

УДК 534.222

ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ, ОБУСЛОВЛЕННОЕ ВОЛНОВЫМ
ДВИЖЕНИЕМ СТЕНОК КАНАЛА

Г. И. Полищук

Рассмотрено течение вязкой жидкости, возникающее в плоском канале при волнообразной деформации его стенок в поперечном и осевом направлениях.

Волна деформации, распространяющаяся по поверхности стенки, граничащей с жидкостью, вызывает в последней стационарное течение, структура которого зависит от типа волны [1—3]. Изучение таких течений является частью более общей проблемы — преобразования колебательного движения границы раздела в поступательное движение жидкости (перемешивание в целях интенсификации тепло-массообменных процессов, транспорт жидкости, вибрационная вискозиметрия и т. д.). Особый интерес представляет изучение течения, возникающего в канале при волнообразной деформации его стенок (см. обзор [4]). Хотя этому вопросу посвящен ряд исследований [5—11], все полученные результаты ограничены условием поперечности волны деформации. В указанных работах принималось, что смещения элементов стенок канала происходят лишь в направлении, перпендикулярном его оси.

Ниже рассмотрено стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости, возникающее в плоском канале, внутренние поверхности стенок которого волнообразно деформируются как в поперечном, так и в продольном (осевом) направлениях. Частоты и скорости поперечной и продольной волн деформации принимаются одинаковыми — элементы поверхностей совершают движения по эллиптическим траекториям. Полученное для средней скорости потока выражение описывает в частных случаях течения в канале, вызванные только продольным или только поперечным волновым движением его стенок.

Рассмотрим заполненный вязкой несжимаемой жидкостью канал, образованный двумя стенками, поверхности которых в недеформированном состоянии совпадают с плоскостями $y = \pm d$ * (фиг. 1). Предполагая задачу зеркально-симметричной относительно плоскости $y = 0$, будем рассматривать лишь полосу $|x| < \infty; -d \leq y \leq 0$.

Предположим, по поверхности $y = -d$ бежит волна деформации вида

$$(1) \quad s(\xi, t) = \text{Re} \{ \varepsilon (E_1 \mathbf{e}_1 + E_2 \mathbf{e}_2) e^{i(x_0 - t)} \},$$

Здесь $s(\xi, t)$ — безразмерное смещение в момент времени t элемента поверхности стенки, находившегося в невозмущенном состоянии в точке $\xi = (x_0, -d)$; E_1 и E_2 — отношения комплексных амплитуд A_1' — продольной и A_2' — поперечной волн деформации к величине $a' = \max \{ |A_1'|, |A_2'| \}$;

* В работе используются в основном безразмерные величины. При этом за единицы длины и времени приняты соответственно величины, обратные волновому числу k' и циклической частоте ω' волны деформации. Размерные величины помечены штрихом.

