

5. Prudhomme R. O., Busso R. H. Photogenese ultraviolette dans l'eau soumise aux ultrasons. Compt. rend., 1952, 235, 23, 1486-1488.
6. Журавлев А. И., Аюпян В. Б. Ультразвуковое свечение. М., «Наука», 1977.
7. Srinivasan D., Holroyd L. V. Optical spectrum of the sonoluminescence emitted by cavitated water. J. Appl. Phys., 1961, 32, 3, 446-449.
8. Neppiras E. A., Noltingk B. E. Cavitation produced by ultrasonic. Proc. Phys. Soc., 1950, B63, 9, 674-685.
9. Taylor K. J., Jarman P. D. The spectra of luminescence. Austral. J. Phys., 1970, 23, 3, 319-334.
10. Jarman P. D. Measurement of sonoluminescence from pure liquids some aqueous solutions. Proc. Phys. Soc., 1958, 73, 472, 628-640.
11. Зайдель А. Н., Прокофьев В. Н., Райский С. М., Славный В. А., Шрейдер Е. Я. Таблицы спектральных линий. М., «Наука», 1969.
12. Прингсгейм П. Флуоресценция и фосфоресценция. М., «Наука», 1951, 158-160.

Научно-исследовательский радио-
физический институт, Горький

Поступила
14 мая 1979 г.
После исправления
24 декабря 1979 г.

