

УДК 534.26

О СОПРОТИВЛЕНИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ВЫСОТЫ

В. А. Козырев, Е. Л. Шендеров

На основе интегрального уравнения Гельмгольца разработан алгоритм и программа для ЭВМ, позволяющие рассчитывать импеданс излучения конечного цилиндра и поле на его поверхности в широком диапазоне волновых размеров при смешанных граничных условиях и осесимметричном возбуждении. Результаты расчета сопоставляются с различными предельными случаями.

Численные методы позволяют определять акустическое поле излучателей, форма поверхности которых не совпадает ни с одной координатной поверхностью, допускающей разделение переменных в уравнении Гельмгольца. Поверхность цилиндра конечной высоты является одной из поверхностей такого типа. Решение задачи излучения цилиндра конечной высоты имеет ряд приложений в акустике. Кроме того, конечный цилиндр является удобной моделью для оценки эффективности вычислительных методов, так как предельные случаи высокого кругового цилиндра и низкого (круглая пластина) допускают аналитические решения.

Работы, относящиеся к данной задаче, разделяются на две группы. В ряде работ излучатель заменяется похожим на него излучателем другой формы, для которой действуют аналитические методы [1-4], другие основаны на полуаналитических [5, 6] и численных методах, использующих интегральное уравнение Гельмгольца [7-11]. Подобная библиография по данному вопросу содержится в работах [9-13].

Следует отметить, что все численные методы решения задач об излучении звука поверхностями сложных форм приводят к необходимости выполнения весьма большого объема вычислений, а успехи в этом направлении зачастую определяются мощностью ЭВМ, имеющихся в распоряжении авторов. Поэтому многие алгоритмы оказываются весьма трудно использовать практически. Затруднительно оценить, например, эффективность алгоритмов SHIEF или SHIP только на основании результатов статей [8, 10]. Кроме того, результаты работ [5, 7, 9] не совпадают с более поздними результатами работы [11] и результатами данной работы.

В том случае, если выполняется соотношение $h > \lambda/2$ и цилиндр достаточно высокий, т. е. $h > a$ (h — полувысота цилиндра, a — радиус, λ — длина звуковой волны), а колебательная скорость торцов невелика, удобной моделью конечного цилиндра является цилиндр, дополненный вдоль образующих полубесконечными жесткими экранами [1, 2]. Решение этой задачи приводит к простым формулам для давления и направленности в дальней зоне (см. [14], стр. 151). Способ расчета указанной модели, предложенный в работе [15], дает отрицательные значения действительной части сопротивления излучения при малых ($ka < 1$) волновых размерах цилиндра. Представление сплошного цилиндра шаровым слоем [3] и водозаполненного цилиндра тонким шаровым поясом [4] возможно лишь для малой высоты цилиндра $h/a \leq 0,7$.

Приближенными моделями для высоких $h \gg a$ и низких $h \ll a$ цилиндров являются вытянутые и сплюснутые сфероиды [16, 17], хотя сплюснутый сфероид плохо имитирует низкий цилиндр, излучающий узкой боковой поверхностью, так как кривизна боковых кромок сфероида оказывается много большей кривизны боковой поверхности цилиндра.

Отметим, что для замены одного излучателя другим требуется ввести некие принципы эквивалентности. Естественное требование — равенство объемных колебательных скоростей — оказывается недостаточным для выбора геометрических размеров эквивалента и приходится прибегать к новым искусственным ограничениям, в результате чего размеры эквивалентного излучателя оказываются более или менее произвольными.

Отметим далее ошибочную работу [5], текст которой почти полностью воспроизведен в новом издании известной книги Е. Скучика [18]. В этой работе использовано разложение потенциала скоростей по сферическим гармоникам, причем были использованы лишь расходящиеся волны, определяемые сферическими функциями Ханкеля $h_m^{(1)}(kr)$. Далее для нахождения неизвестных коэффициентов использовался метод наименьших квадратов, причем минимизировалась среднеквадратичная погрешность удовлетворения граничных условий. Расчет этой погрешности показывает, что она не стремится к нулю при увеличении числа членов ряда. Это объясняется неполнотой выбранной системы сферических функций в ближней зоне. Действительно ряд, включающий лишь расходящиеся волны, определяет поле вне некоторой сферы, полностью охватывающей цилиндр. Однако для описания поля вблизи цилиндра систему функций следовало дополнить функциями Ханкеля второго рода $h_m^{(2)}(kr)$, сходящимися к центру цилиндра, а затем «сшить» с дальним полем по условной сферической границе, охватывающей излучатель, используя граничные условия непрерывности потенциала и скорости.

Отметим, что несмотря на указанные недостатки, значения активной составляющей сопротивления излучения α , рассчитанной в работе [5] при $ka=1, 2, 5$ для цилиндра с размерами $h/a=2$, близки к реальным, хотя и несколько занижены (табл. 1). Это объясняется тем, что указанная величина получена расчетом полной акустической мощности в дальней зоне с учетом вклада от торцов, колеблющихся с некоторой скоростью, равной нормальной производной потенциала, представленного в работе [5] упомянутым разложением, хотя по исходным данным скорость на торцах должна быть равной нулю.

Такая же ошибка, связанная с использованием упомянутого разложения, допущена в работе [6], где в отличие от статьи [5] использован метод граничной коллокации.

Перейдем к методам, связанным с интегральным уравнением Гельмгольца. Интегральные уравнения Гельмгольца для внешней области, поверхности и для внутренней области (фиг. 1) можно написать в виде [8]

$$(1) \quad \varepsilon \Phi(\mathbf{x}) - \iint_S K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \Phi(\mathbf{x}_0) dS_0 = f(\mathbf{x}),$$

где

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = (\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) / \partial \mathbf{n}_0) / 4\pi,$$

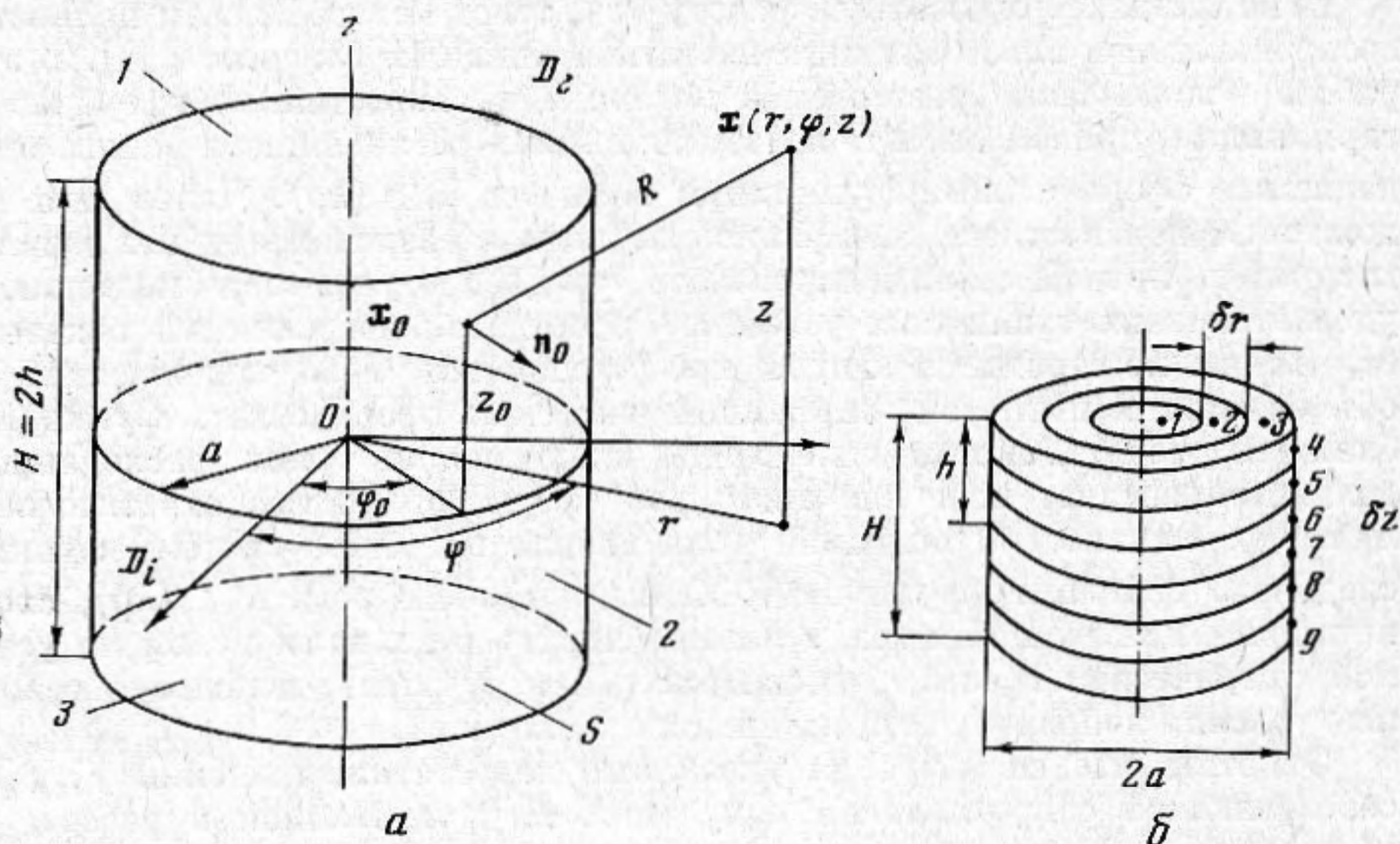
$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \iint_S v(\mathbf{x}_0) g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dS_0,$$

