]e^{-i\alpha x}\cos pz;$$
$$\tau_{xy}=G\{-2i\alpha\beta Ae^{\beta y}+[-i\alpha pA_1-\gamma pA_2+(\gamma^2+\alpha^2)A_3]e^{\gamma y}\}e^{-i\alpha x}\cos pz;$$
$$\tau_{yz}=G\{-2\beta pAe^{\beta y}+[-(\gamma^2+\beta^2)A_1+i\alpha\gamma A_2-i\alpha pA_3]e^{\gamma y}\}e^{-i\alpha x}\sin pz;$$
$$\tau_{xz}=G\{2i\alpha pAe^{\beta y}+[i\alpha\gamma A_1+(p^2-\alpha^2)A_2-\gamma pA_3]e^{\gamma y}\}e^{-i\alpha x}\sin pz,$$

где G — модуль сдвига. Аналогичные выражения для случая (5) ради краткости не приводим.

Рассмотрим теперь упругий полубесконечный слой Q толщины $2h$, $Q=\{|x|<\infty;\ -\infty<y<0;\ |z|<h\}$, торец которого свободен от напряжений:

(7) $$\sigma_y=\tau_{xy}=\tau_{zy}=0,\qquad y=0,$$

а боковые грани защемлены без трения:

(8) $$w=0;\quad \tau_{xz}=\tau_{yz}=0,\quad z=\pm h.$$

Будем строить систему поверхностных волн, бегущих вдоль свободного торца и экспоненциально затухающих по глубине слоя. Подробно изучим симметричные (по z) волны, для чего определим значения входящих в (4) постоянных p, β и γ следующим образом:

$$p=p_n=n\pi/h,$$

(9) $$\beta=\beta_n=\sqrt{\alpha^2+\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2-k_l^2};$$

$$\gamma=\gamma_n=\sqrt{\alpha^2+\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2-k_t^2};\qquad n=1,2,\ldots$$

Как видно из (6), граничные условия (8) при этом удовлетворяются. Условия же (7) вместе с (3) приводят к однородной системе четырех линейных алгебраических уравнений относительно постоянных A, A_1, A_2, A_3:

(10)
$$(\alpha^2+p_n^2-{}^1/{}_2k_t^2)A+p_n\gamma_nA_1+i\alpha\gamma_nA_3=0;$$
$$2i\alpha\beta_nA+i\alpha p_nA_1+\gamma_np_nA_2-(\gamma_n^2+\alpha^2)A_3=0;$$
$$2\beta_np_nA+(\gamma_n^2+p_n^2)A_1-i\alpha\gamma_nA_2+i\alpha p_nA_3=0;$$
$$i\alpha A_1-\gamma_nA_2+p_nA_3=0.$$

Нетривиальное решение этой системы существует, если выполняется хотя бы одно из равенств:

(11) $$\gamma_n^2=\alpha^2+(n\pi/h)^2-k_t^2=0;$$

(12) $$\alpha^2-{}^1/{}_2k_t^2=0;$$

(13) $$\left(\alpha^2+\frac{n^2\pi^2}{h^2}\right)\sqrt{\left(\alpha^2+\frac{n^2\pi^2}{h^2}-k_l^2\right)\left(\alpha^2+\frac{n^2\pi^2}{h^2}-k_t^2\right)}-$$
$$-\left(\alpha^2+\frac{n^2\pi^2}{h^2}-\frac{1}{2}k_t^2\right)^2=0,$$

определяющих при заданных значениях частоты ω, толщины слоя h, коэффициента Пуассона ν и номера n допустимые значения постоянной распространения $\alpha=\alpha_n$. Рассмотрим по порядку дисперсионные соотношения (11)–(13) и свойства задаваемых ими волн.

Уравнение (11) не представляет особого интереса, так как определяет не поверхностные, а объемные волны сдвига ($A=0$ в силу (10) при условии (11)).

В случае (12), принимая во внимание (9), имеем:

$$\alpha=\frac{k_t}{\sqrt{2}}=\frac{\omega}{c_t\sqrt{2}};$$

$$(14)\qquad \beta_n=\frac{n\pi}{h}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\left(1-2\frac{c_t^2}{c_l^2}\right)};\qquad \gamma_n=\frac{n\pi}{h}\sqrt{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}};$$

$$\omega_n=n\pi\sqrt{2}\frac{c_t}{h};\qquad n=1,2,\ldots,$$

откуда ясно, что дисперсионное соотношение (12) дает счетный набор поверхностных волн с одним и тем же волновым числом, пропорциональным частоте, но с разными постоянными затухания, зависящими от частоты согласно (14). При данном значении частоты затухание волны монотонно растет с увеличением ее номера. С ростом частоты эти волны последовательно (по порядку номеров) трансформируются из поверхностных в гибридные (объемно-поверхностные). В самом деле, так как при всех значениях коэффициента Пуассона ν, $0\leqslant\nu\leqslant{}^1/_2$, $c_l^2\geqslant 2c_t^2$, то $\beta_n>0$ для всех ω и n, так что потенциальная составляющая вектора смещения рассматриваемых волн всегда экспоненциально затухает при удалении от границы. С другой стороны, на n-й критической частоте ω_n постоянная затухания γ_n вихревой части n-й волны обращается в нуль, а затем, при $\omega>\omega_n$, становится мнимой.