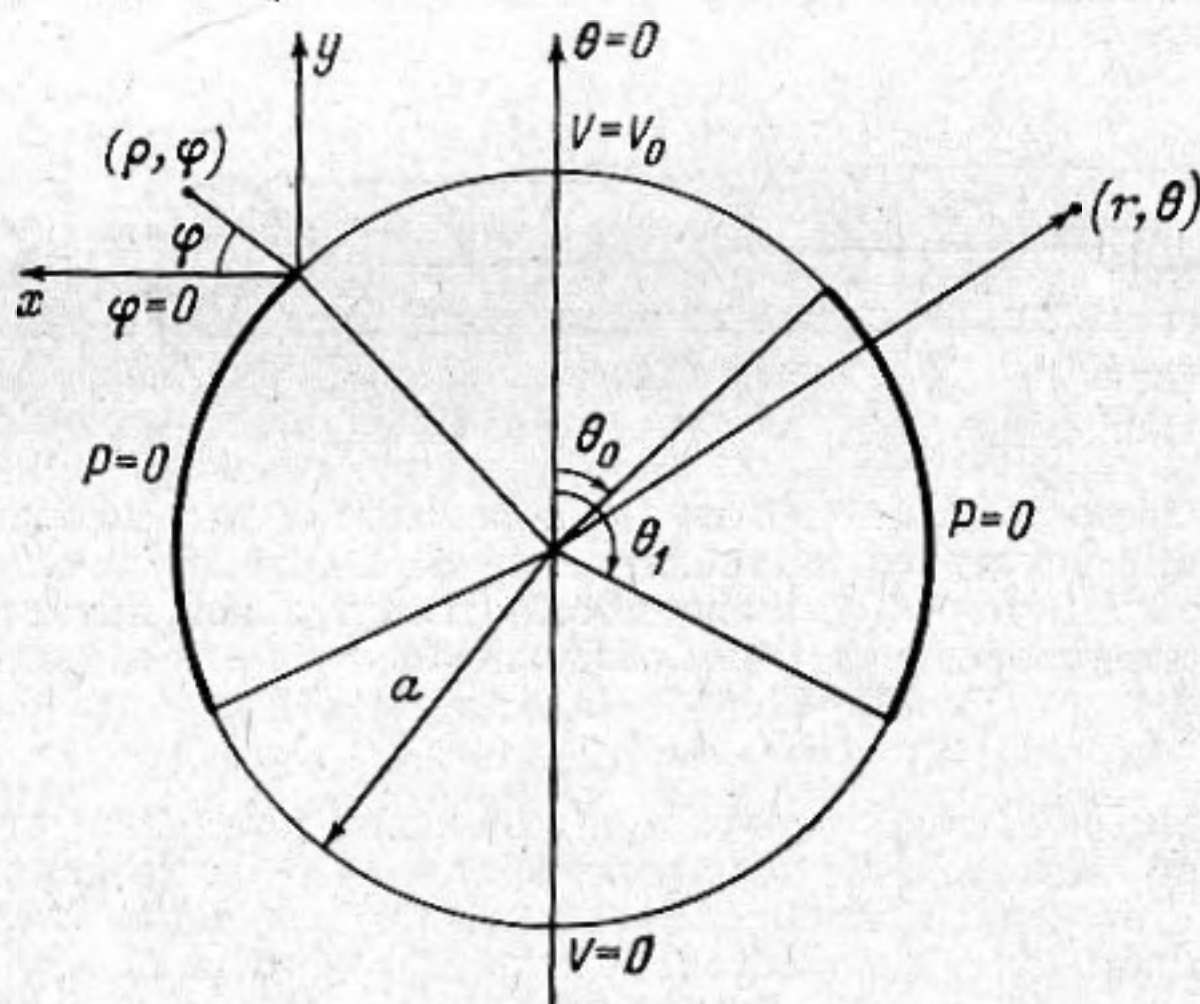
УДК 534.26

ЗВУКОВОЕ ПОЛЕ ЭКРАНИРОВАННОГО КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

В. Т. Гринченко, С. А. Луцева

Экранирование часто используется как эффективное средство повышения направленности излучения [1-4]. Однако расчет звукового поля, создаваемого экранированным излучателем, связан с необходимостью рассматривать сложные смешанные задачи для уравнения Гельмгольца. Это в определенной мере объясняет, почему в настоящее время практически отсутствуют достаточно полные количественные оценки звуковых полей экранированных источников.

Ниже рассматривается плоская задача об излучении звука частично экранированным бесконечным круговым цилиндром. Геометрия задачи и типы граничных условий даны на фиг. 1. Задача является достаточно простой и допускает физически



Фиг. 1. Геометрия задачи

точное решение. Вместе с тем полученные при ее рассмотрении оценки звукового поля (особенно ближнего) в определенной мере типичны для широкого круга излучателей.

Для анализа звукового поля с временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$, создаваемого излучателем, показанным на фиг. 1, необходимо найти решение следующей граничной задачи:

$$\nabla^2 \Phi(r, \theta) + k^2 \Phi(r, \theta) = 0;$$

$$(1) \quad -\frac{\partial \Phi}{\partial r}(a, \theta) = V_0 (|\theta| \leq \theta_0); \quad \Phi(a, \theta) = 0 \quad (\theta_0 < |\theta| \leq \theta_1);$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial r}(a, \theta) = 0 \quad (\theta_1 < |\theta| \leq \pi),$$

где $\Phi(r, \theta)$ — потенциал колебательной скорости поля, k — волновое число.

Метод решения сформулированной граничной задачи должен давать достоверные количественные оценки характеристик звукового поля во всей области его существования. Однако поиск решения задачи, удовлетворяющего таким требованиям, осложняется наличием локальных особенностей в поле скоростей, обусловленных сменой характера граничных условий на поверхности цилиндра. Ниже реализуется один из возможных подходов к использованию известной в теории дифракции идеи — учесть известные локальные особенности для повышения эффективности численных алгоритмов определения характеристик поля [5–9]. Способ основывается на использовании общего свойства разложения по системам ортогональных функций — скорость убывания коэффициентов разложения определяется локальными особенностями разлагаемой функции. Знание этих особенностей позволяет до проведения конкретных вычислений дать оценку скорости убывания коэффициентов. Основываясь на этом положении, путем последовательного увеличения числа членов ряда Фурье в представлении искомого потенциала скоростей $\Phi(r, \theta)$ удастся получить физически точное решение задачи как в ближнем, так и в дальнем поле.

Ввиду симметрии поля решение уравнения (1) представляется в виде

$$(2) \quad \Phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)'}(ka)} \cos n\theta,$$

где A_n — последовательность неизвестных коэффициентов Фурье разложения колебательной скорости на поверхности цилиндра.

Система граничных условий в формуле (2) порождает следующие функциональные уравнения для определения A_n :

$$(3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\theta = -V_0/k, \quad 0 < |\theta| \leq \theta_0;$$

$$i \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{H_n^{(1)}(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} \cos n\theta = 0, \quad \theta_0 < |\theta| \leq \theta_1;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\theta = 0, \quad \theta_1 < |\theta| \leq \pi,$$

где $H_n^{(1)'}(x)$ — производная функции Ханкеля по полному аргументу.