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \exp(ikR) / R, \quad R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|,$$

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathbf{x} \in D_e; \\ 1/2, & \text{если } \mathbf{x} \in S; \\ 0, & \text{если } \mathbf{x} \in D_i. \end{cases}$$

Здесь $\Phi(\mathbf{x})$ — потенциал скоростей*, $v(\mathbf{x}_0)$ — заданное распределение нормальной компоненты колебательной скорости на поверхности тела S , \mathbf{x}_0 — точка на поверхности тела, \mathbf{x} — точка наблюдения, которая может находиться, в частности, и на поверхности тела, \mathbf{n}_0 — единичная внешняя нормаль в точке \mathbf{x}_0 к поверхности тела S , dS_0 — элемент поверхности S , охватывающий точку \mathbf{x}_0 . Смысл остальных обозначений ясен из фиг. 1, а.

Если выбрать точку наблюдения \mathbf{x} внутри поверхности, то потенциал обращается в нуль ($\epsilon=0$). Такое уравнение было предложено в работе [19] и применено к конечному цилиндру в статье [7]. Одним из достоинств метода, связанного с решением этого уравнения, является возможность получить решение для любой частоты ω (или волнового числа k),



Фиг. 1. а — геометрия излучателя; б — способ разбиения поверхности цилиндра на элементарные кольца и полоски: полное число разбиения на фигуре $2N=12$, число колец на каждом торце $n_1=3$, число полосок на половине боковой поверхности $n_2=3$, $N=n_1+n_2=6$

включая так называемые характеристические частоты (волновые числа), которые являются собственными частотами объема, ограниченного поверхностью S с мягкими стенками и заполненного внешней средой [8]. Однако, как указано в работе [9], точность результата зависит от выбора опорных точек на оси цилиндра и ухудшается для низких цилиндров при $h/a < 1$. Увеличение числа опорных точек не всегда приводит к увеличению точности, так как матрица системы уравнений при увеличении N вырождается.

Ниже за основу взято интегральное уравнение (1) для поверхности при $\epsilon=1/2$. Граничные условия в общем случае смешанные. Все расчеты проводились для осесимметричных случаев. Несимметричные относительно плоскости $z=0$ распределения скорости и потенциала представлялись в виде суммы симметричной и антисимметричной составляющей, что позволило в два раза уменьшить порядок системы уравнений. Поверхность цилиндра S разбивалась на $2N$ полосок и колец (фиг. 1, б), где $N=n_1+n_2$, n_1 и n_2 — число разбиений на торце и половине боковой поверхности соответственно. В середине каждого кольца и полоски выбиралась узловая точка. Считая потенциал и скорость** внутри каждой полоски неизменными, из интегрального уравнения (1) можно получить N линей-

* Временной множитель $e^{-i\omega t}$ опускаем.

** В дальнейшем для краткости нормальную компоненту колебательной скорости мы будем называть просто скоростью.

ных алгебраических уравнений относительно значений потенциала Φ_n ($n=\overline{1, N}$) или скорости v_n , если последняя неизвестна:

$$(2) \quad [\delta_{nm} - Y_{nm}][\Phi_m] = [f_n],$$

где

$$(3) \quad [f_n] = [V_{nm}][v_m].$$

Здесь δ_{nm} — символ Кронекера, учитывающий внеинтегральный член в уравнении (1), $[Y_{nm}]$, $[V_{nm}]$ — комплексные матрицы размером $N \times N$, явный вид которых не приведен ввиду их громоздкости.

При вычислении диагональных матричных элементов, реализуемых двойными интегралами по площади полосок или колец, встречаются логарифмические особенности подынтегральных выражений. Для вычисления интегралов узловая точка окружалась эллипсом и область, охватываемая им, исключалась из промежутка интегрирования, что соответствовало вычислению интегралов в смысле главного значения. Численными экспериментами были установлены величины полуосей эллипсов, необходимые для вычисления с заданной точностью.

Если распределение скоростей v_j ($j=\overline{1, N}$) известно на всей поверхности, то элементы f_n вычислялись непосредственно по формуле (3). Если же, например, на j -й полоске или кольце скорость v_j неизвестна, а задавалось давление p_j или потенциал $\Phi_j = p_j / -ikrc$ (ρ — плотность внешней среды, c — скорость звука в ней), то j -е столбцы матриц $[V_{nm}]$ и $[Y_{nm}]$ менялись местами. Решение системы (2) — (3) при этом получалось в виде $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{j-1}, v_j, \Phi_{j+1}, \dots, \Phi_N$. Не все элементы матриц Y и V независимы. Элементы, реализующие взаимодействие боковых полосок, обладают симметрией вида

$$(4) \quad Y_{nm} = Y_{mn}, \quad Y_{nm} = Y_{n+k, m+k},$$

где

$$n, m = \overline{n_1 + 1, N}, \quad k \leq N - m \text{ и } k \leq N - n$$

и аналогично для матрицы V . Учет симметрии позволял сократить время расчета элементов матриц Y и V .

Предложенный в формулах (1) — (4) алгоритм был реализован в виде программы на языке «Алгол». Численные результаты были получены на ЭВМ М-222 и БЭСМ-4 при следующих входных параметрах: $N \leq 20$, полуоси эллипсов выбирались равными $e_r = 0,005a$, $e_\varphi = 0,005\pi$, $e_z = (0,0025 - 0,0050)h$. При вычислении контурных интегралов вдоль координаты φ_0 по методу Гаусса число разбиений полагалось равным $l \leq 6$, а для двойных интегралов при $l \leq 6$, $l_1 = 2 - 6$, где l_1 — число разбиений поперек элементарной полоски или кольца. Время расчета распределения поля на поверхности цилиндра и сопротивления излучения определялось в основном временем расчета комплексных матричных элементов. Время расчета T всех комплексных элементов матриц Y и V с учетом условий симметрии (4) приближенно равно

$$(5) \quad T \approx \tau l [2n_1^2 + 4n_1 n_2 + 2n_2 - n_1 - 1 + l_1(n_1 + 2)],$$

