АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXVII 1981 Вып. 1

УДК 534.286

ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА СДВИГОВЫЙ ИМПЕДАНС ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ

Геворкян Э. В.

Рассмотрено распространение сдвиговых волн в анизотропной неоднородной среде – жидком кристалле, помещенном в магнитное поле. Получены уравнения, описывающие влияние умеренного магнитного поля на сдвиговый импеданс жидких кристаллов. Найдены разложения в ряд для амплитуды сдвиговых волн и сдвигового импеданса при различных соотношениях между магнитной длиной когерентности и глубиной проникновения сдвиговой волны. Показана возможность определения отношений упругих постоянных Франка к анизотропии диамагнитной восприимчивости по экспериментальной зависимости сдвигового импеданса от напряженности магнитного поля.

Как известно, эффективным методом изучения вязкоупругих и кинетических свойств жидких кристаллов является изучение распространения и отражения сдвиговых волн. Указанная методика ввиду малой глубины проникновения волн удобна также для зондирования свойств поверхностного слоя [1].

В этой связи значительный теоретический и экспериментальный интерес представляет задача о распространении сдвиговых волн в неоднородной жидкокристаллической среде. Распространение продольных акустических волн в изотропных слоисто-неоднородных средах подробно обсуждается в монографии [1]. В настоящей работе рассматривается распространение сдвиговых волн в анизотропной слоисто-неоднородной жидкокристаллической среде и, в частности, в нематических жидких кристаллах с полем директора, деформированным внешним магнитным полем.

Направим волновой вектор по оси 1, а скорость – по оси 3. Будем считать, что размеры жидкого кристалла велики по сравнению с глубиной проникновения волны $l\gg\delta$. Тензор градиентов скорости имеет две отличные от нуля компоненты: $A_{13}=A_{31}=v_{3,1}/2$. Диссипативная часть тензора напряжений в гидродинамике нематических жидких кристаллов Лесли – Эриксена имеет вид [2]

$$\sigma_{13}'=\alpha_1 n_1^2 n_3^2 v_{3,1}+{}^1/_2\alpha_4 v_{3,1}+{}^1/_2\alpha_5 n_1^2 v_{3,1}+ +{}^1/_2\alpha_6 n_3^2 v_{3,1}+\alpha_2 n_1 N_3+\alpha_3 n_3 N_1, \tag{1}$$

где α_i – коэффициенты Лесли,

$$N_1=\frac{h_1}{\gamma_1}-\frac{\gamma_2}{2\gamma_1}n_3(1-2n_1^2)v_{3,1},$$
$$N_3=\frac{h_3}{\gamma_1}-\frac{\gamma_2}{2\gamma_1}n_1(1-2n_3^2)v_{3,1}, \tag{2}$$

$\gamma_1=\alpha_3-\alpha_2$; $\gamma_2=\alpha_6-\alpha_5=\alpha_2+\alpha_3$; h_k – молекулярное поле.

[1] Например, для проверки граничных условий сильного сцепления (5).

Гидродинамические уравнения для рассматриваемой задачи в одноконстантном приближении с учетом нормировки $\mathbf{n}^2=1$ можно записать в виде ($\mathbf{H}=H\mathbf{e}_\beta$)

(3) $$-\frac{\partial\delta n_i}{\partial t}-{}^1/_2 v_{3,1}\left[n_{03}\delta_{i1}\left(1+\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)-n_{01}\delta_{i3}\left(1-\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)-\right.$$
$$\left.-2n_{01}n_{03}n_{0i}\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right]+\frac{K}{\gamma_1}\delta n_{1,11}(\delta_{i1}-n_{01}n_{0i})+$$
$$+\frac{\chi_a H^2}{\gamma_1}(\delta n_i\delta_{i\beta}-n_{0\beta}{}^2\delta n_i-2n_{0\beta}n_{0i}\delta n_\beta)=0,$$