Представление системы в таком виде, в частности деление первого и третьего равенств на волновое число k , имеет важное значение. В результате система представляет собой набор равенств на интервале $[0, \pi]$ для величины одной размерности. Это обстоятельство позволяет на основе свойства полноты тригонометрических функций на интервале $|\theta| \leq \pi$ преобразовать систему функциональных уравнений (3) в следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$(4) \quad A_0 \left\{ \left[i \frac{H_0^{(1)}(ka)}{H_0^{(1)'}(ka)} - 1 \right] (\theta_1 - \theta_0) + \pi \right\} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[i \frac{H_n^{(1)}(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} - 1 \right] \frac{\sin n\theta_1 - \sin n\theta_0}{n} = -\frac{V_0 \theta_0}{k}, \quad m = 0;$$

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{\infty} A_n \left\{ \left[i \frac{H_n^{(1)}(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} - 1 \right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{\sin(m+n)\theta_1 - \sin(m+n)\theta_0}{m+n} + \frac{\sin(m-n)\theta_1 - \sin(m-n)\theta_0}{m-n} \right] \right\} +$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{2} A_m \left\{ \left[i \frac{H_m^{(1)}(ka)}{H_m^{(1)'}(ka)} - 1 \right] \left(\frac{\sin 2m\theta_1 - \sin 2m\theta_0}{2m} + \theta_1 - \theta_0 \right) + \pi \right\} = \\ & = - \frac{V_0 \sin m\theta_0}{km}, \quad m \neq 0. \end{aligned}$$

Бесконечные системы уравнений типа (4) обычно решают методом редукции. Однако такой подход (см. работу [5]) в ряде случаев не обеспечивает однозначности решения системы и ввиду медленной сходимости рядов приводит к значительным погрешностям при оценке структуры ближнего поля. Дополнительным физическим условием, обеспечивающим выделение единственного решения системы (4), является условие в точках смены характера граничных условий, т. е. в точках $|\theta| = \theta_0$ и $|\theta| = \theta_1$. Можно показать [6], что радиальная компонента скоростей частиц в окрестности, например, точки $\theta = -\theta_0$ (фиг. 1) представима в виде

$$(5) \quad V_r = \frac{V(\varphi)}{\rho^{1/2}} + \Psi(\rho, \varphi),$$

где $\Psi(\rho, \varphi)$ и $V(\varphi)$ — некоторые гладкие функции. Аналогичные представления справедливы и для точек $\theta = \theta_0$, $\theta = \theta_1$, $\theta = -\theta_1$ на поверхности цилиндра.

Если учесть представление (5), то по свойству ряда Фурье нетрудно найти, что коэффициенты A_n при возрастании n должны убывать по закону

$$(6) \quad A_n = B n^{-1/2} \cos(n\theta_0 + \pi/4),$$

где B — некоторая постоянная.

Если считать, что начиная с некоторого номера N достаточную точность для вычисления A_n доставляет первый член асимптотики, то из формулы (6) получаем

$$(7) \quad A_{n/n > N} = A_N \frac{N^{1/2} \cos(n\theta_0 + \pi/4)}{n^{1/2} \cos(N\theta_0 + \pi/4)}.$$

Использование выражения (7) при редукции системы (4) позволяет устранить возможную неоднозначность и дает возможность по решению конечной системы находить все неизвестные. Отметим, что в частном случае, когда $\theta_1 = \pi$, для вычисления скорости и давления на поверхности цилиндра можно получить следующие ряды с улучшенной сходимостью:

$$\begin{aligned} V(a, \theta) &= -k \sum_{n=0}^N A_n \cos n\theta - k A_N \frac{N^{1/2}}{\cos(N\theta_0 + \pi/4)} \left\{ [2(1 - \theta_0/\pi)]^{1/2} \times \right. \\ & \times [(\pi - \theta_0)^2 - (\pi - \theta)^2]^{-1/2} - [\pi(\pi - \theta_0)/2]^{1/2} \sum_{n=0}^N (-1)^{n-1} J_0[n(\pi - \theta_0)] \cos n\theta \left. \right\}; \\ P(a, \theta) &= i\rho\omega \left\{ \sum_{n=0}^N A_n \frac{H_n^{(1)}(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} \cos n\theta + A_N \frac{N^{1/2}ka}{\cos(N\theta_0 + \pi/4)} \times \right. \\ & \times \left[2 \left(\frac{\theta^2 - \theta_0^2}{2\pi\theta_0} \right)^{1/2} - (\pi\theta_0/2)^{1/2} \sum_{n=0}^N \frac{J_1(n\theta_0)}{n} \cos n\theta \right] \left. \right\}, \end{aligned}$$