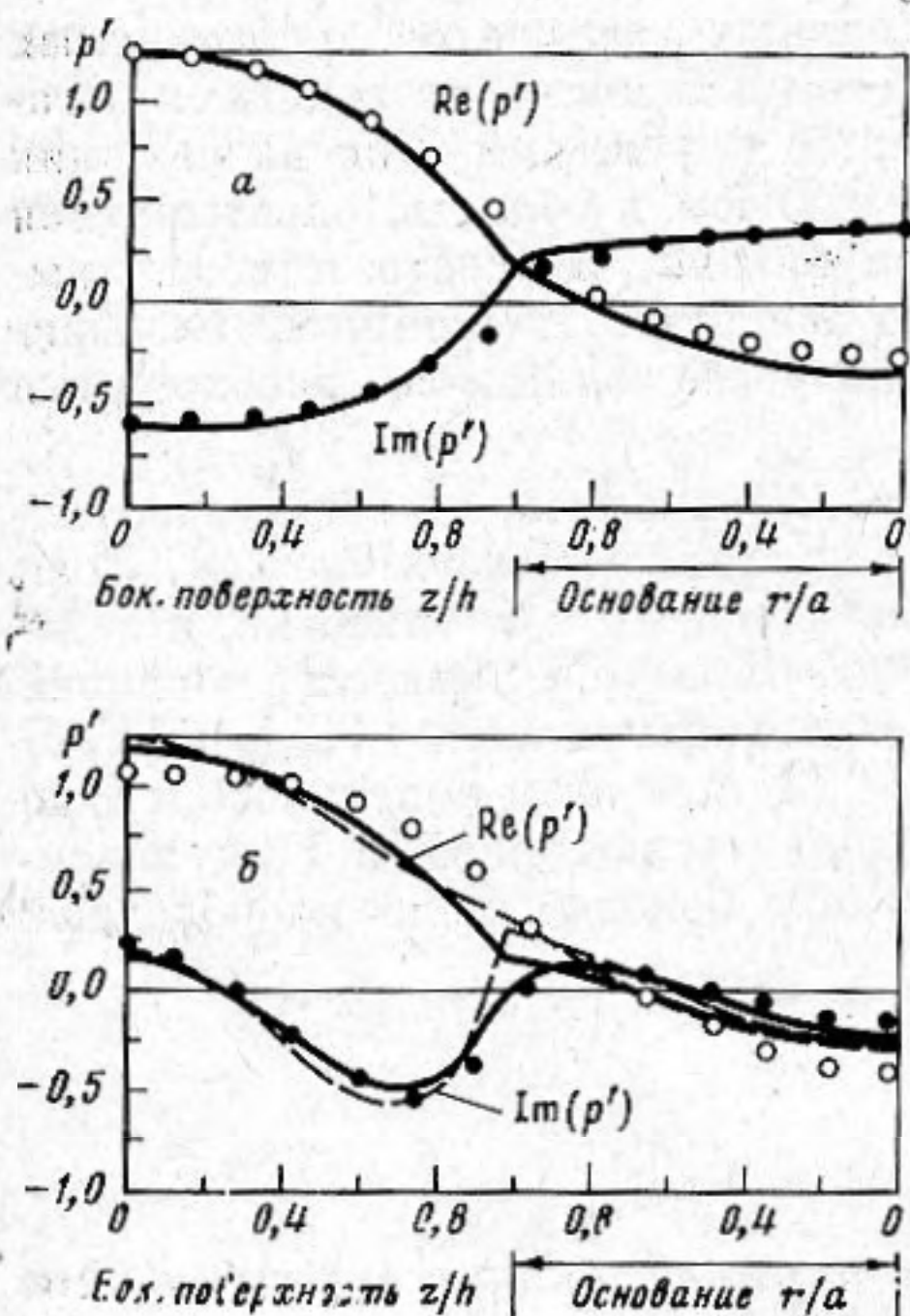
где τl — время расчета одного комплексного матричного элемента, а $\tau l l_1$ — время расчета диагонального матричного элемента. Видно, что $T \sim n_1^2$, а от n_2 зависит линейно, что объясняется использованием условий (4). При $N=20$, $n_1=n_2=10$, $l \times l_1 = 6 \times 6$ расчет поля на поверхности и акустического импеданца занимал 8—10 мин на ЭВМ М-222 для одного значения ka . Определим сопротивление излучения согласно работе [20] (с. 10—12) в виде

$$(6) \quad Z_s = \frac{1}{|V_0|^2} \iint_S p(\mathbf{x}_0) v^*(\mathbf{x}_0) dS_0,$$

где V_0 — скорость в некоторой «точке приведения» на поверхности цилиндра. Взаимное сопротивление излучения между l -м и m -м участками поверхности определяется в виде

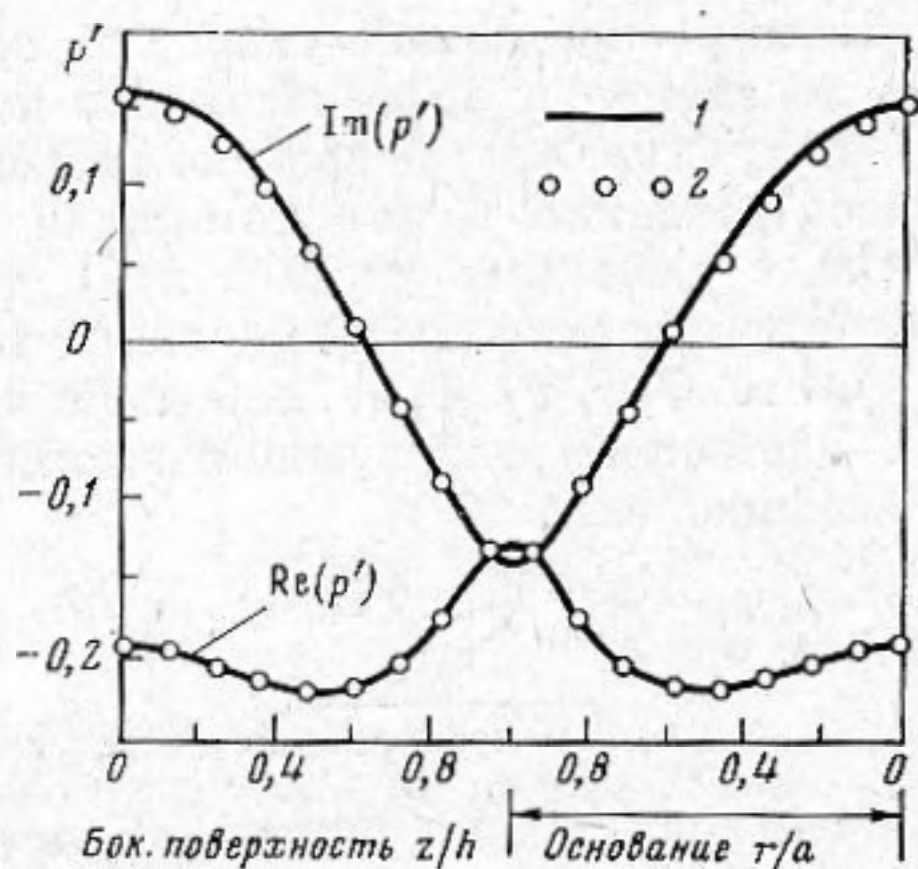
$$(7) \quad z_{lm} = \frac{1}{V_m V_l^*} \iint_{\Delta S_l} p_m(x_0) v_l^*(x_0) dS_0,$$

где $p_m(x_0)$ — давление, возбуждаемое колебаниями m -го участка на заторможенной поверхности ΔS_l l -го участка, * — знак комплексного сопряжения.



Фиг. 2

Фиг. 2. Сравнение результатов данной работы с результатами Фенлона [9] для цилиндра $h/a=1$ с жесткими торцами при $ka=2$ (а) и $ka=4$ (б); сплошные кривые — результаты Фенлона для метода общей коллокации, штриховые кривые — то же для метода Галеркина (на фиг. 2, а эти кривые совпадают). Результаты данной работы показаны кружками и точками при $N=15$ (а) и $N=14$ (б)



Фиг. 3

Фиг. 3. Распределение реальной и мнимой частей нормированного давления, создаваемого точечным источником, расположенным в центре цилиндра $h/a=1$ при $ka=4$: 1 — точные значения, 2 — результаты данной работы при числе разбиений $N=18$

Введем безразмерные коэффициенты сопротивления излучения Z_s по формуле $\alpha - i\beta = Z_s / \rho c S_{из}$, где $S_{из}$ — часть поверхности S , где $v(x_0) p(x_0) \neq 0$. Определим нормированное акустическое давление

$$p' = p / \rho c V_0 = re(p') + iim(p'),$$

где V_0 — скорость в центре боковой поверхности, а для цилиндра, излучающего торцами, в центре торца.