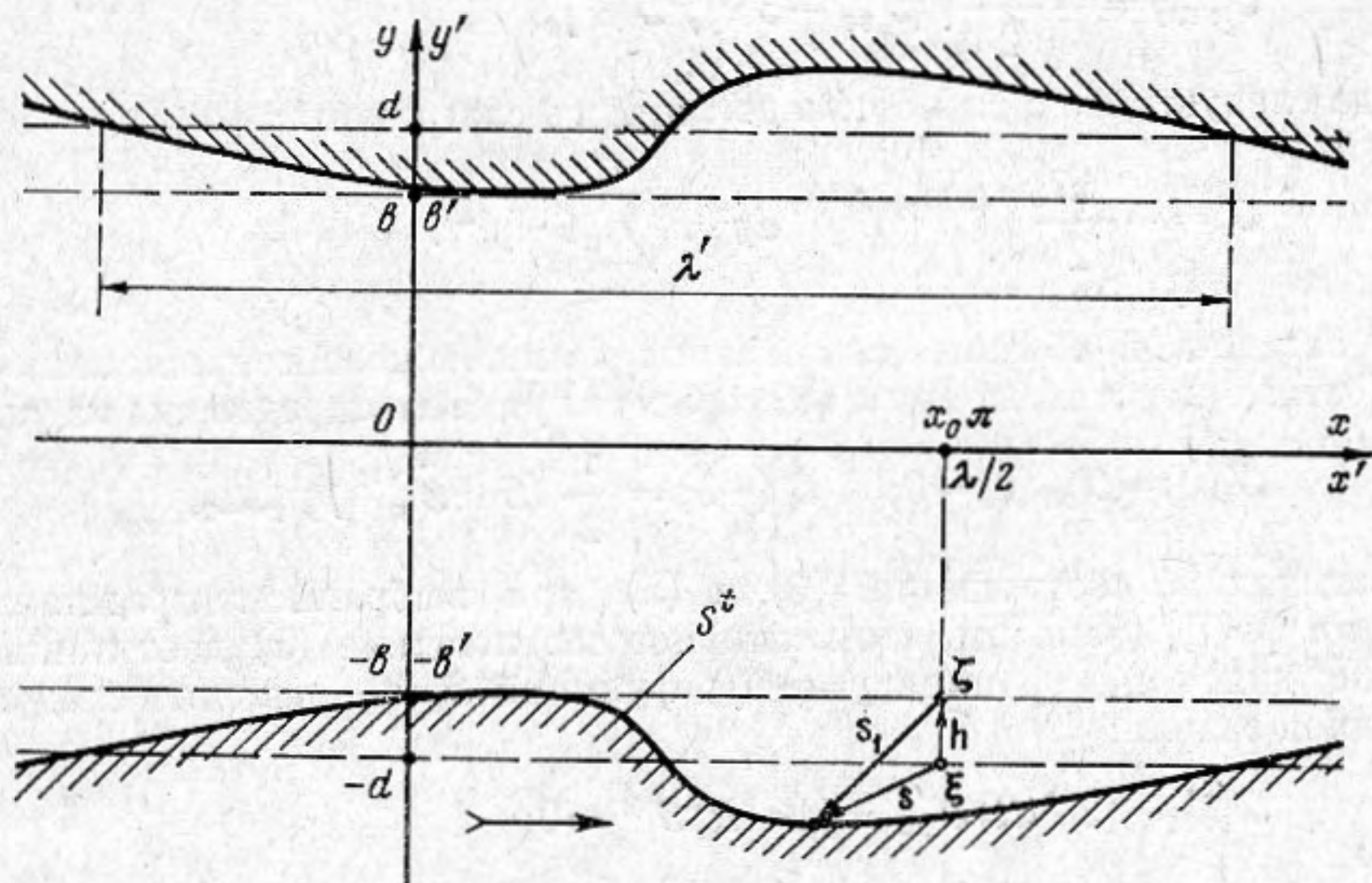
$\varepsilon = k'a' \ll 1$; e_1 и e_2 — орты осей x и y соответственно. Модули величин E_j ($j=1, 2$) обозначим через m_j . Заметим, что $m_j \leq 1$. Концы векторов s образуют подвижную поверхность, обозначенную на фиг. 1 через S^t .

Предполагая движение жидкости, возникающее в канале, плоским, будем считать, что безразмерная гидродинамическая скорость q имеет вид

$$q = u(\sigma, y)e_1 + v(\sigma, y)e_2,$$

где $\sigma = x - t$; u, v — компоненты скорости. В дальнейшем будем пользоваться безразмерной функцией тока ψ , которая связана со скоростью q известным соотношением

$$(2) \quad q = \nabla_{\perp} \psi.$$



Фиг. 1. Профиль канала (при $E_1 = 2E_2$). Стрелка указывает направление распространения волны смещения

Здесь символ \perp означает операцию поворота векторного поля $\nabla\psi$ в плоскости (x, y) на угол $\pi/2$ по направлению движения часовой стрелки; $\nabla = e_1\partial/\partial x + e_2\partial/\partial y$.

Выпишем условия, которым функция ψ должна удовлетворять на границах рассматриваемой полосы. Предполагаемая симметрия движения жидкости позволяет написать

$$(3) \quad \psi_x = \psi_{yy} = 0 \text{ при } y = 0.$$

Здесь и далее нижний буквенный индекс означает производную по соответствующей переменной. Условие прилипания на движущейся поверхности S^t

$$(4) \quad q(\xi + s(\xi, t), t) = s_t(\xi, t)$$

удобно заменить некоторым новым условием, записанным на неподвижной плоскости $y = -b$, где $b = d - \varepsilon m_2$. Эта плоскость отделяет область пространства, в которую при своем движении не вторгается поверхность S^t от области, из которой жидкость периодически вытесняется стенкой. Далее будет рассматриваться только первая из указанных областей, т. е. полоса $|x| < \infty$; $-b \leq y \leq 0$. Условие на границе ее $y = -b$ получается «смещением» граничного условия (4). Смещение это легко осуществить, написав

$$q(\xi + s, t) = q(\xi + s_1, t) = q(\xi, t) + (s_1, \nabla)q(\xi, t) + \dots,$$