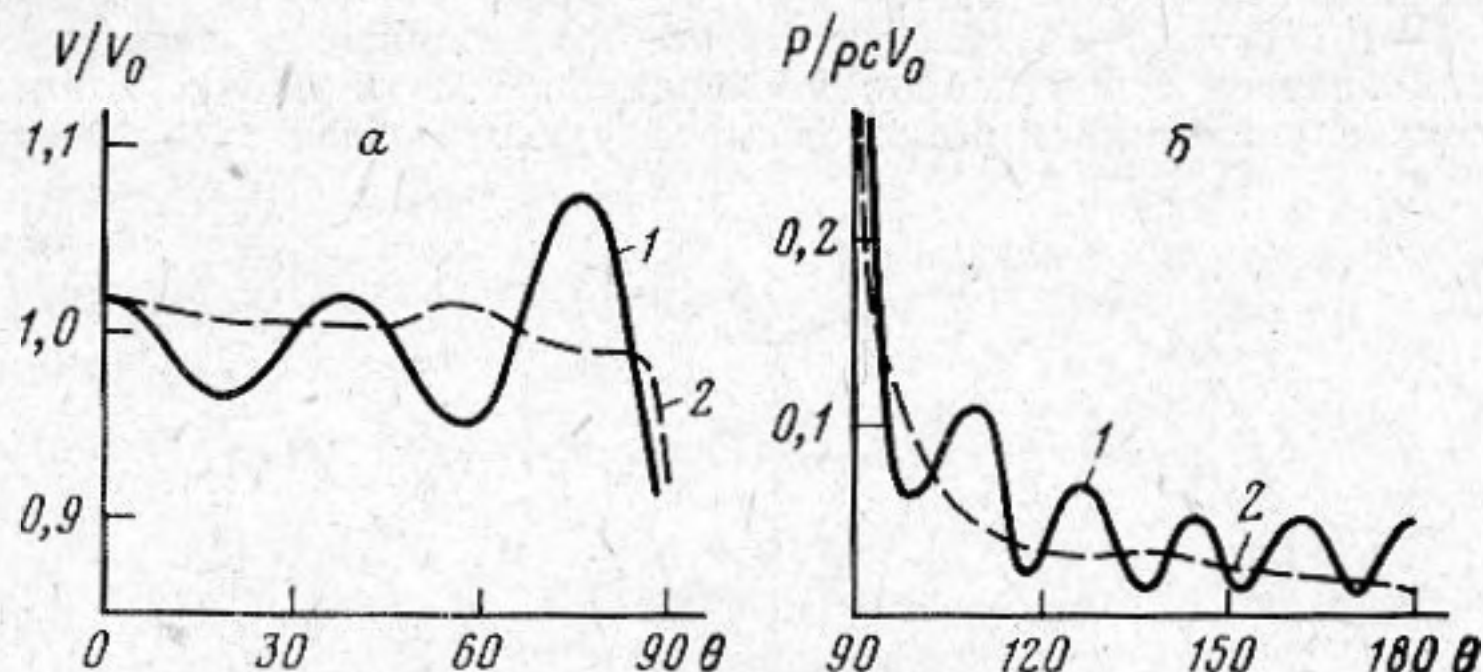
где $J_n(x)$ — цилиндрическая функция Бесселя n -го порядка.