Рассмотрим численные результаты данной работы. В дальнейшем под цилиндром с жесткими торцами будем понимать цилиндр с нормальной колебательной скоростью, равной единице на боковой поверхности и нулю на торцах цилиндра. На фиг. 2 проведено сравнение результатов данной работы с результатами работы [9] по величинам реальной и мнимой частей давления на поверхности цилиндра с жесткими торцами.

Из табл. 1 видно, что результаты данной работы лучше всего согласу-

Таблица 1

Значения коэффициента α для цилиндра $h/a=2$ с жесткими торцами, полученные различными авторами (результаты Фенлона даны для метода Галеркина и общей коллокации); $\alpha = re(Z_s)/\rho c S_2$, $S_2 = 2\pi a H$

ka	[5]	[7]	[9]	[11]	Данная работа
1	0,633	0,621	0,635 0,640	0,726	0,729
2	0,822	0,758	0,780 0,785	0,854	0,881

Таблица 2

Удельное сопротивление излучения $\alpha - \beta i$ цилиндра с жесткими торцами; $h/a=1$

ka	Фенлон		Данная работа
	метод Галеркина	метод общей коллокации	
2	0,800-0,420i	0,830-0,420i	0,946-0,432i
4	0,860-0,134i	0,825-0,175i	0,932-0,190i

Таблица 3

Сходимость результатов по сопротивлению излучения для цилиндра $h/a=2$ с жесткими торцами в зависимости от числа разбиений N поверхности цилиндра; $N = n_1 + n_2$

n_1+n_2	$\alpha - \beta i$		n_1+n_2	$\alpha - \beta i$	
	$ka=1$	$ka=2$		$ka=1$	$ka=2$
1+1	1,29-0,800i	3,49+0,075i	4+7	0,732-0,479i	0,895-0,309i
2+2	0,756-0,507i	1,005-0,189i	5+10	0,730-0,477i	0,885-0,308i
2+3	0,748-0,490i	0,960-0,297i	6+12	0,729-0,477i	0,881-0,307i
3+5	0,736-0,481i	0,912-0,310i			

Таблица 4

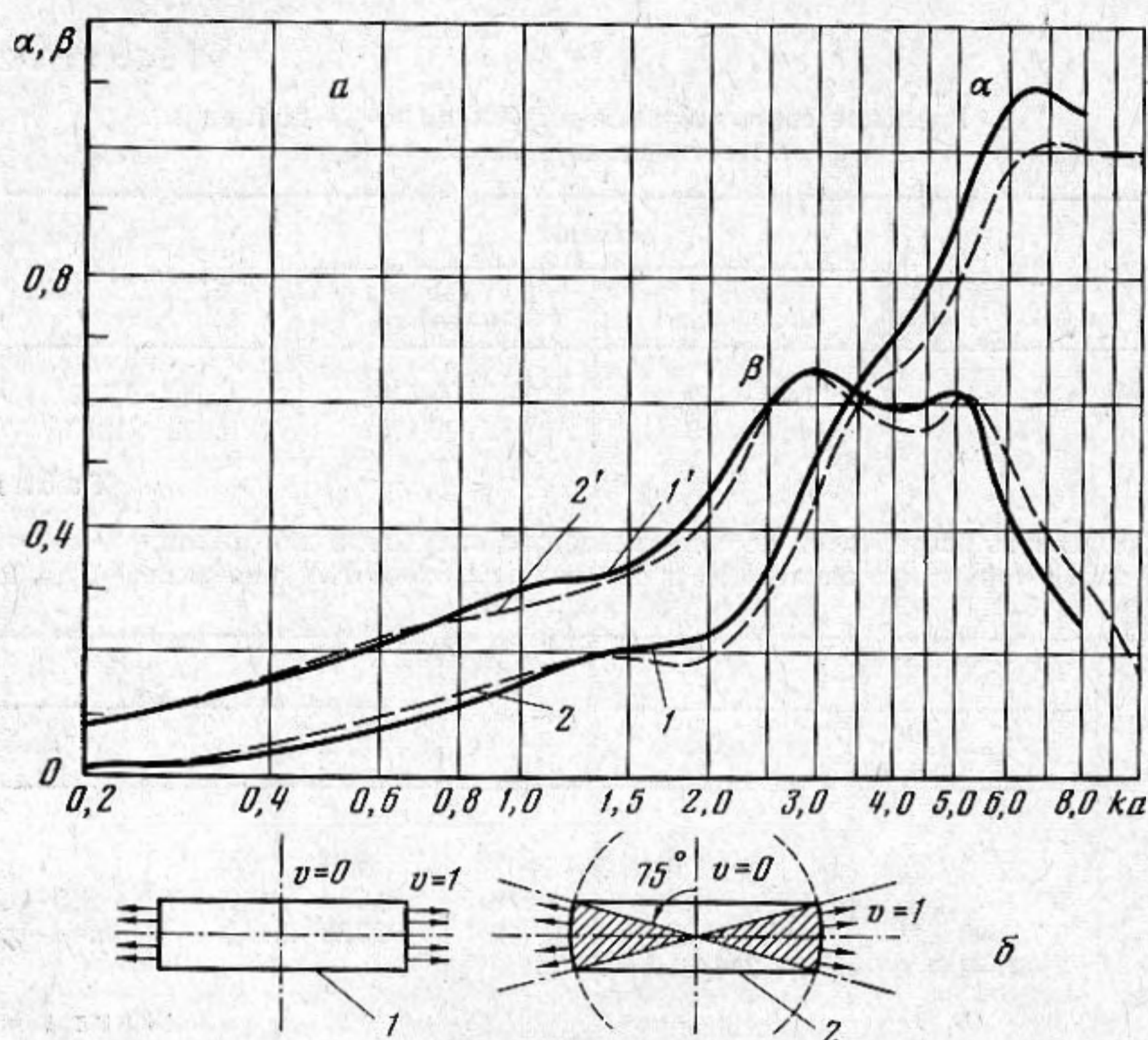
ka	$\alpha - \beta i$		
	$h/a=3$	$h/a=10$	$h/a=\infty$
0,2	0,108-0,312i	0,252-0,356i	0,288-0,334i
0,4	0,336-0,474i	0,461-0,409i	0,496-0,395i
0,6	0,549-0,492i	0,618-0,399i	0,635-0,389i
1,0	0,750-0,372i	0,789-0,337i	0,792-0,333i
1,5	0,852-0,336i	0,916-0,263i	0,882-0,266i

Таблица 5

ka	$\alpha - \beta i$		ka	$\alpha - \beta i$	
	пульсирующий поршень, $h/a=0$	цилиндр, излучающий торцами, $h/a=0,1$		пульсирующий поршень, $h/a=0$	цилиндр, излучающий торцами, $h/a=0,1$
0,2	0,0199-0,168i	0,0201-0,162i	2,0	1,033-0,535i	0,992-0,564i
0,5	0,120-0,397i	0,120-0,381i	2,5	1,131-0,323i	1,130-0,348i
1,0	0,423-0,647i	0,395-0,610i	3,0	1,092-0,159i	1,103-0,158i
1,5	0,774-0,680i	0,723-0,661i	4,0	0,941-0,122i	0,940-0,0986i

ются с результатами автора работы [11], исследовавшего конечный цилиндр с жесткими торцами с применением интеграла Фурье. Отметим, что графические результаты в работе [9] не всегда соответствуют табличным данным, поэтому некоторые результаты данной работы (например, при $ka=2$ и $h/a=1$, фиг. 2, а) оказываются ближе к графическим, нежели к табличным результатам статьи [9]. Значения α и β , соответствующие распределениям скорости и давления на фиг. 2, занесены в табл. 2.