где $\xi = (x_0, -b)$; $s_1 = s - h$; $h = \varepsilon m_2 e_2$ (см. фиг. 1). Тогда условие (4) с учетом соотношения (2) принимает следующий вид:

$$(5) \quad s_t = \nabla_{\perp} \psi(\xi, t) + (s_1, \nabla) \nabla_{\perp} \psi(\xi, t) + \dots$$

Известное уравнение для функции тока запишется в используемых безразмерных обозначениях следующим образом:

$$(6) \quad \Delta \psi - R^{-1} \Delta \Delta \psi = \partial(\psi, \Delta \psi) / \partial(x, y),$$

где $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ — оператор Лапласа; $R = \omega' / \nu' k^2$ — колебательное число Рейнольдса; ν' — коэффициент кинематической вязкости жидкости. Подстановка в уравнение (6) функции ψ в виде

$$(7) \quad \psi = \text{Re} \{ \varepsilon \mathcal{J}^{(1)}(y) e^{i\sigma} + \varepsilon^2 [\mathcal{J}^{(2)}(y) e^{2i\sigma} + \mathcal{J}(y)] + o(\varepsilon^2) \},$$

где \mathcal{J} и $\mathcal{J}^{(j)}$ — неизвестные функции ($j=1, 2$), после осреднения получаемого уравнения по времени дает

$$\mathcal{J}_{vvvv} = -\frac{iR}{2} [(\mathcal{J}_{vv}^{(1)} - \mathcal{J}^{(1)}) \cdot \mathcal{J}^{(1)}]_v.$$

Отсюда следует, что с точностью до мнимого слагаемого*

$$(8) \quad \mathcal{J} = -\frac{iR}{2} \iint \mathcal{J}^{(1)} \dot{\mathcal{J}}_v^{(1)} dy^2 + \sum_{j=0}^3 C^{(j)} y^{3-j}.$$

Здесь звездочкой обозначена операция комплексного сопряжения; $C^{(j)}$ — неизвестные константы, три из которых могут быть определены из условий

$$(9) \quad \mathcal{J}(0) = \mathcal{J}_{vv}(0) = 0; \quad \mathcal{J}(-b) = \frac{1}{2} (\mathcal{J}^{(1)} \dot{\mathcal{J}}_v^{(1)})_v|_{v=-b},$$

вытекающих из соотношений (3) и (5) при выбранном представлении функции ψ (7) (заметим, что векторное соотношение (5) дает лишь одно условие для ψ на границе $y=-b$); функция $\mathcal{J}^{(1)}$ — решение следующей граничной задачи:

$$(10) \quad \mathcal{J}_{vvvv}^{(1)} - (2 - iR) \mathcal{J}_{vv}^{(1)} + (1 - iR) \mathcal{J}^{(1)} = 0;$$

$$\mathcal{J}^{(1)}(0) = \mathcal{J}_{vv}^{(1)}(0) = 0; \quad \mathcal{J}^{(1)}(-b) = E_1; \quad \mathcal{J}_v^{(1)}(-b) = -iE_2,$$

которая получается линеаризацией по ε задачи (6), (5), (3).

Таким решением является функция

$$\mathcal{J}^{(1)} = a_1 \text{sh } y + a_2 \text{sh } \alpha y,$$

где

$$a_1 = \frac{iE_1 \text{sh } \alpha b - E_2 \alpha \text{ch } \alpha b}{\alpha \text{ch } \alpha b \text{sh } b - \text{sh } b \text{sh } \alpha b}; \quad a_2 = \frac{-iE_1 \text{sh } b + E_2 \text{ch } b}{\alpha \text{ch } \alpha b \text{sh } b - \text{ch } b \text{sh } \alpha b};$$

$$\alpha^2 = 1 - iR, \quad \text{Re } \alpha > 0.$$

Равенство (8) с учетом условий (9) может быть переписано в следующем виде, удобном для сопоставления в дальнейшем с результатом, полученным в работе [5]:

$$(11) \quad \mathcal{J}_v = \frac{1}{2} [W(y) - W(-b) + 6C^{(0)}(y^2 - b^2) + C],$$

