

УДК 534.213

К РАСЧЕТУ КОЛЕБАНИЙ В ОТКРЫТОМ АКУСТИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ С ЗЕРКАЛАМИ-ПЬЕЗОПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯМИ

П. И. Шницер

Исходя из уравнений пьезоэффекта получен закон отражения плоской неоднородной волны от зеркала-пьезопреобразователя, учитывающий влияние электрической нагрузки пьезопреобразователя. Составлено и решено интегральное уравнение для открытого акустического резонатора с плоскими зеркалами-пьезопреобразователями. Рассмотрен случай возбуждения резонатора источником э. д. с., включенным последовательно с сопротивлением нагрузки. Полученные результаты могут быть использованы при расчете акустооптических приборов, работающих на стоячих акустических волнах.

В настоящее время для управления параметрами оптического излучения находят широкое применение акустооптические устройства, работающие в режиме стоячей акустической волны [1, 2]. Такими устройствами являются, например, акустооптические синхронизаторы мод лазера. Поэтому представляется актуальным расчет акустического поля в этих устройствах, так как структура поля определяет их важнейшие параметры: эффективность дифракции, ширину полосы рабочих частот, эффективную апертуру и т. д.

Рассмотрим для простоты двумерную модель открытого акустического резонатора в виде изотропного звукопровода с двумя параллельными гранями, к которым присоединены тонкие диэлектрические пьезопреобразователи (фиг. 1). Предположим также, что помимо пьезопреобразователей на параллельные грани звукопровода нанесены звукопоглотители, полностью поглощающие волну, падающую на поверхность грани, не занятую пьезопреобразователем. Будем считать, что пьезопреобразователи покрыты с обеих сторон металлическими электродами (их массой пренебрегаем), соединенными между собой через сопротивление Z_n . Допустим еще, что в резонаторе возбуждаются колебания с длиной волны Λ , много меньшей длины резонатора $2L$, а ширина пьезопреобразователя $2a$ также меньше $2L$, но много больше Λ .

Перечисленные допущения позволяют представить акустические колебания в рассматриваемом резонаторе в виде совокупности плоских неоднородных волн

$$(1) \quad U = U^+(x, z) e^{ikz} - (-1)^q U^-(x, z) e^{-ikz},$$

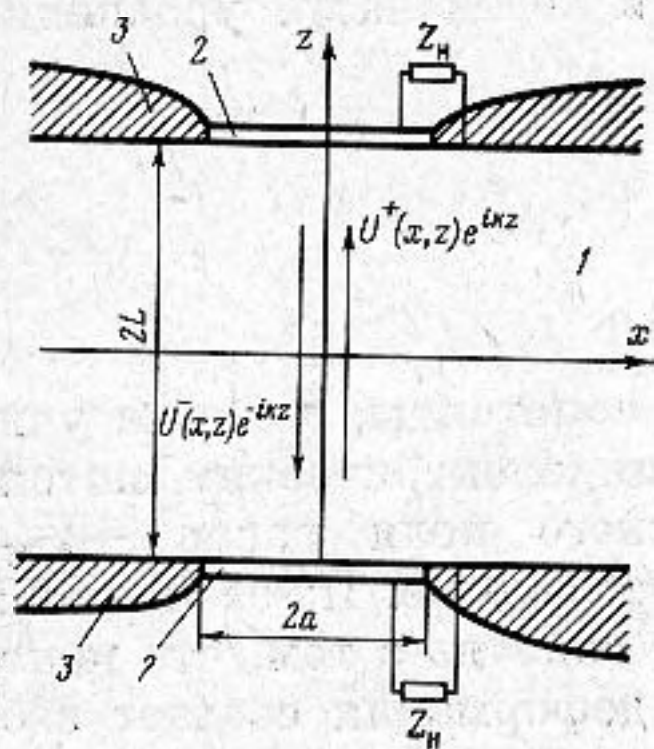
где k — волновой вектор акустической волны, U — смещение, q — целое число, и перейти от волнового уравнения к параболическому. Эти и последующие операции для расчета открытого резонатора с зеркалами в виде плоских полос описаны в работе [3]. Основное отличие поставленной нами задачи от известных заключается в законе отражения акустической волны от пьезопреобразователя.