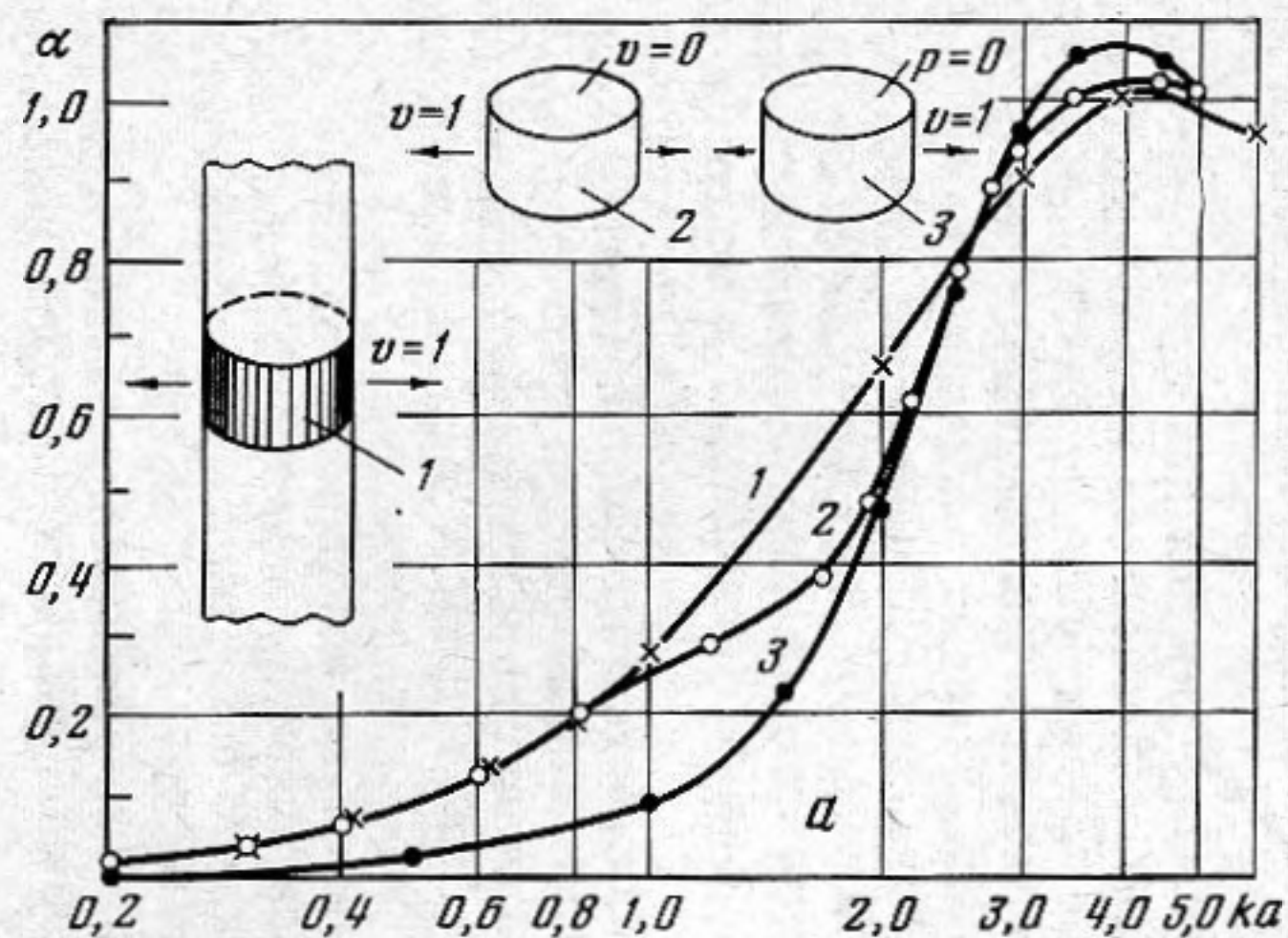
Оценивая сходимость результатов по числу разбиений N поверхности цилиндра, из табл. 3 видим, что при $ka=1$ уже при $N=4$ значения давления на поверхности и импеданца мало отличаются от предельных.