Выражение для характеристики направленности излучателя, пронормированное к значению звукового давления в направлении $\theta = 0$, и сопротивление излучения имеют вид

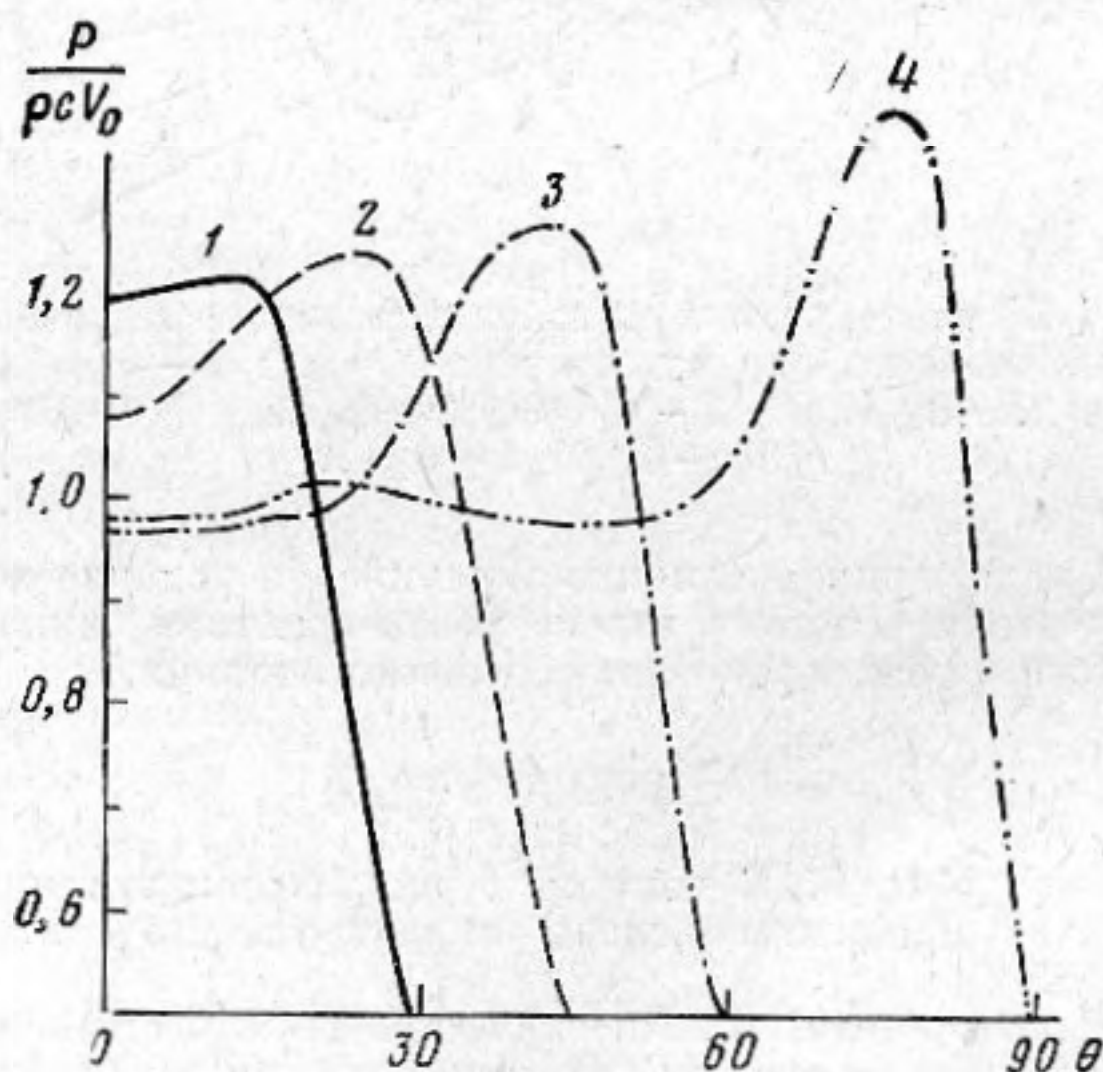
$$\begin{aligned} R(\theta) &= \left| \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{H_n^{(1)'}(ka)} (-i)^n \cos n\theta}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{H_n^{(1)'}(ka)} (-i)^n} \right|, \\ Z &= -i\rho c \frac{k}{V_0} \left[A_0 \frac{H_0^{(1)}(ka)}{H_0^{(1)'}(ka)} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{H_n^{(1)}(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} \frac{\sin n\theta_0}{n\theta_0} \right]. \end{aligned}$$

Расчеты проводились для системы (4), а также для аналогичной системы уравнений с учетом особенности на ребре при $ka=2\pi$ для различных значений θ_0 и θ_1 и различного числа N уравнений системы.