Отражение плоской однородной волны от пьезопреобразователя рассчитано в работе [4]. Обобщим результаты этой работы на случай плоской неоднородной волны. Для простоты рассмотрим пьезопреобразователь с

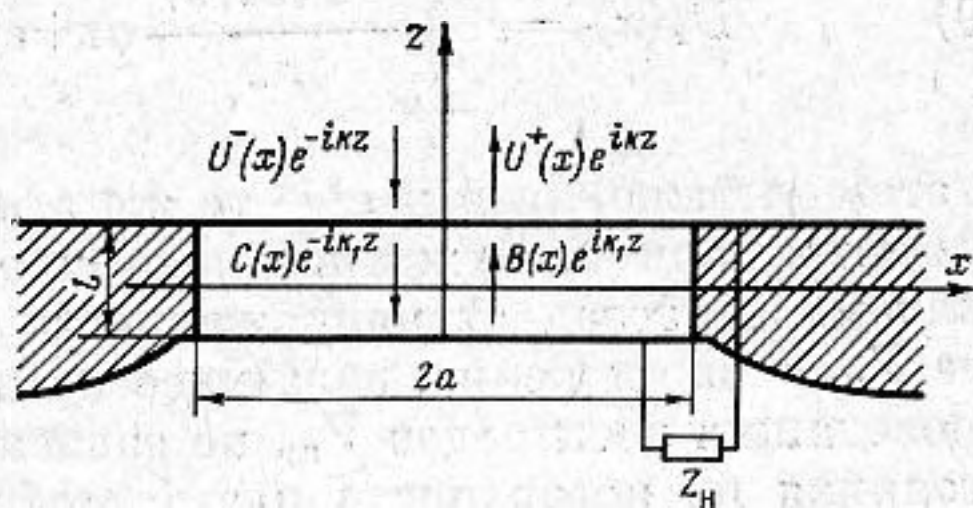
односторонней акустической нагрузкой. В случае двусторонней нагрузки изложенные ниже рассуждения остаются справедливыми, но получаемые формулы более громоздки.

Допустим, что пьезопреобразователь ориентирован относительно своих кристаллофизических осей таким образом, что при приложении к его электродам электрического потенциала в звукопроводе возбуждается лишь один тип акустической волны.

Пусть теперь на пьезопреобразователь падает акустическая волна того же типа, что и возбуждаемая им. Для удобства расчета поместим начало



Фиг. 1. Открытый акустический резонатор: 1 — звукопровод, 2 — пьезопреобразователь, 3 — звукопоглотитель



Фиг. 2. Система координат для расчета амплитуды отраженной от пьезопреобразователя волны $U^+(x)$

системы координат в центр пьезопреобразователя и ориентируем ее так, чтобы смещение в акустической волне совпадало с одной из осей (фиг. 2). Смещение U в звукопроводе вблизи границы представим в виде

$$(2) \quad U = U^-(x)e^{-ikz} + U^+(x)e^{ikz},$$

где $U^-(x)$ — распределение амплитуды падающей на пьезопреобразователь волны считаем известной функцией. Смещение в пьезопреобразователе напомним как

$$(3) \quad U_1 = B(x)e^{ik_1z} + C(x)e^{-ik_1z}.$$

При этом мы пренебрегаем трансформацией типа волны при отражении, так как считаем, что

$$(4) \quad |\partial U / \partial x| \ll |kU|.$$

В общем случае в пьезопреобразователе выполняются тензорные соотношения:

$$(5) \quad T_{1ij}(x, z) = C_{1ijkl}^E \frac{\partial U_{1k}(x, z)}{\partial x_l} - e_{kij} E_k(x, z),$$

$$(6) \quad D_i(x, z) = e_{ikl} \frac{\partial U_{1k}(x, z)}{\partial x_l} + \epsilon_{ij}^s E_j(x, z),$$

$$(7) \quad \text{Div } D(x, z) = 0.$$

где T_{1ij} — тензор механических напряжений, C_{1ijkl}^E — тензор коэффициентов упругости при постоянном электрическом поле, e_{kij} — тензор пьезокоэффициентов, E — вектор напряженности электрического поля, ϵ_{ij}^s — тензор диэлектрической проницаемости при постоянной деформации, D — вектор электрической индукции. При выбранной геометрии $D_x = 0$ и из формулы (7) следует $\partial D_z / \partial z = 0$. Вблизи металлических электродов $E = E_z$. Учитывая условие (4), уравнение (5) вблизи границ пьезопреобразователя можно