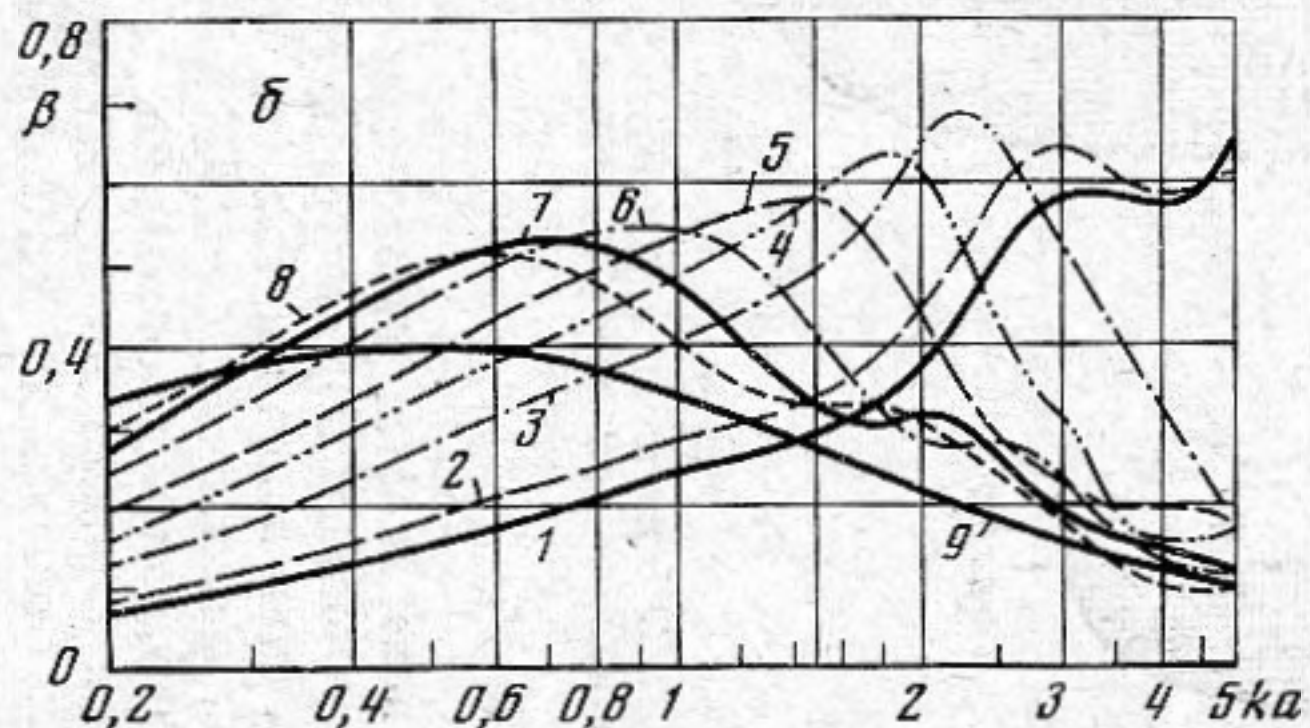
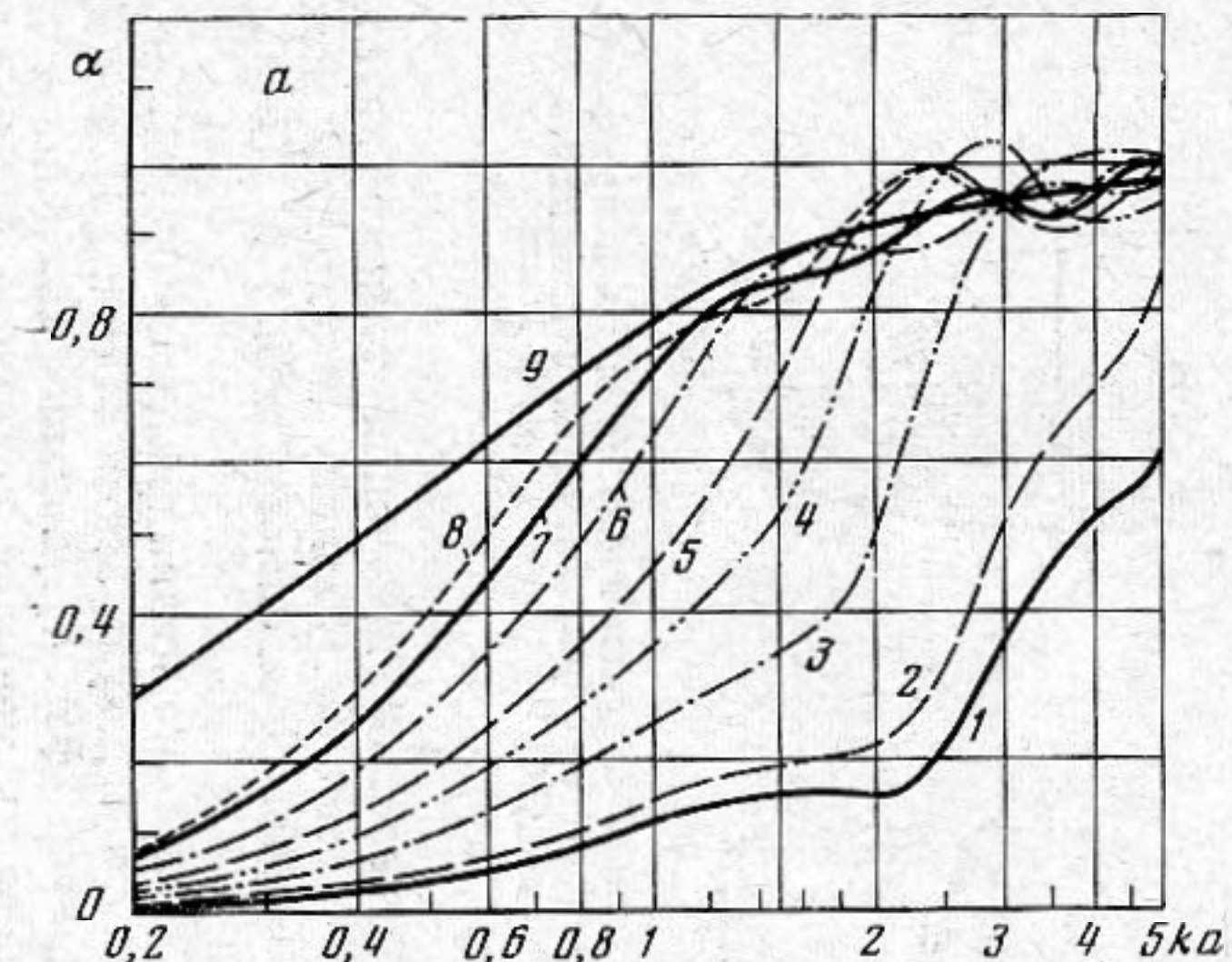
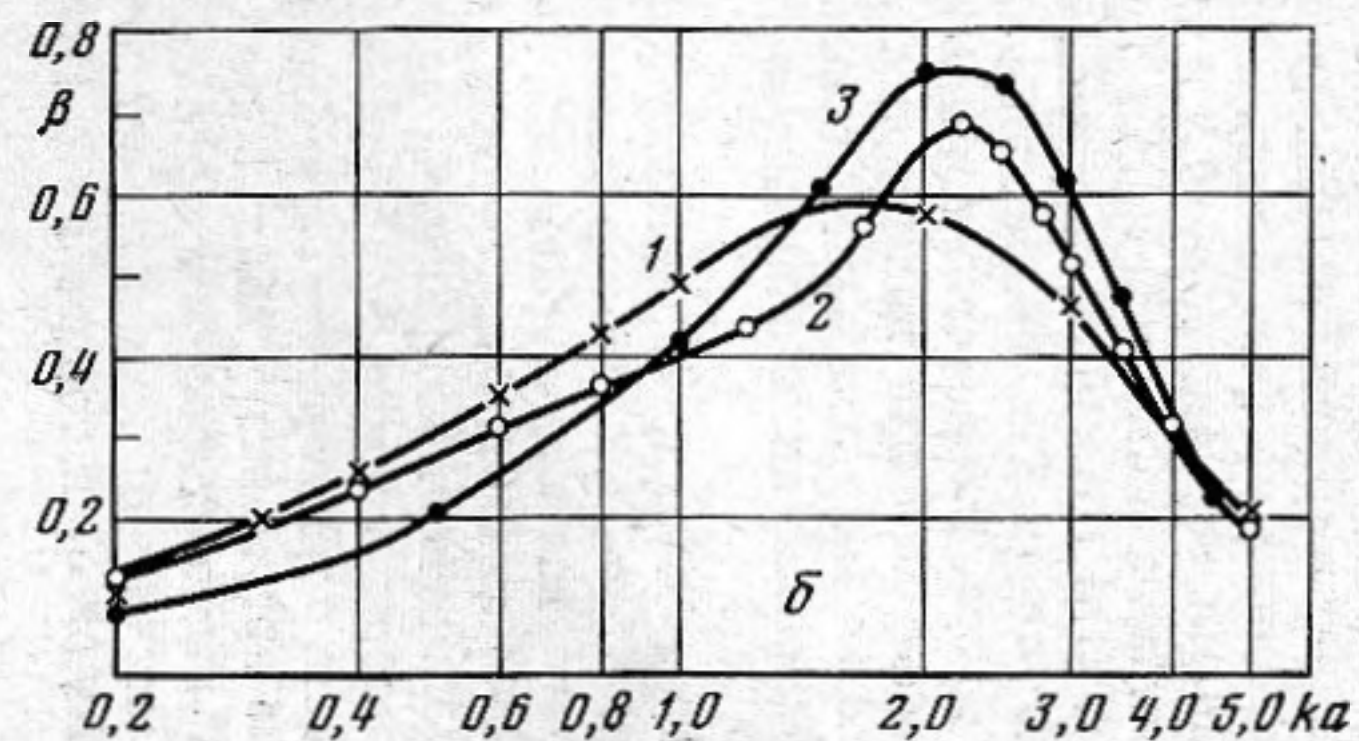
Фиг. 4. а — коэффициенты α и β сопротивления излучения цилиндра $h/a=0,2588$ с жесткими торцами (кривые 1 и 1') и шарового пояса $h/a=0,2588$ с жесткими воронкообразными торцами (кривые 2 и 2'); б — изображение соответствующих моделей

Для оценки абсолютных погрешностей результатов программы вычислим на поверхности S , следуя работе [8], распределение нормальной скорости, создаваемое точечным источником, расположенным в центре цилиндра. Цилиндр при этом будем считать звукопрозрачным. Тогда результаты расчета распределения давления на поверхности S можно сравнить с известным распределением давления, создаваемого точечным источником на той же поверхности. Такое сравнение проведено на фиг. 3. Нормированное давление и радиальная скорость на расстоянии ρ от источника полагались равными $p' = \exp(ik\rho)/ik\rho$, $v' = (1 - ik\rho)\exp(ik\rho)/(k\rho)^2$. Максимальная погрешность в определении давления на поверхности цилиндра не превышает 3% при $ka < 2$ и 4–5% при $ka < 4$ при $N=18$.

Перейдем к предельным случаям высокого ($h/a \gg 1$) и низкого ($h/a \ll 1$) цилиндров. Как видно из табл. 4, при увеличении отношения h/a удельный импеданс цилиндра с заторможенными торцами приближается к удельному импеданцу бесконечного цилиндра. Сопротивление излучения низкого цилиндра $h/a=0,1$, излучающего торцами при жесткой боко-