(4) $$-\rho\frac{\partial v_3}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\alpha_2 n_{01}\left(\frac{\partial\delta n_3}{\partial t}-{}^1/_2 v_{3,1}n_{01}\right)+\right.$$
$$+\alpha_3 n_{03}\left(\frac{\partial\delta n_1}{\partial t}+{}^1/_2 v_{3,1}n_{03}\right)+$$
$$\left.+[\alpha_1 n_{01}{}^2 n_{03}{}^2+{}^1/_2\alpha_4+{}^1/_2\alpha_5 n_{01}{}^2+{}^1/_2\alpha_6 n_{03}{}^2]v_{3,1}\right\}=0,$$

где ρ — плотность, K — модуль упругости Франка, χ_a — анизотропия магнитной восприимчивости, директор $n_i=n_{0i}+\delta n_i$, $n_{0i}(x_1)$ — равновесное поле директора, которое определяется из уравнений теории упругости жидких кристаллов (см. ниже). Граничные условия

(5) $$\delta n_i|_{x_1=0}=0;\quad v_3|_{x_1=0}=v_0\exp(-i\omega t).$$

Для расчета комплексного коэффициента отражения (основного экспериментально измеряемого параметра) сдвиговых волн существенными являются свойства жидкого кристалла на расстояниях порядка глубины проникновения δ от границы. Поскольку ориентационная волна имеет малую глубину проникновения δ_n: $\delta_n/\delta\simeq(K\rho/\eta^2)^{1/2}\equiv\mu^{1/2}\sim10^{-2}\ll1$, то из (3), (4) получаем волновое уравнение для сдвиговых волн с эффективным коэффициентом вязкости $\eta(x_1)$, зависящим от x_1:

(6) $$\frac{d}{dx_1}\left(\eta(x_1)\frac{d}{dx_1}v\right)+i\omega\rho v=0,$$
$$v(0)=v_0;\quad v(\infty)=0,$$

где

(7) $$\eta(x_1)=n_{01}{}^2n_{03}{}^2[\alpha_1+(\gamma_2/\gamma_1)(\alpha_2+\alpha_3)]+$$
$$+{}^1/_2[\alpha_4+n_{01}{}^2(\alpha_5-\gamma_2\alpha_2/\gamma_1)+n_{03}{}^2(\alpha_6-\gamma_2\alpha_3/\gamma_1)],$$

$v_3=v(x_1)\exp(-i\omega t)$, а магнитная длина когерентности $\xi=(K/\chi_a)^{1/2}/H$. Заменой переменной $y=\eta(x_1)dv/dx_1$ уравнение (6) может быть преобразовано к виду

(8) $$\frac{d^2}{dx_1{}^2}y+\frac{i\omega\rho}{\eta(x_1)}y=0,\quad \left.\frac{dy}{dx_1}\right|_{x_1=0}=-i\omega\rho v_0.$$

Эти уравнения определяют акустические параметры в нулевом приближении по $\mu\ll1$. При $\xi\gg\delta_n$ они хорошо описывают распространение сдвиговых волн в слоисто-неоднородной жидкокристаллической среде за исключением тонкого приграничного слоя толщиной $\delta_n=\mu^{1/2}\delta$, который не оказывает существенного влияния на сдвиговый импеданс и коэффициент отражения. В противоположном случае — $\xi\ll\delta_n$ задача еще более упрощается и сводится к уравнению (6) с постоянной η (см. ниже). В промежуточной области ($\xi/\delta_n\sim1$) необходимо решать исходную систему (3), (4). Очевидно, что уравнения (6), (8) справедливы и в анизотропном приближении $K_i\neq K_j$. Как известно, уравнения такого вида точно решаются аналитически лишь для некоторых частных типов зависимости $\eta(x_1)$. Поэтому в общем случае уравнение (6) или исходная система (3), (4) могут быть решены численно на ЭВМ. Можно также попытаться приближенно смоделировать $\eta(x_1)$ с помощью функций, допускающих точное решение. Однако при этом следует соблюдать осторожность, поскольку даже малые изменения $\eta(x_1)$ могут сильно менять коэффициент отражения. В том случае, когда размер, характеризующий неоднородность среды, велик или, напротив, мал по сравнению с глубиной проникновения, для акустических параметров могут быть получены разложения по соответствующему малому параметру (см. ниже).