написать в скалярном виде:

$$(8) \quad T_1(x, z) = C_1^E \frac{\partial U_1(x, z)}{\partial z} - eE_z(x, z),$$

где C_1^E , e — эффективные константы, применяемые при расчете напряжений, возникающих при возбуждении пьезопреобразователя электрическим потенциалом.

Для использования полученного уравнения при записи граничных условий необходимо связать $E_z(x, z)$ с амплитудой падающей на пьезопреобразователь волны. Возьмем интеграл от правой и левой части уравнения (6), спроектировав его предварительно на ось z :

$$(9) \quad D_z(x)l = e \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\partial U_1(x, z)}{\partial z} dz + \epsilon^s \int_{-l/2}^{l/2} E_z dz.$$

В этом выражении e и ϵ^s — те же эффективные константы, которые учитываются при возбуждении пьезопреобразователя электрическим потенциалом. Интеграл от напряженности электрического поля равен $-V_{\text{пр}}$, где $V_{\text{пр}}$ — напряжение, падающее на пьезопреобразователе. Из-за наличия проводящих электродов $V_{\text{пр}}$ не зависит от x . Это связано с тем, что непостоянная по поверхности пьезопреобразователя деформация создает свободные заряды разной величины. Перераспределение этих зарядов в электродах образует в них поверхностные токи, которые не протекают через сопротивление Z_n . Ток через это сопротивление определяется лишь средней составляющей зарядов по поверхности пьезопреобразователя, и именно эта величина определяет напряжение $V_{\text{пр}}$. Для средней составляющей электрической индукции $D_{z \text{ н}}$, задающей ток через Z_n , из уравнения (9) получим

$$(10) \quad D_{z \text{ н}}l = \frac{e}{2a} \int_{-a}^a \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\partial U_1(x, z)}{\partial z} dx dz - \epsilon^s \int_{-l/2}^{l/2} E_z dz.$$

При $Z_n = \infty$ ток через нагрузку равен нулю, а следовательно, и $D_{z \text{ н}} = 0$. При этом первое слагаемое в правой части формулы (10) можно рассматривать как $\epsilon^s V$, где V — э.д.с. пьезопреобразователя. Уравнение (10) при этом может быть написано в виде

$$(11) \quad D_{z \text{ н}} = \frac{\epsilon^s}{l} VZ,$$

где Z — безразмерный параметр:

$$(12) \quad Z = \frac{Z_{\text{пр}}}{Z_{\text{пр}} + Z_n},$$

а $Z_{\text{пр}}$ — электрический импеданс пьезопреобразователя.

Продифференцируем обе части уравнения (10) по z и, учитывая формулу (11), получим

$$(13) \quad E_z = -\frac{e}{\epsilon^s 2a} \int_{-a}^a \frac{\partial U_1(x, z)}{\partial z} dx + \frac{VZ}{l}.$$

Подставляя это выражение в формулу (8), имеем

$$(14) \quad T_1(x, z) = c_1^E \left[\frac{\partial U_1(x, z)}{\partial z} + K^2 \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \frac{\partial U_1(x, z)}{\partial z} dx \right] - \frac{eVZ}{l},$$

где $z = \pm l/2$, а $K = e/\sqrt{\epsilon^s C^E}$ — коэффициент электромеханической связи. Воспользовавшись граничными условиями

$$(15) \quad U_1(x, l/2) = U(x, l/2); T_1(x, l/2) = T(x, l/2); T_1(x, -l/2) = 0$$