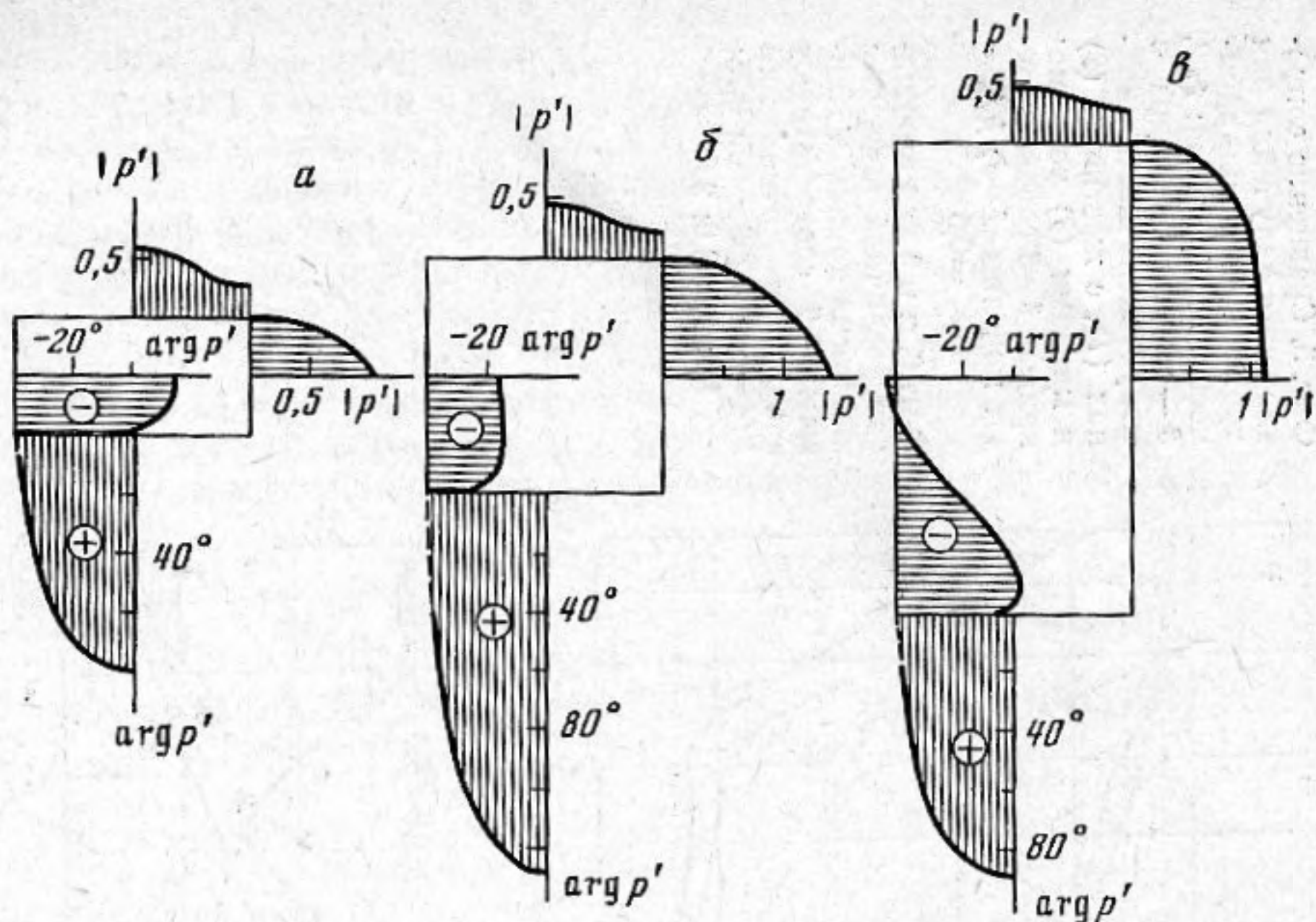
Фиг. 5



Фиг. 6

Фиг. 5. Сравнение сопротивления излучения для трех моделей цилиндрического излучателя: 1, 2, 3 — модели цилиндра в полубесконечных экранах (1), с жесткими (2) и мягкими (3) торцами; кривые 1—3 соответствуют моделям 1—3; $h/a = 0,5$

Фиг. 6. α и β для цилиндров различной высоты с жесткими торцами. Кривым 1—9 соответствуют значения отношения $h/a = 0,2; 0,2588; 0,5; 0,75; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; \infty$



Фиг. 7. Эпюры распределения модуля и аргумента давления на поверхности цилиндров при $ka=2$. Случаям a – $в$ соответствуют значения отношения $h/a = 0,5; 1,0; 2,0$

вой поверхности, близко к сопротивлению излучения тонкого круглого двустороннего поршня радиуса a (табл. 5). Разницу результатов можно объяснить конечной высотой цилиндра. Зависимости $\alpha(ka)$ и $\beta(ka)$ для поршня взяты из работы [21].

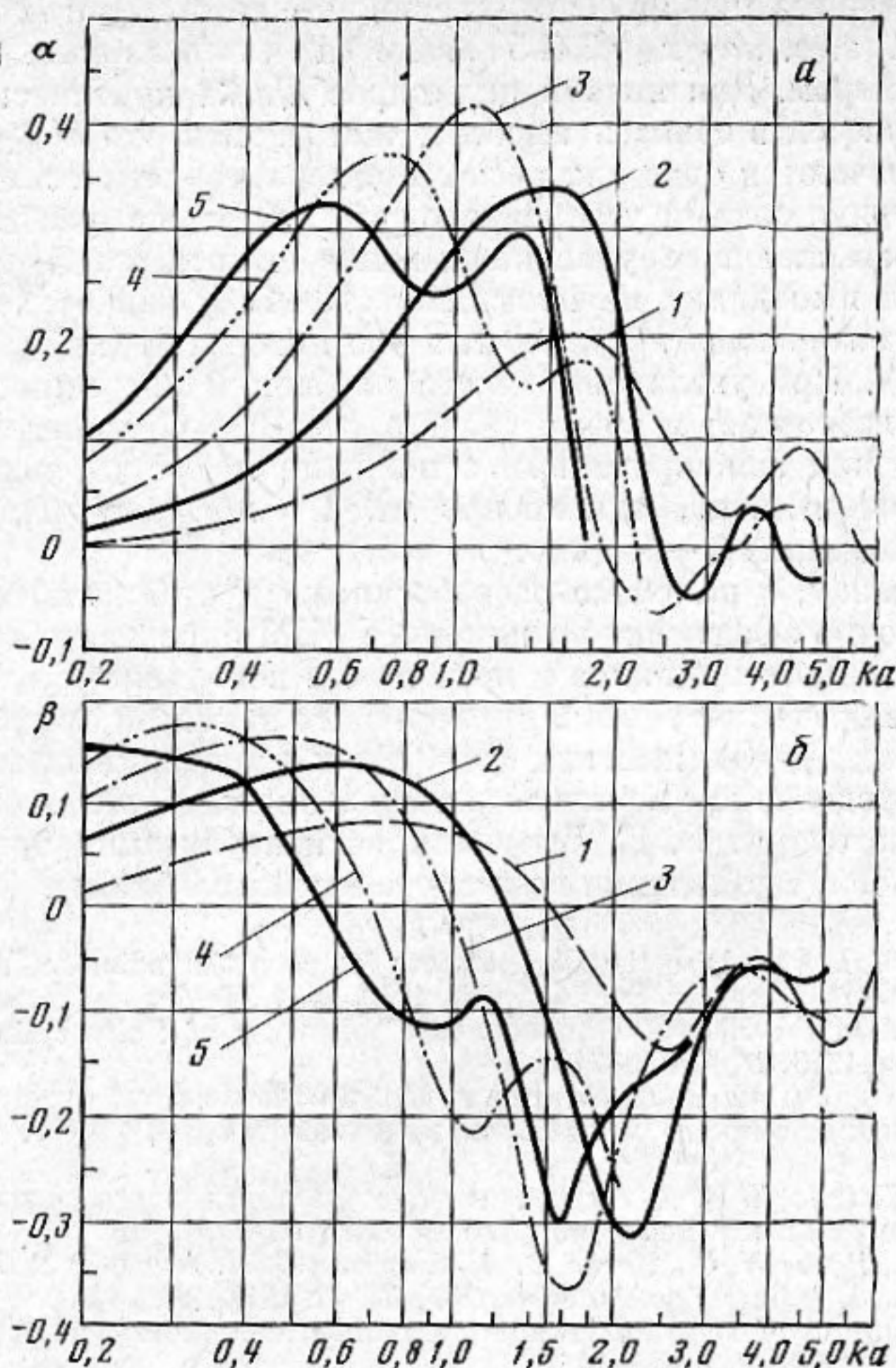
Результаты расчета импеданца низкого цилиндра ($h/a=0,2588$) с жесткими торцами хорошо согласуются с результатами статьи [3] для шарового слоя той же высоты и радиуса (фиг. 4). Большее значение α для цилиндра при $ka > 5$ можно объяснить меньшей кривизной боковой поверхности цилиндра сравнительно с кривизной поверхности сферы того же радиуса, в результате чего импеданц цилиндра в большей степени напоминает импеданц плоского поршня.