Заметим, что в приближении (6) сдвиговый импеданс $Z(x_1)$ определяется по аналогии с [1] уравнением Риккати:

$$-\frac{d}{dx_1}Z(x_1)+\frac{Z^2(x_1)}{\eta(x_1)}+i\rho\omega=0,\quad Z(\infty)=(1-i)\,(\rho\omega\eta(\infty)/2)^{1/2}. \tag{9}$$

В уравнения, полученные в предыдущем разделе, входит равновесное поле директора $\mathbf{n}_0(x_1)=(\sin\theta,\ \cos\theta\cos\psi,\ \cos\theta\sin\psi)$. Найдем это слоисто-неоднородное поле для наиболее интересного с экспериментальной точки зрения случая однородного магнитного поля в предположении сильного сцепления на границе.

Свободная энергия нематического жидкого кристалла в угловых переменных имеет вид

$$F=\frac{1}{2}\left\{(K_1\cos^2\theta+K_3\sin^2\theta)\left(\frac{d\theta}{dx_1}\right)^2+(K_2\cos^2\theta+K_3\sin^2\theta)\times\right.$$
$$\left.\times\cos^2\theta\left(\frac{d\psi}{dx_1}\right)^2-\chi_a(H_1\sin\theta+H_2\cos\theta\cos\psi+H_3\cos\theta\sin\psi)^2\right\}. \tag{10}$$

Решение задачи сводится к минимизации этого выражения с учетом граничных условий.

Выберем направление легкого ориентирования на границе $\mathbf{n}(0)$ по оси α и напряженность магнитного поля по оси β: $\mathbf{H}=H\mathbf{e}_\beta$ $(\alpha\neq\beta)$. Обобщение на случай наклонной ориентации $\mathbf{n}(0)$ или $\mathbf{H}$ не представляет сложности и особого интереса и может быть произведено в окончательных формулах.

Рассмотрим сначала геометрическую ситуацию, когда $\mathbf{n}(0)$ или $\mathbf{H}$ перпендикулярно границе (α или $\beta=1$). Уравнение, определяющее поле директора, имеет вид

$$\left(\frac{d\theta}{dx_1}\right)^2=\frac{\cos^2\theta}{(\xi_r^2+\xi_s^2)+(\xi_r^2-\xi_s^2)\cos 2\theta}, \tag{11}$$

где при $\alpha=1$ $r=1$, $s=3$, а при $\beta=1$ $r=3$, $s=1$ и $\theta\to\pi/2-\theta$. Магнитная длина когерентности $\xi_r=(K_r/\chi_a)^{1/2}/H$. Отсюда получаем

$$x_1=\pm\int\limits_0^\theta\frac{(\xi_r^2\cos^2\theta'+\xi_s^2\sin^2\theta')^{1/2}}{\cos\theta'}\,d\theta'. \tag{12}$$

При $\xi_r>\xi_s$

$$\exp\left(-\frac{x_1}{\xi_s}\right)=\left(\frac{\left(1-\left(1-\dfrac{\xi_s^2}{\xi_r^2}\right)\sin^2\theta\right)^{1/2}-\dfrac{\xi_s}{\xi_r}\sin\theta}{\left(1-\left(1-\dfrac{\xi_s^2}{\xi_r^2}\right)\sin^2\theta\right)^{1/2}+\dfrac{\xi_s}{\xi_r}\sin\theta}\right)^{1/2}\times \tag{13}$$
$$\times\exp\left\{-\left(\frac{\xi_r^2}{\xi_s^2}-1\right)^{1/2}\arcsin\left[\left(1-\frac{\xi_s^2}{\xi_r^2}\right)^{1/2}\sin\theta\right]\right\}$$

и при $\xi_r<\xi_s$

$$(14)\qquad \exp\left(-\frac{x_1}{\xi_s}\right)=\left(\frac{\left(1+\left(\dfrac{\xi_s^2}{\xi_r^2}-1\right)\sin^2\theta\right)^{1/2}-\dfrac{\xi_s}{\xi_r}\sin\theta}{\left(1+\left(\dfrac{\xi_s^2}{\xi_r^2}-1\right)\sin^2\theta\right)^{1/2}+\dfrac{\xi_s}{\xi_r}\sin\theta}\right)^{1/2}\times$$
$$\times\left[\left(1+\left(\frac{\xi_s^2}{\xi_r^2}-1\right)\sin^2\theta\right)^{1/2}+\left(\frac{\xi_s^2}{\xi_r^2}-1\right)^{1/2}\sin\theta\right]^{(1-\xi_r^2/\xi_s^2)^{1/2}}.$$

Формулы (13), (14) определяют пространственную зависимость директора.