и учитывая формулы (2), (3), (14), а также выражение для напряжений в звукопроводе

$$(16) \quad T(x, z) = C^E \frac{\partial U(x, z)}{\partial z},$$

можно написать следующую систему уравнений:

$$(17) \quad B(x) e^{ik_1 l/2} + C(x) e^{-ik_1 l/2} = U^-(x) e^{-ik_1 l/2} + U^+(x) e^{ik_1 l/2};$$

$$(18) \quad ik_1 C_1^E [(B(x) + K^2 B_{cp}) e^{ik_1 l/2} - (C(x) + K^2 C_{cp}) e^{-ik_1 l/2}] - \frac{eVZ}{l} = \\ = ikC^E [U^+(x) e^{ik_1 l/2} - U^-(x) e^{-ik_1 l/2}];$$

$$(19) \quad ik_1 C_1^E [(B(x) + K^2 B_{cp}) e^{-ik_1 l/2} - (C(x) + K^2 C_{cp}) e^{ik_1 l/2}] - \frac{eVZ}{l} = 0,$$

где

$$(20) \quad V = i \frac{2e}{\epsilon^s} \sin \frac{k_1 l}{2} [B_{cp} - C_{cp}].$$

Появление средних по поверхности пьезопреобразователя величин B_{cp} и C_{cp} отличает данную систему уравнений от системы аналогичных уравнений в работе [4]. Решение этой системы позволяет получить распределение амплитуды отраженной от пьезопреобразователя волны $U^+(x)$:

$$(21) \quad U^+(x) = e^{-ik_1 x} \left\{ \frac{\gamma + i \operatorname{tg} k_1 l}{\gamma - i \operatorname{tg} k_1 l} U^-(x) + \right. \\ \left. + \frac{i2\gamma \left[(1+K^2) \left(K^2 \sin k_1 l - \frac{4K^2 Z}{k_1 l} \sin^2 \frac{k_1 l}{2} \right) + \frac{K^2 Z}{k_1 l} \sin k_1 l \operatorname{tg} k_1 l \right]}{\Delta (\gamma - i \operatorname{tg} k_1 l)} U_{cp}^- \right\}.$$

Здесь U_{cp}^- — средняя по поверхности пьезопреобразователя амплитуда падающей акустической волны, γ — отношение удельного акустического импеданса материала звукопровода к удельному акустическому импедансу пьезопреобразователя, а

$$(22) \quad \Delta = \gamma \left[(1+K^2) \cos k_1 l - \frac{K^2 Z}{k_1 l} \sin k_1 l \right] + \\ + i \left[\frac{4K^2 Z}{k_1 l} (1+K^2) \sin \frac{k_1 l}{2} - (1+K^2) \sin k_1 l \right].$$

При этом э.д.с. пьезопреобразователя будет

$$(23) \quad V = -4 \frac{e}{\epsilon^s} \frac{e^{-ik_1 l/2}}{\Delta} (1+K^2) \sin^2 \frac{k_1 l}{2} U_{cp}^-.$$

В практически важном случае $k_1 l = \pi$ и выражение (21) для $U^+(x)$ существенно упрощается:

$$(24) \quad U^+(x) = e^{-ik_1 x} [U^-(x) - \alpha U_{cp}^-],$$

причем α определяется параметрами пьезопреобразователя и электрической нагрузки:

$$(25) \quad \alpha = \frac{8K^2 Z}{4K^2 Z + i\gamma\pi}.$$

Таким образом, амплитуда отраженной от пьезопреобразователя волны оказывается зависящей не только от амплитуды падающей волны в этой же точке, но и от распределения амплитуды падающей волны по всей поверхности пьезопреобразователя.

Полученные результаты совпадают с экспериментальными наблюдениями работы [5], в которой приведены графики распределения интенсивности акустических колебаний вдоль фронта волны в коротком импульсе, излучаемом пьезопреобразователем, а также в падающем на пьезопреобразователь импульсе после отражения его от свободной грани звукопровода и в импульсе, отраженном от пьезопреобразователя. Эти графики показывают, что интенсивность отраженного импульса близка к нулю в тех точках, где интенсивность в падающем на пьезопреобразователь импульсе близка к средней по поверхности пьезопреобразователя.