На фиг. 2 проиллюстрировано выполнение граничных условий на поверхности излучателя при $\theta_0=90^\circ$ и $\theta_1=180^\circ$, $N=10$. На фиг. 2, а представлен модуль колебательной скорости на активной части поверхности излучателя и на фиг. 2, б — модуль давления на экранированной части поверхности (1 — без учета особенности на ребре, 2 — с учетом особенности)



Фиг. 2. Выполнение граничных условий при $\theta_0=90^\circ$, $\theta_1=180^\circ$: а — на активной части поверхности излучателя, б — на экранированной части поверхности; 1 — без учета особенности на ребре, 2 — с учетом особенности



Фиг. 3. Звуковое давление на активной части поверхности цилиндрического излучателя при $\theta_1=180^\circ$: 1 — $\theta_0=30^\circ$, 2 — $\theta_0=45^\circ$, 3 — $\theta_0=60^\circ$, 4 — $\theta_0=90^\circ$

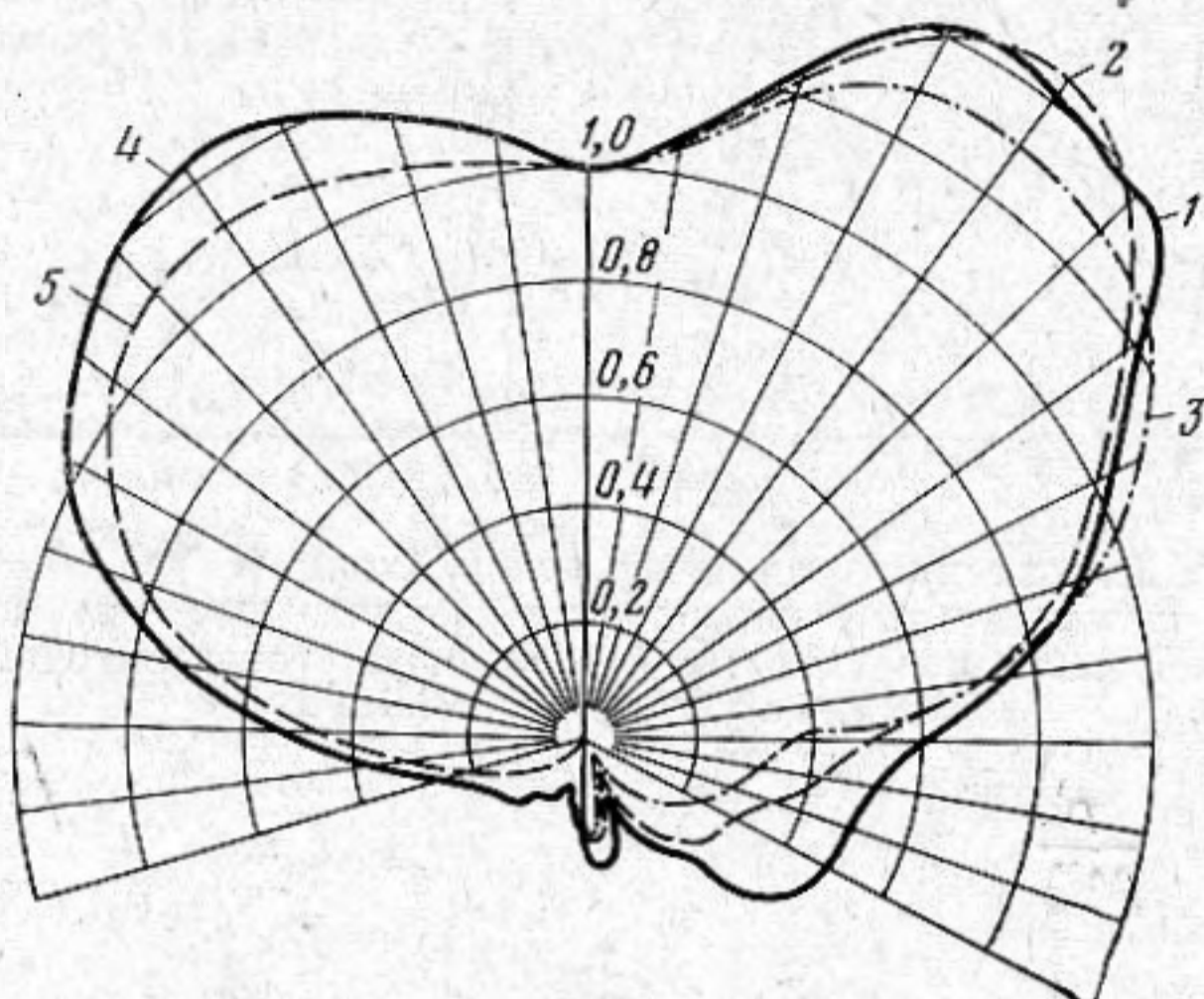
2 — с ее учетом). Как видно из фиг. 2, учет особенности при одинаковом порядке конечной системы, соответствующей системе (4), позволяет значительно улучшить выполнение граничных условий. Флуктуации скорости и давления, обусловленные усечением ряда Фурье, существенно сглаживаются при учете особенностей в поле скоростей.