Для малых $x_1\ll\xi$ находим общую асимптотику (13), (14):

$$(15)\qquad \sin^2\theta=(x_1/\xi_r)^2.$$

Для больших $x_1\gg\xi$ асимптотика имеет вид: при $\xi_r>\xi_s$

$$(16)\qquad \cos^2\theta=4\frac{\xi_s^2}{\xi_r^2}\exp\left[-\frac{2x_1}{\xi_s}+2\left(\frac{\xi_r^2}{\xi_s^2}-1\right)^{1/2}\arcsin\left(1-\frac{\xi_s^2}{\xi_r^2}\right)^{1/2}\right]$$

и при $\xi_r<\xi_s$

$$(17)\qquad \cos^2\theta=4\exp\left[-\frac{2x_1}{\xi_s}\right]\left(\frac{\xi_s}{\xi_r}\right)^{2[1-(1-\xi_r^2/\xi_s^2)^{1/2}]}\times$$
$$\times\left[1+\left(1-\frac{\xi_r^2}{\xi_s^2}\right)^{1/2}\right]^{-2(1-\xi_r^2/\xi_s^2)^{1/2}}.$$

Для другого случая — $\mathbf{n}(0)$ и $\mathbf{H}$, лежащих в плоскости границы (α, $\beta\neq1$, $r=s=2$), решение известно [2]:

$$\operatorname{tg}(\pi/4-\psi/2)=\exp(-x_1/\xi_2).$$

Отсюда

$$(18)\qquad \sin^2\psi=\operatorname{th}^2(x_1/\xi_2).$$

Формулы (13), (14) и (18) определяют вместе с (7) зависимость эффективной вязкости от расстояния от границы. В отсутствие магнитного поля $\mathbf{n}_0=\mathbf{e}_\alpha$ и $\eta=\tilde{\eta}_\alpha$ не зависит от x_1, поэтому из (6), (7) находим известные формулы (см. [2]):

$$(19)\qquad Z=(1-i)(\rho\omega\eta/2)^{1/2}=(1-i)\eta/\delta,$$

где

$$(20)\qquad \begin{aligned}&\tilde{\eta}_1=(\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)/2-\alpha_2(\gamma_2+\gamma_1)/(2\gamma_1),\quad \tilde{\eta}_2=\alpha_4/2,\\ &\tilde{\eta}_3=(-\alpha_3+\alpha_4+\alpha_6)/2-\alpha_3(\gamma_2-\gamma_1)/(2\gamma_1)=\tilde{\eta}_1.\end{aligned}$$

В случаях $\alpha=\beta$ при очень сильном магнитном поле ($\sim10^7$ Гс), которое могло бы подавить колебания директора в акустической волне ($\gamma_1\dot{n}\ll\chi_aH^2$ или $\xi\ll\delta_n$), эффективная вязкость совпадает с коэффициентами вязкости Месовича $\eta=\eta_\alpha$ [2]:

$$(21)\qquad \begin{aligned}&\eta_1=(\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)/2-\alpha_2,\quad \eta_2=\alpha_4/2=\tilde{\eta}_2,\\ &\eta_3=(-\alpha_3+\alpha_4+\alpha_6)/2-\alpha_3(\gamma_2-\gamma_1)/(2\gamma_1)\simeq\tilde{\eta}_3=\tilde{\eta}_1.\end{aligned}$$

Таким образом, существенно различаются только три коэффициента: η_1, $\eta_2=\tilde{\eta}_2$ и $\eta_3\simeq\tilde{\eta}_1=\tilde{\eta}_3$. Поэтому наибольший экспериментальный интерес представляют случаи $(\alpha,\beta)=(1,2)$, $(2,1)$, $(2,3)$, (3.2) и $(1,1)$.