Таким образом, дисперсионное уравнение (12) описывает по существу низкочастотную ветвь изучаемой совокупности поверхностных волн. Подчеркнем, что дисперсия здесь отсутствует, фазовая скорость c совпадает с групповой $c_г$, $c=c_г=\omega/\alpha=c_t\sqrt{2}$, и лежит между скоростями c_t и c_l объемных волн, $c_t<c<c_l$.

Когда $h\to\infty$, т. е. слой Q превращается в полупространство, из (12) и (10) следует, что $A\to 0$, $A_3\to 0$. Поэтому из (6), (14) видно, что при $h\to\infty$ все поверхностные волны низкочастотной ветви (12) переходят в объемные волны сдвига. Можно, следовательно, считать, что эти поверхностные волны порождаются объемными поперечными волнами, и рассматривать это обстоятельство как пример определенной «неустойчивости» последних, неоднократно отмечавшейся ранее [1].

В предельном случае $h\to 0$ и в статическом пределе $\omega\to 0$ волны низкочастотной ветви, как это и должно быть, исчезают.

Система (10) при условии (12) позволяет выразить три из постоянных A, A_1, A_2, A_3 через четвертую:

$$A^{(n)}=-\left[1+\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\left(1-2\frac{c_t^2}{c_n^2}\right)\right]^{-1/2}A_1^{(n)};$$

$$A_2^{(n)}=i\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)\frac{\omega_n}{\omega}\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^{-1/2}A_1^{(n)};$$

$$A_3^{(n)}=i\frac{\omega_n}{\omega}A_1^{(n)};\qquad n=1,2,\ldots,$$

что вместе с (6) дает окончательные формулы для полей смещений и напряжений n-й волны. Для примера приведем выражение y-компоненты вектора смещения, нормальной к свободной поверхности:

$$(15)\qquad v^{(n)}(x,y,z)=-\frac{n\pi}{h}A_1^{(n)}e^{-i\frac{\omega}{c_t\sqrt{2}}x+\beta_n(\omega)y}\cos\frac{n\pi z}{h}.$$

Характерно, что вихревая составляющая здесь, а значит и в напряжении σ_y, отсутствует.

Обратимся теперь к дисперсионному соотношению (13), которое, как будет показано, описывает поверхностные волны, порожденные волной Рэлея и являющиеся ее обобщением. В самом деле, (13) переходит в уравнение для постоянной распространения рэлеевской волны при $h\to\infty$. Более того, при любом значении толщины слоя h (13) совпадает по форме с уравнением Рэлея после введения новой искомой величины $\xi^2=\alpha^2+(n\pi/h)^2$. Поэтому из (13) и (9) находим:

$$\alpha_n^2+\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2=k_R^2;\quad \alpha_n=\frac{\omega}{c_R}\sqrt{1-\frac{\Omega_n^2}{\omega^2}};$$

$$\Omega_n=n\pi\frac{c_R}{h},\quad n=1,2,\ldots;$$

$$\beta=\frac{\omega}{c_R}\sqrt{1-\frac{c_R^2}{c_l^2}}, \tag{16}$$

$$\gamma=\frac{\omega}{c_R}\sqrt{1-\frac{c_R^2}{c_t^2}},$$

где $k_R=\omega/c_R$, c_R — волновое число и скорость распространения рэлеевской волны. Равенства (16), (6) определяют систему поверхностных волн, n-я волна которой существует, начиная со своей критической частоты Ω_n, т. е. при $\omega>\Omega_n$. Таким образом, с увеличением частоты колебаний число волн типа (16) растет и, следовательно, (13) определяет высокочастотную ветвь поверхностных волн, существующих в области Q при условиях (7), (8).

Волны (13) сильно отличаются по свойствам от волн низкочастотной ветви (12). Так, первые обладают одинаковыми постоянными затухания β и γ (16), причем величины β и γ в точности те же, что и для классической рэлеевской волны. Напротив, постоянные распространения α_n (16) различны для волн разных номеров и нелинейно зависят от частоты (дисперсия). Фазовая скорость $c^{(n)}$ n-й волны (13) дается равенством

$$c^{(n)}=\omega/\alpha_n=c_R/\sqrt{1-\Omega_n^2/\omega^2}$$

и удовлетворяет неравенству $c^{(n)}>c_R$ для всех n, $\omega>\Omega_n$. Групповая скорость $c_{\text{г}}^{(n)}$ есть

$$c_{\text{г}}^{(n)}=\left(\frac{d\alpha_n}{d\omega}\right)^{-1}=c_R\sqrt{1-\frac{\Omega_n^2}{\omega^2}},$$

так что $0<c_{\text{г}}^{(n)}<c_R$. Как известно [2, 3], групповая скорость совпадает со скоростью переноса энергии. Поэтому все волны высокочастотной ветви (13) переносят энергию в направлении распространения ($c^{(n)}c^{\text{г}n)}>0$), и явление «обратной волны», обнаруженное, например, для некоторых волн Лэмба (см. [3–5] и указанную там литературу), в данном случае отсутствует. Вообще дисперсионные свойства волн (13) полностью совпадают со свойствами нормальных волн акустических (газовых) или электродинамических однородных изотропных волноводов с идеальными стенками. В частности, справедливо тождество

$$c^{(n)}c_{\text{г}}^{(n)}=c_R^2=\text{const}(\omega),$$

аналог которого хорошо известен для волноводных волн.