На фиг. 3 представлено звуковое давление на активной части поверхности цилиндрического излучателя при $\theta_1=180^\circ$ для четырех размеров излучающей поверхности (1 — $\theta_0=30^\circ$, 2 — $\theta_0=45^\circ$, 3 — $\theta_0=60^\circ$, 4 — $\theta_0=90^\circ$). Как следует из графика, поле в ближней зоне излучателя обладает значительной неравномерностью. При относительно малом угле излучения ($\theta_0=30^\circ$) наблюдается общее повышение уровня давления по сравнению с $\rho c V_0$. С увеличением угла излучения возрастает неравномерность в распределении давления. Его максимум смещается к границе активной зоны. Здесь давление на величину порядка 40% больше, чем в центре излучающей поверхности ($\theta_0=90^\circ$).

При проведении вычислений учет особенности на ребре позволяет получить для распределения давления практически точный результат уже при $N=12$. Метод простой редукции при решении бесконечной системы (4) вносит существенную погреш-

ность даже при $N=17$. При вычислении характеристики направленности излучателя практически достаточно решения 10 уравнений системы с выделением особенности на ребре. Характерно, что метод прямой редукции связан с существенным увеличением объема вычислений даже при определении такой интегральной характеристики, как сопротивление излучения. Во всех рассмотренных случаях этот метод приводит к заниженным значениям активной части сопротивления.

На фиг. 4 представлена зависимость характеристики направленности от величины экранирующей зоны для $\theta_0=90^\circ$ ($1 - \theta_1=\theta_0$, $2 - \theta_1=\theta_0+(\pi-\theta_0)/4$, $3 - \theta_1=\theta_0+(\pi-\theta_0)/2$, $4 - \theta_1=\theta_0+3(\pi-\theta_0)/4$). При отсутствии экранировки характеристика направленности обладает существенной неравномерностью и наблюдается излучение в тыльной зоне. С увеличением размеров экранирующей области улучшаются харак-



Фиг. 4. Характеристика направленности экранированного цилиндрического излучателя для $\theta_0=90^\circ$: $1 - \theta_1=\theta_0$, $2 - \theta_1=\theta_0+(\pi-\theta_0)/4$, $3 - \theta_1=\theta_0+(\pi-\theta_0)/2$, $4 - \theta_1=\theta_0+3(\pi-\theta_0)/4$, $5 - \theta_1=\pi$

теристики дальнего поля, причем влияние экранировки усиливается при увеличении активной зоны излучателя. Отметим, что на характеристики ближнего поля размеры экранирующей области не оказывают значительного влияния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вовк И. В., Гринченко В. Т. К вопросу о направленности цилиндрического излучателя, частично прикрытого слоем экранирующего материала. Акуст. ж., 1975, 21, 2, 294-295.
2. Карновский М. И., Лозовик В. Г. Акустическое поле бесконечного кругового цилиндрического излучателя при смешанных граничных условиях на его поверхности. Акуст. ж., 1964, 10, 2, 313-317.
3. Обозненко И. Л. О скалярном поле цилиндрического излучателя при смешанных граничных условиях на его поверхности. Сб. тр. Киевского политехн. ин-та, 1965, 2, 75-81.
4. Gerding C., Thompson W. Axisymmetric spherical radiator with mixed boundary conditions. J. Acoust. Soc. America, 1977, 62, 1, 313-317.
5. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М., «Мир», 1974.
6. Нобл Б. Методы Винера - Хопфа. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
7. Уфимцев П. Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции. М., «Советское радио», 1962.
8. Вайнштейн Л. А., Белкина М. Г. Методы двойной редукции и бесконечные системы линейных уравнений для коэффициентов разложения искомой функции с особенностями. Докл. АН СССР, 1970, 194, 4, 794-796.
9. Уфлянд Я. С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л., «Наука», 1977.