где

$$W(y) = -iR \int_0^y \mathcal{J}^{(1)}(z) \dot{\mathcal{J}}_z^{(1)}(z) dz = \frac{R^2 a_1^* a_2}{2} \left[\frac{\text{ch}(1+\alpha)y}{(1+\alpha)^2} - \frac{\text{ch}(1-\alpha)y}{(1-\alpha)^2} \right] + \frac{R^2 a_2^* a_2}{2} \left[\frac{\text{ch}(\alpha+\alpha^*)y}{(\alpha+\alpha^*)^2} - \frac{\text{ch}(\alpha-\alpha^*)y}{(\alpha-\alpha^*)^2} \right];$$

$$C = -(\mathcal{J}^{(1)} \dot{\mathcal{J}}_v^{(1)})_v|_{v=-b};$$

* Величины, с которыми в дальнейшем проводятся только линейные операции, удобно в целях сокращения выкладок вычислять с точностью до мнимого слагаемого, так как физический смысл имеет лишь их вещественная часть.

$C^{(0)}$ — неизвестная константа, значение которой условия (9) определить не позволяют. Для выяснения физического смысла этой константы обратимся к уравнению Навье — Стокса, записанному также в безразмерном виде:

$$\mathbf{q}_t + (\mathbf{q}, \nabla) \mathbf{q} = -\nabla p + R^{-1} \Delta \mathbf{q}.$$

Подстановка в него скорости \mathbf{q} и давления p в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \nabla_{\perp} \operatorname{Re} \{ \varepsilon \mathcal{Y}^{(1)} e^{i\sigma} + \varepsilon^2 (\mathcal{Y}^{(2)} e^{2i\sigma} + \mathcal{Y}) + o(\varepsilon^2) \}, \\ p &= \operatorname{Re} \{ \varepsilon p^{(1)} + \varepsilon^2 p^{(2)} + o(\varepsilon^2) \} \end{aligned}$$

позволяет получить следующее соотношение:

$$\overline{p_x^{(2)}} = R^{-1} \mathcal{Y}_{yyy} + (i/2) \mathcal{Y}^{(1)} \dot{\mathcal{Y}}_{yy}^{(1)},$$

где черта означает операцию осреднения по времени. Отсюда, воспользовавшись равенством (11), с точностью до мнимого слагаемого получаем

$$C^{(0)} = \frac{R}{6} \overline{p_x^{(2)}},$$

т. е. x -компонента среднего по времени значения градиента давления, вычисленного с точностью до членов порядка ε^2 , оказывается всюду в рассматриваемой области постоянной величиной.

Из равенств (2), (7), (11) следует, что средняя по времени эйлерова скорость жидкости \bar{q} будет иметь лишь x -компоненту \bar{u} , равную

$$(12) \quad \bar{u} = \varepsilon^2 \operatorname{Re} \mathcal{Y}_y + o(\varepsilon^2) = \frac{\varepsilon^2}{2} [w(y) - w(b) + RG(y^2 - b^2) + c] + o(\varepsilon^2).$$