Связь между амплитудами A, A_1, A_2, A_3, вытекающая из (10), (16), имеет вид

$$A_1^{(n)}=-\frac{\Omega_n}{\omega}\left(1-\frac{c_R^2}{c_l^2}\right)\left(1-\frac{c_R^2}{c^2}\right)^{-1/2}A^{(n)};$$

$$A_2^{(n)}=0;$$

$$A_3^{(n)}=i\left(1-\frac{c_R^2}{2c_t^2}\right)\left(1-\frac{\Omega_n^2}{\omega^2}\right)^{1/2}\left(1-\frac{c_R^2}{c_t^2}\right)^{-1/2}A^{(n)},\ n=1,2,\ldots$$

У вектор-потенциала в этом случае отличны от нуля лишь две составляющие, параллельные свободной поверхности. Формула для смещения, нормального к торцу, есть

$$v^{(n)}(x,y,z)=\frac{\omega}{c_R}A^{(n)}\left[e^{\beta(\omega)y}-i\left(1-\frac{c_R^2}{2c_t^2}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(1-\frac{\Omega_n^2}{\omega^2}\right)^{1/2}\left(1-\frac{c_R^2}{c_t^2}\right)^{-1/2}e^{\gamma(\omega)y}\right]e^{-i\alpha_n(\omega)x}\cos\frac{n\pi z}{h},$$

причем β, γ и α_n берутся здесь из (16). В отличие от (15), здесь присутствует вклад как потенциальной, так и вихревой составляющей смещения.

Случай антисимметричных (по z) волн исследуется аналогично. Следует лишь вместо (4) воспользоваться решением (5), а для выполнения условий (8) потребовать вместо (9) справедливости равенств

$$p=p_n=\frac{\pi}{h}\left(n-\frac{1}{2}\right);$$

$$\beta=\beta_n=\sqrt{\frac{\pi^2}{h^2}\left(n-\frac{1}{2}\right)^2+\alpha^2-k_l^2};$$

$$\gamma=\gamma_n=\sqrt{\frac{\pi^2}{h^2}\left(n-\frac{1}{2}\right)^2+\alpha^2-k_t^2};\quad n=1,2,\ldots.$$

Условия (7) и (3) приводят при этом к тем же дисперсионным уравнениям (11)—(13), в которых следует только заменить всюду величину

$$\frac{\pi}{h}n \text{ на } \frac{\pi}{h}\left(n-\frac{1}{2}\right).$$

Обсудим в заключение вопрос о поверхностных волнах плиты с другими условиями на границах $z\pm h$.

Никаких затруднений не вызывает анализ задачи при условиях

$$\sigma_z=0,\ u=v=0,\ z=\pm h.$$

Результаты здесь те же, что и в рассмотренной ситуации, только в симметричном случае $p=\frac{\pi}{h}\left(n-\frac{1}{2}\right)$, а в антисимметричном $-p=\frac{n\pi}{h}$.

С физической точки зрения не приходится сомневаться в том, что достаточно богатая система поверхностных волн должна существовать в области Q и при основных условиях на боковых поверхностях:

$$\sigma_z=\tau_{xz}=\tau_{yz}=0,\quad z=\pm h,$$

или

$$u=v=w=0,\ z=\pm h,$$

однако структура соответствующих решений принципиально сложнее. Построение таких волн в явном виде вряд ли возможно и требует преодоления трудностей по крайней мере не меньших, чем при решении плоской задачи теории упругости для полуполосы при основных условиях на боковых гранях и торце.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Викторов И. А.* Типы звуковых поверхностных волн в твердых телах (обзор). Акуст. ж., 1979, *25*, 1, 1–17.
2. *Мандельштам Л. И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М., «Наука», 1972.
3. *Achenbach J. D.* Wave Propagation in Elastic Solids. Amsterdam, North-Holl. Publ. Co., 1976.
4. *Микер Т., Мейтцлер А.* Волноводное распространение в протяженных цилиндрах и пластинках. Физическая акустика. Под ред. У. Мэзона, т. 1, ч. А. М., «Мир», 1966, 140–203.
5. *Зильберглейт А. С., Нуллер Б. М.* Обобщенная ортогональность однородных решений в динамических задачах теории упругости. Докл. АН СССР, 1977, *234*, 2, 333–335.

Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе
Академии наук СССР

Поступила
3 мая 1979 г.