Возвращаясь в систему координат, начало которой совпадает с центром звукопровода, и повторяя обычные рассуждения при выводе интегрального уравнения, описывающего колебания в открытом резонаторе [3], с учетом закона отражения (24) и формулы (1) получим выражение для амплитуды волны $U^+(x, L)$, падающей на верхний пьезопреобразователь:

$$(26) \quad U^+(x, L) = e^{i(2kL - \pi q)} \int_{-a} G(x-x', 2L) [U^+(x', L) - \alpha U_{cp}^+(x', L)] dx'.$$

Аналогичное уравнение получается и для амплитуды волны $U^-(x, L)$, падающей на нижний пьезопреобразователь, причем

$$(27) \quad G(x-x', 2L) = \sqrt{\frac{k}{4\pi L}} e^{i(-\pi/4 + k(x-x')^2/4L)}.$$

$$f(\xi) = U^+(x, L); \quad \xi = x\sqrt{k/2L};$$

$$M = a\sqrt{2k/L}; \quad 2\pi p = 2kL - \pi q; \quad f_{cp} = \frac{1}{M} \int_{M/2}^{M/2} f(\xi) d\xi,$$

$$(28) \quad f(\xi) = \frac{e^{i(2\pi p - \pi/4)} M/2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-M/2}^{M/2} e^{i(\xi - \xi')^2/2} [f(\xi') - \alpha f_{cp}] d\xi'.$$

При $\alpha = 0$ ($Z_n = \infty$) и при $f_{cp} = 0$ уравнение (28) совпадает с известным уравнением для колебаний в открытом резонаторе с идеальными зеркалами в виде бесконечных полос. Такое уравнение допускает приближенное решение в виде [3]: $f(\xi) = \sin s_0 \xi$ и $f(\xi) = \cos s_0 \xi$, где $s_0 = \sqrt{4\pi p}$, а

$$(29) \quad p = \frac{\pi m^2}{4(M + \beta + i\beta)^2}$$

причем m принимает четные значения для решений в виде синусов и нечетные — для косинусов, а $\beta = 0,824$. Очевидно, что $f(\xi) = \sin s_0 \xi$ удовлетворяет и уравнению (28).

С помощью линейной подстановки

$$(30) \quad \psi(\xi) = f(\xi) - \alpha f_{cp},$$

соответствующей переходу к уравнению для отраженной от пьезопреобразователя волны $U^-(x, -L)$, перепишем уравнение (28) в виде линейного неоднородного уравнения Фредгольма [6]:

$$(31) \quad \psi(\xi) = -\alpha f_{cp} + \frac{e^{i(2\pi p - \pi/4)} M/2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-M/2}^{M/2} e^{i(\xi - \xi')^2/2} \psi(\xi') d\xi'.$$

Такое уравнение рассмотрено в работе [3] при изучении вынужденных колебаний в аналогичном резонаторе с идеально отражающими зеркалами. В этом уравнении первый член в правой части соответствует возмущению поля на отражающей поверхности, созданному источником возбуждения. Решение этого уравнения в соответствии с общей теорией неоднородных уравнений Фредгольма с симметричным ядром может быть представлено в виде ряда по собственным функциям однородного интегрального уравнения [6]:

$$(32) \quad \psi(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(\xi),$$

где

$$(33) \quad c_n = \frac{c_n^0}{1 - \lambda/\lambda_n},$$

а

$$(34) \quad c_n^0 = \frac{\int_{-M/2}^{M/2} \psi_0(\xi) \psi_n(\xi) d\xi}{N_n}.$$

Здесь $\psi_0(\xi)$ — распределение возмущения, созданного источником на поверхности зеркала, $\psi_n(\xi)$ и λ_n — собственная функция и собственное число однородного интегрального уравнения, $\lambda_n = \exp[i2\pi p_n]$, $\lambda = \exp[i2\pi p]$, а нормирующий множитель N_n вычисляется по формуле

$$(35) \quad N_n = \int_{-M/2}^{M/2} \psi_n^2(\xi) d\xi.$$

Так как в нашем случае $\psi_0(\xi) = -\alpha f_{cp}$, то $c_{2m}^0 = 0$ и

$$(36) \quad \psi(\xi) = -\alpha f_{cp} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{2m-1}}{1 - \lambda/\lambda_{2m-1}} \cos(\sqrt{4\pi p_{2m-1}} \xi),$$