Институт механики
Академии наук УССР

Поступила
25 июля 1979 г.

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН В СРЕДАХ С ВЫСОКОЧАСТОТНЫМ ЗАТУХАНИЕМ

С. Н. Гурбатов

При взаимодействии интенсивных волн в нелинейной среде спектр поля обогащается новыми спектральными составляющими. Для акустических волн важную роль играет вязкость и теплопроводность среды, которые приводят к более эффективному затуханию высоких гармоник и, следовательно, могут весьма существенно изменить картину взаимодействия волн.

Пусть на входе в нелинейную среду при $x=0$ заданы две плоские гармонические волны с существенно различными частотами ω_0 и Ω ($\omega_0 \gg \Omega$):

$$(1) \quad v_0(t) = A \sin \omega_0 t + a \sin \Omega t.$$

При анализе поля $v(t, x)$ будем исходить из уравнения Бюргера

$$(2) \quad v_x' - \beta v v_t' = \mu v_{tt}'',$$

которое, как известно, нелинейной заменой [1] сводится к линейному уравнению диффузии

$$(3) \quad v = -\frac{2\mu}{\beta} (\ln U)_t'; \quad U_x' = \mu U_{tt}''.$$

В предельном случае, когда низкочастотная волна есть просто постоянная составляющая $-v_n$, решение для $v(t, x)$ имеет вид

$$(4) \quad v(t, x) = v_n + v_n^0(t - \beta v_n x, x),$$

где $v_n^0(t, x)$ есть решение (2) при $v_n = 0$. Таким образом, постоянная составляющая приводит к сдвигу волны на величину $-\beta v_n x$. Выражение (4) при определенных условиях справедливо и при квазистатическом изменении $v_n(t)$. Ниже проанализируем взаимодействие низкочастотной и высокочастотной волн и обсудим пределы применимости формулы (4).

Начальные условия к уравнению для вспомогательного поля записываются в виде

$$(5) \quad U(t, 0) = \exp \{ \text{Re}_n \cos \Omega t + \text{Re}_0 \cos \omega_0 t \},$$

где $\text{Re}_0 = \beta A / 2\mu \omega_0$, $\text{Re}_n = \beta a / 2\mu \Omega$ — акустические числа высокочастотных и низкочастотных волн. Решение уравнения (3) с начальными условиями (5) записывается в виде

$$(6) \quad U(t, x) = U_0(t, x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t, x),$$

$$U_0(t, x) = I_0(\text{Re}_0) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k(\text{Re}_n) \cos k\Omega t e^{-\mu k^2 \Omega^2 x},$$

$$U_n(t, x) = I_n(\text{Re}_0) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k(\text{Re}_n) \cos (n\omega_0 + k\Omega) t e^{-\mu (n\omega_0 + k\Omega)^2 x},$$

где $I_n(z)$ — модифицированные функции Бесселя. При выполнении условий

$$(7) \quad \mu \Omega^2 x \ll 1, \quad a \beta \Omega x \ll 1$$

низкочастотная составляющая поля U не успевает исказиться — $U_0(t, x) \approx U_0(t, 0)$, что соответствует отсутствию искажений низкочастотной составляющей поля $v(t, x)$ из-за нелинейности среды и высокочастотной диссипации. В дальнейшем будем считать эти условия выполненными.

Взаимодействие низкочастотного сигнала с высокочастотным приводит к появлению комбинационных гармоник на частотах $n\omega_0 + k\Omega$. Важным параметром при этом является величина $z = \mu \omega_0 \Omega x$, характеризующая неравномерность высокочастотного затухания в полосе частот модулированного высокочастотного сигнала.

Рассмотрим вначале случай $z \ll 1$. Пренебрегая в (6) в показателе экспоненты множителем $\mu (k\Omega)^2 x$ (это соответствует предположению об отсутствии искажений