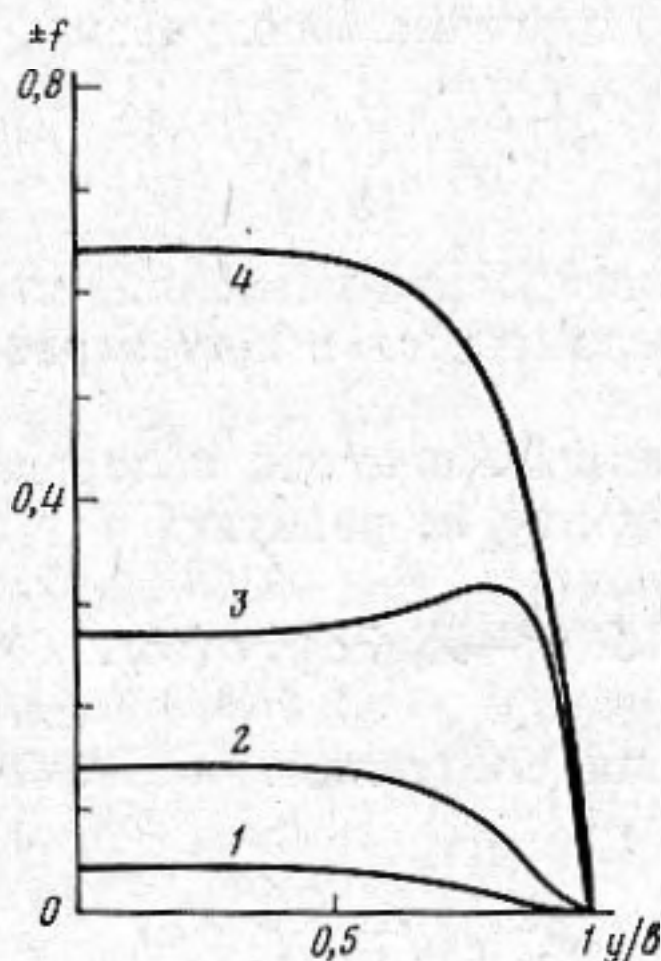
Здесь использована четность функции W и введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} w &= \operatorname{Re} W = K^{-1} \left\{ \cos \gamma y [(1+\beta) (M_1 - \gamma M_2) \operatorname{ch} (1-\beta) y - \right. \\ &\quad \left. - (1-\beta) (M_1 + \gamma M_2) \operatorname{ch} (1+\beta) y] + \sin \gamma y [(1+\beta) (\gamma M_1 + M_2) \operatorname{sh} (1-\beta) y - \right. \\ &\quad \left. - (1-\beta) (\gamma M_1 - M_2) \operatorname{sh} (1+\beta) y] + (R^2/2) (m_1^2 \operatorname{sh}^2 b - \right. \\ &\quad \left. - m_1 m_2 \operatorname{sh} 2b \sin \Phi + m_2^2 \operatorname{ch}^2 b) \left(\frac{\operatorname{ch} 2\beta y}{4\beta^2} + \frac{\cos 2\gamma y}{4\gamma^2} \right) \right\}; \\ K &= \frac{1}{2} [\operatorname{sh}^2 b (\beta^2 + \gamma^2) (\operatorname{ch} 2\beta b + \cos 2\gamma b) - \\ &\quad - \operatorname{sh} 2b (\beta \operatorname{sh} 2\beta b + \gamma \sin 2\gamma b) + \operatorname{ch}^2 b (\operatorname{ch} 2\beta b - \cos 2\gamma b)]; \\ M_1 &= -m_1^2 \operatorname{sh} b \operatorname{sh} \beta b \cos b\gamma + m_1 m_2 [\operatorname{ch} b (\sin \Phi \operatorname{sh} \beta b \cos \gamma b - \\ &\quad - \cos \Phi \operatorname{ch} \beta b \sin \gamma b) + \operatorname{sh} b \operatorname{ch} \beta b \cos \gamma b (\beta \sin \Phi + \gamma \cos \Phi) + \\ &\quad + \operatorname{sh} b \operatorname{sh} \beta b \sin \gamma \beta (\beta \cos \Phi - \gamma \sin \Phi)] - \\ &\quad - m_2^2 \operatorname{ch} b (\beta \operatorname{ch} \beta b \cos \gamma \beta - \gamma \operatorname{sh} \beta b \sin \gamma b); \\ M_2 &= m_1^2 \operatorname{sh} b \operatorname{ch} \beta b \sin \gamma \beta - m_1 m_2 [\operatorname{ch} b (\cos \Phi \operatorname{sh} \beta b \cos \gamma b + \\ &\quad + \sin \Phi \operatorname{ch} \beta b \sin \gamma b) - \operatorname{sh} b \operatorname{ch} \beta b \cos \gamma b (\beta \cos \Phi - \gamma \sin \Phi) + \\ &\quad + \operatorname{sh} b \operatorname{sh} \beta b \sin \gamma \beta (\beta \sin \Phi + \gamma \cos \Phi)] + m_2^2 \operatorname{ch} b (\gamma \operatorname{ch} \beta b \cos \gamma b + \\ &\quad + \beta \operatorname{sh} \beta b \sin \gamma b); \\ \beta &= \operatorname{Re} \alpha = \sqrt{(1 + \sqrt{1 + R^2})}/2; \quad \gamma = \operatorname{Im} \alpha = -\sqrt{(-1 + \sqrt{1 + R^2})}/2; \\ \Phi &= \arg(E_2/E_1); \quad G = \operatorname{Re} \overline{p_x^{(2)}}; \end{aligned}$$