Сравним на фиг. 5 величины $\alpha(ka)$ и $\beta(ka)$ для цилиндра с заторможенными торцами $h/a=0,5$ и цилиндра, дополненного полубесконечными цилиндрическими жесткими экранами. Видим, что при $ka < 1$ они совпадают. Это объясняется равенством объемных колебательных скоростей обеих моделей и малостью поперечных волновых размеров экранов при $ka < 1$, вследствие чего влияние их несущественно. Объемная колебательная скорость для цилиндра с мягкими ($p=0$) торцами (кривая 3) оказывается много меньшей, вследствие того что на торцах имеются участки с распределением скорости в противофазе по отношению к скорости на боку.

Для цилиндров различной высоты с жесткими торцами (фиг. 6) коэффициент $\alpha(ka)$ пропорционален относительной высоте цилиндра h/a в области волновых размеров, приближенно определяемой неравенством $ka < h < 1$ при $0,2 \leq ka \leq 5$. При $ka > 2$ и $h/a > 1$ кривые $\alpha(ka)$ и $\beta(ka)$ носят осциллирующий характер.

Эпюры модуля и аргумента давления на поверхности цилиндра при $v=0$ на торцах и $v=1$ на боковой поверхности показывают резкое изменение аргумента p вблизи края торца, что объясняется большими тангенциальными скоростями в этой области (фиг. 7).

Рассчитаем взаимное сопротивление z_{12} между боковой поверхностью цилиндра S_2 и торцевой S_1 . При единичной скорости на торце, используя



Фиг. 8. Взаимный импеданс излучения между боковой и торцевой поверхностями цилиндра при равномерном распределении скорости на обеих поверхностях. Кривым 1-5 соответствуют значения отношения $h/a=0,2; 0,5; 1,0; 2,0; 3,0$

формулу (7), имеем

$$z_{12} = \rho c S_1 (\alpha_{12} - i\beta_{12}) = \frac{1}{V_2} \int_{S_1} p_2(x_0) dS_0,$$

где $p_2(x_0)$ — давление, возбуждаемое колебаниями боковой стенки цилиндра на заторможенном торце, V_2 — скорость в центре боковой поверхности, $S_1 = \pi a^2$. На фиг. 8 приведены удельные коэффициенты взаимного импеданца α_{12} и β_{12} , определенные выше, скорость на боковой поверхности полагается равной 1.

Известно, что интегральное уравнение Гельмгольца для поверхности (1) при $\epsilon=1/2$ не дает однозначного решения, когда волновое число k равно одному из характеристических (или критических) чисел области, заключенной внутри поверхности. Набор соответствующих значений параметра ka определяется для цилиндра в виде [8]

$$k_{nmq}a = \left[\left(n \frac{\pi}{2} \frac{a}{h} \right)^2 + \alpha_{mq}^2 \right]^{1/2},$$

где n, m, q — целые числа, α_{mq} — q -й корень функции Бесселя m -го порядка. Для случая азимутальной симметрии $m=0$, $\alpha_{01}=2,4048$, $\alpha_{02}=5,5201$ и т. д. При симметричном относительно плоскости $z=0$ распределении ско-

рости n — нечетно, а при антисимметричном — четно. При $h/a \rightarrow \infty$ величина $ka_{nmq} \rightarrow \alpha_{mq}$, т. е. $ka = \alpha_{01} \approx 2,405$ является минимальным критическим волновым размером. Для низких цилиндров $h/a \ll 1$ критические волновые числа отодвигаются в область высоких частот. Если же $h/a > 1$, то в области $ka < 3$ встречаются одно или несколько характеристических чисел. Численными экспериментами установлено, что при числе разбиений N, l, l_1 , обычно не превышающих указанных выше, относительная погрешность в определении импеданса не превышает 10–15% для области волновых размеров вне интервала $(ka)_{nmq} \pm 0,1$, а вне интервала $(ka)_{nmq} \pm 0,3$ не превышает 5–6%. При увеличении числа разбиений погрешность уменьшается, однако возрастает и время расчета на ЭВМ по формуле (5). С возрастанием ka при фиксированном отношении h/a критические волновые числа встречаются чаще, однако при $ka \gg 1$ и $h/a > 1$ величина α близка к единице, а величина β — к нулю.

Таким образом, с помощью разработанных и отлаженных алгоритмов можно достаточно эффективно с помощью ЭВМ определять сопротивление излучения конечного цилиндра и поле на его поверхности в широком диапазоне изменения геометрических и волновых размеров при любом распределении мягких ($p=0$), жестких ($v=0$) или импедансных экранов (с известным распределением локального импеданса $z_0 = -p/v$).

Авторы благодарят В. И. Дымченко за консультации при оценке различных методов и составлении вычислительной программы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Laird D. T., Cohen H. Directionally patterns for acoustic radiation from a source on a rigid cylinders. J. Acoust. Soc. America, 1952, 24, 1, 46–49.
2. Robey D. H. On the radiation impedance of an array of finite cylinders. J. Acoust. Soc. America, 1955, 27, 4, 706–710.
3. Воек И. В., Гринченко В. Т., Коцюба В. С. Об одном методе оценки акустических свойств цилиндрического излучателя конечной высоты. Акуст. ж., 1975, 21, 5, 701–705.
4. Гоц А. А., Дуанов Д. Б. Акустическое поле экваториального сферического пояса. VIII Всес. акуст. конф. Реф. докл., т. 1. М., «Наука», 1973, 16.
5. Williams W., Parke N. G., Moran D. A., Sherman C. H. Acoustic radiation from a finite cylinder. J. Acoust. Soc. America, 1964, 36, 12, 2316–2322.
6. Butler J. Solution of acoustical radiation problems boundary collocation. J. Acoust. Soc. America, 1970, 43, 1, 325–336.
7. Copley L. G. Integral equation method for radiation from vibrating bodies. J. Acoust. Soc. America, 1967, 41, 4, 807–816.
8. Schenck H. A. Improved integral formulation for acoustic radiation problems. J. Acoust. Soc. America, 1968, 44, 1, 41–58.
9. Fenlon F. H. Calculation of the acoustic radiation field at the surface of a finite cylinder by the method of weighted residuals. Proc. IEEE, 1969, 57, 3, 291–306.
10. Rogers P. H., Trott W. J. Acoustic slow waveguide antenna. J. Acoust. Soc. America, 1974, 60, 6, 1256–1264.
11. Sandman B. E. Fluid-loading influence coefficients for a finites cylindrical shell. J. Acoust. Soc. America, 1976, 60, 6, 1256–1264.
12. Bates R. H. T., Wall D. J. N. Null field approach to scalar diffraction. Phil. Trans. Roy. Soc. London (A), 1977, 287, 1339, 45–114.
13. Римский-Корсаков А. В., Цукерников И. Е. О расчете диаграммы направленности по результатам измерения звукового давления в ближнем поле излучателя. Акуст. ж., 1977, 23, 6, 919–928.
14. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л., «Судостроение», 1972.
15. Сапожков М. А. Сопротивление излучения некоторых типов излучателей. Ж. техн. физ., 1944, 14, 10–11, 669.
16. Van Buren A. L. Acoustic radiation impedance of caps and rings on prolate spheroids. J. Acoust. Soc. America, 1971, 50, 5, 1343–1356.
17. Baier R. V. Radiation impedance of caps and rings on oblate spheroidal baffles. J. Acoust. Soc. America, 1972, 51, 5 (2), 1705–1716.
18. Скучик Е. Основы акустики. М., «Мир», 1976, т. 2, 140–145.
19. Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости. М., Физматгиз, 1963.
20. Смартышев М. Д. Направленность гидроакустических антенн. Л., «Судостроение», 1973.
21. Гутин Л. Я. О звуковом поле поршневых излучателей. Ж. техн. физ., 1937, 7, 10, 1096–1106.

Поступила
22 января 1979 г.
После исправления
19 июня 1979 г.