а

$$(37) \quad f(\xi) = -\alpha f_{cp} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{2m-1}}{1 - \lambda/\lambda_{2m-1}} \cos(\sqrt{4\pi p_{2m-1}} \xi) - 1 \right],$$

где

$$(38) \quad c_{2m-1} = \frac{2 \operatorname{sinc}(\sqrt{\pi p_{2m-1}} M)}{1 + \operatorname{sinc}(\sqrt{4\pi p_{2m-1}} M)}.$$

Величина f_{cp} определяется мощностью источника возбуждения и может быть легко определена, например, если резонатор возбуждается источником э.д.с., включенным между электродами пьезопреобразователя последовательно с Z_n .

В этом случае $\psi_0(\xi) = U_0 - \alpha f_{cp}$ (U_0 — смещение, создаваемое источником э.д.с. на границе звукопровода). Повторяя вычисления по формулам (32) — (35), получим выражение для $f(\xi)$, зависящее как от U_0 , так и от f_{cp} . Проинтегрировав его в пределах от $-M/2$ до $M/2$, получим уравнение для нахождения f_{cp} и, следовательно, амплитуды вынужденных колеба-

ний $\psi^U(\xi)$ и $f^U(\xi)$. В результате вычислений находим, что

$$(39) \quad f^U(\xi) = \frac{U_0 \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{2m-1}}{1-\lambda/\lambda_{2m-1}} \cos(\sqrt{4\pi p_{2m-1}} \xi) - 1 \right]}{1 + \alpha \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{2m-1}^U}{1-\lambda/\lambda_{2m-1}} - 1 \right]},$$

$$(40) \quad \psi^U(\xi) = \frac{U_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{2m-1}}{1-\lambda/\lambda_{2m-1}} \cos(\sqrt{4\pi p_{2m-1}} \xi)}{1 + \alpha \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{2m-1}^U}{1-\lambda/\lambda_{2m-1}} - 1 \right]},$$

где

$$(41) \quad c_{2m-1}^U = c_{2m-1} \cdot \text{sinc}(\sqrt{\pi p_{2m-1}} M).$$

Исходя из последних выражений, описывающих распределение смещения вблизи пьезопреобразователя, можно рассчитать смещение в любой точке звукопровода [3]. Отметим, что полученные результаты могут быть легко обобщены на случай резонатора с прямоугольными зеркалами-пьезопреобразователями, если представить смещение в виде произведения сомножителей, каждый из которых зависит лишь от одной из координат.

Предложенный метод расчета справедлив для любых акустических резонаторов с плоскими зеркалами-пьезопреобразователями, так как переход от однородного интегрального уравнения, описывающего колебания в резонаторе с обычными зеркалами, к неоднородному уравнению связан лишь с законом отражения акустической волны от пьезопреобразователя (24), который справедлив для любых плоских пьезопреобразователей.

Автор благодарен Л. Н. Магдичу за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. DiDomenico M., Marcos H. M., Geusic J. E., Smith R. E. Generation of ultrashort optical pulses by mode locking the YAG: Nd laser. Appl. Phys. Lett., 1966, 8, 4, 180-182.
2. Yao S. K., Tsai C. S. Acoustooptical Bragg diffraction with application to ultrahigh data rate communication systems. Appl. Opt., 1977, 16, 11, 3032-3060.
3. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. М., «Советское радио», 1966.
4. Грищенко Е. К. Потери и частотные характеристики пьезоприемников. Акуст. ж., 1973, 19, 2, 162-169.
5. Rice R. R., Burkhart G. H., Teague J. R. A Barium sodium niobate acousto-optic mode locker/frequency doubler for Nd: YAG. J. Appl. Phys., 1976, 47, 7, 3046-3052.
6. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 4. М., Физматгиз, 1958.

Поступила
17 июля 1979 г.