$$c = \operatorname{Re} C = -m_1^2 + m_1 m_2 \frac{RK^{-1}}{2} \operatorname{sh} b [\operatorname{sh} b \operatorname{sh} 2\beta b (\beta \cos \Phi - \gamma \sin \Phi) +$$

$$+ \operatorname{sh} b \sin 2\gamma b (\gamma \cos \Phi + \beta \sin \Phi) - \cos \Phi \operatorname{ch} b (\operatorname{ch} 2\beta b - \cos 2\gamma b)] - \\ - m_2^2 \left[1 - \frac{RK^{-1}}{4} \operatorname{sh} 2b (\beta \sin 2\gamma b - \gamma \operatorname{sh} 2\beta b) \right].$$

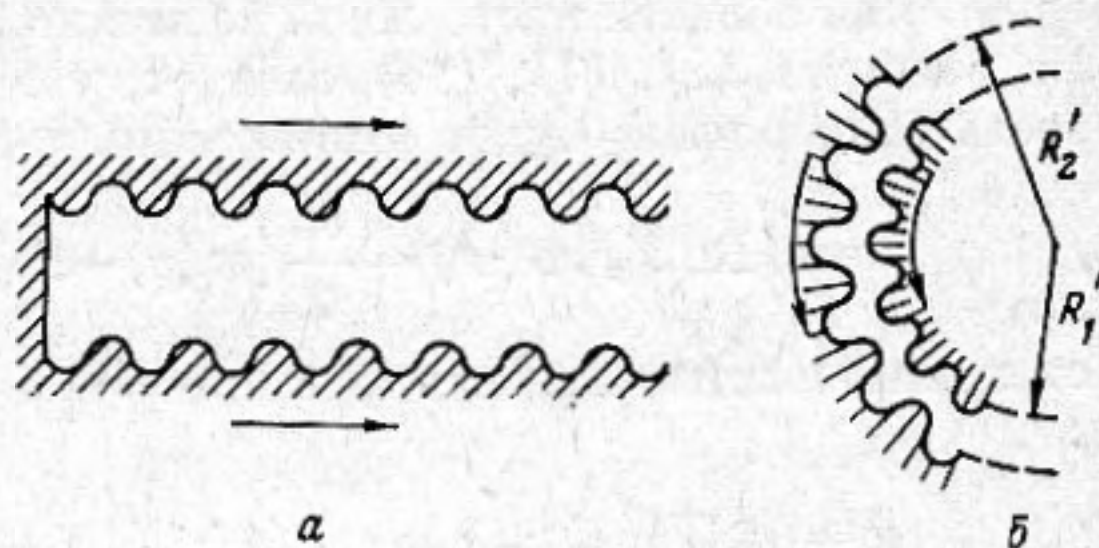
Выражение (12) позволяет рассматривать среднее (по Эйлеру) течение в канале как сумму трех потоков. Константа c определяет поток с равномерным распределением скорости вдоль оси y (поперек канала), а сама равна значению средней эйлеровой скорости на плоскости $y = -b$, умноженному на $2\varepsilon^{-2}$. Третий член в правой части выражения (12) описывает поток с параболическим профилем скорости, связанный с наличием среднего по времени градиента давления вдоль оси x . А профили скоростей потока, описываемого функцией $f = w(y) - w(b)$ при различных соотноше-



Фиг. 2

Фиг. 2. Графики функций $-f$ (кривые 1, 2, 4) и f (кривая 3) при различных соотношениях между E_1 и E_2 : 1 — $m_1=1, m_2=0$; 2 — $m_1=0, m_2=1$; 3 — $m_1=m_2=1, \Phi=0$; 4 — $m_1=m_2=1, \Phi=\pi$; $R=1$; $b=5$

Фиг. 3. Полуограниченный плоский канал и зазор между цилиндрами ($R_2' - R_1' \ll R_1', \lambda'$). Стрелки указывают направление распространения волны смещения



Фиг. 3

ниях комплексных амплитуд продольной и поперечной волн деформации, изображены на фиг. 2. Из приведенных графиков видно, что вид профиля скорости этого потока существенно зависит не только от относительной величины продольного и поперечного смещений поверхностей стенок канала, но и от фазовых соотношений между ними. Таким образом, учет продольных движений стенок канала является необходимым для получения правильной картины распределения скорости потока.

Рассмотрение частного случая, когда $k'b'=1$, позволяет сопоставить выражение (12) с результатом, полученным в работе [5], авторы которой изучали течение жидкости в плоском канале, вызываемое поперечной синусоидальной волной деформации, а в качестве малого параметра использовали величину отношения амплитуды волны к половине расстояния между его стенками. В указанном частном случае малый параметр ε может рассматриваться именно в этом смысле, так как $\varepsilon = k'a' = a'/b'$. И тогда результат (12), в предположении отсутствия продольных смещений стенок канала ($m_1=0, m_2=1$), в обозначениях, использованных в работе [5], приобретает следующий вид:

$$\bar{u} = \frac{\varepsilon^2}{2} [F(y) - F(1) + D + C_1(y^2 - 1)] + o(\varepsilon^2),$$

что совпадает с формулой (51) указанной работы.

Наконец, укажем два случая, когда решение (12) может быть использовано для описания течения жидкости в областях, отличающихся по конфигурации от рассмотренной.

1. Канал, по стенкам которого распространяется волна деформации, ограничен с одной стороны непроницаемой перегородкой (слева). Волна бежит слева направо (фиг. 3, а). Вдали от этой перегородки можно пользоваться решением (12). Константа G при этом определится из условия равенства нулю расхода жидкости через поперечное сечение канала и равна

$$G = \frac{3}{2Rb^2} \left[\frac{1}{2b} \int_{-b}^b w(y) dy - w(b) + c \right].$$

2. Движение жидкости рассматривается в области, представляющей собой зазор между двумя соосными цилиндрами, радиусы которых значительно больше ширины зазора и длины волны деформации, распространяющейся по границе области в азимутальном направлении (фиг. 3, б). В этом случае из условия осевой симметрии следует $G=0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tanaka K. Induced flow due to wavy motion of a wall. J. Phys. Soc. Japan, 1977, 42, 1, 297-305.
2. Tanaka K. Induced flow due to wavy motion of a wall. J. Phys. Soc. Japan, 1977, 42, 5, 1752-1758.
3. Полищук Г. И. Стационарные потоки над бесконечной пластиной, в которой возбуждена продольная стоячая волна. Акуст. ж., 1979, 25, 3, 434-438.
4. Jaffrin M. Y., Shapiro A. H. Peristaltic pumping. Ann. Rev. Fluid Mech., v. 3, Palo Alto, California, 1971, 13-36. (русс. перевод: Джеффрин М., Шапиро А. Перистальтическое прокачивание. Механика. Период. сб. пер. иностр. статей, 1972, 5, 88-108).
5. Fung Y. C., Yih C. S. Peristaltic transport. J. Appl. Mech., 1968, 35, 4, 669-675.
6. Hanin M. The flow through a channel due to transversely oscillating walls. Ysrael J. Technol., 1968, 6, 67-71.
7. Shapiro A. H., Jaffrin M. Y., Weinberg S. L. Peristaltic pumping with long wavelengths at low Reynolds number. J. Fluid Mech., 1969, 37, 4, 799-825.
8. Zien T.-F., Ostrach S. A long wave approximation to peristaltic motion. J. Biomech., 1970, 3, 1, 63-75.
9. Yin F. C. P., Fung Y. C. Comparison of theory and experiment in peristaltic transport. J. Fluid Mech., 1971, 47, 1, 93-112.
10. Liron N. On peristaltic flow and its efficiency. Bull. Math. Biol., 1976, 38, 6, 573-596.
11. Фердигалов Л. Ю. Однородно-вихревое течение вязкой жидкости в плоском канале с колеблющимися стенками. Гидромеханика. Респ. межвед. сб., 1978, вып. 37, 19-23.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова, физический факультет; Научно-исследовательский институт физики

Поступила
7 августа 1979 г.