При $\alpha \neq \beta$ магнитное поле деформирует поле директора, задаваемое на границе жидкого кристалла (см. выше). Это приводит к качественно новым результатам при умеренно сильных магнитных полях $\sim 10^4$ Гс, когда магнитная длина когерентности сравнима с глубиной проникновения сдвиговой волны [2].

В данной области уравнение (6) или (8) имеет наиболее простой вид в одноконстантном приближении, в котором, согласно (7),

$$\eta(x_1) = \tilde{\eta}_\alpha + (\tilde{\eta}_\beta - \tilde{\eta}_\alpha)\,\mathrm{th}^2\,(x_1/\xi). \tag{22}$$

К сожалению, даже простое уравнение (8), (22) решается аналитически (через присоединенные функции Лежандра) только в приближениях слабой ($\tilde{\eta}_\alpha \simeq \tilde{\eta}_\beta$) или, напротив, сильной ($\tilde{\eta}_\beta \gg \tilde{\eta}_\alpha$) анизотропии коэффициентов вязкости.

Более полезными оказываются приближенные решения уравнения (6) с помощью рядов ($\xi/\delta < 1$) и методом ВКБ ($\delta/\xi < 1$).

Таким образом, для анизотропной модели нематических жидких кристаллов ($K_i \neq K_j$) из уравнений (6), (7), (15)–(17) находим разложения по малым параметрам для сдвигового механического импеданса и амплитуды сдвиговых волн:

при x_1, $\delta < \xi$

$$Z(0) = \frac{1-i}{\delta_\alpha}\tilde{\eta}_\alpha\left(1 - i\frac{b_{\alpha\beta}}{4}\frac{\delta_\alpha^2}{\xi_r^2} + \frac{b_{\alpha\beta}^2}{32}\frac{\delta_\alpha^4}{\xi_r^4} + \ldots\right), \tag{23}$$

$$v = v_0 \exp\left[-\frac{1-i}{\delta_\alpha}x_1\right]\left\{\left(1 + \frac{b_{\alpha\beta}}{4}\frac{x_1^2}{\xi_r^2} + \ldots\right) \times \right. \tag{24}$$

$$\left. \times \exp\left[-\frac{1-i}{\delta_\alpha}x_1\frac{b_{\alpha\beta}}{4}\left(i\frac{\delta_\alpha^2}{\xi_r^2} + \frac{2x_1^2}{3\xi_r^2} + \frac{b_{\alpha\beta}}{8}\frac{\delta_\alpha^4}{\xi_r^4} + \ldots\right)\right]\right\}$$

при x_1, $\delta > \xi > \mu^{1/2}\delta$.

$$Z(x_1) = \frac{1-i}{\delta_\beta}\tilde{\eta}_\beta\left\{1 - \frac{2(1-i)a_{\alpha\beta}}{p_1}\frac{\xi_s}{\delta_\beta}\mathcal{E} - \right. \tag{25}$$

$$\left. -4\left[\frac{a_{\alpha\beta}^2}{p_1}\left(1 - i + \frac{2}{p_2}\frac{\xi_s^3}{\delta_\beta^3}\right) - \frac{(1-i)\tilde{a}_{\alpha\beta}}{p_2}\right]\frac{\xi_s}{\delta_\beta}\mathcal{E}^2 + \ldots\right\},$$

$$v = v_0 \exp\left[-\frac{1-i}{\delta_\beta}x_1\right]\left\{1 + \frac{(1-i)a_{\alpha\beta}p_2}{p_1}\frac{\xi_s}{\delta_\beta}\mathcal{E} + \right. \tag{26}$$

$$\left. + \frac{1-i}{p_2}\left[\tilde{a}_{\alpha\beta}p_4 + \frac{(1-i)a_{\alpha\beta}^2 p_{-2}}{p_1}\frac{\xi_s}{\delta_\beta}\right]\frac{\xi_s}{\delta_\beta}\mathcal{E}^2 + \ldots\right\},$$

где

$$p_k = k + (1-i)\xi_s/\delta_\beta; \quad \mathcal{E} = \exp\left[-2x_1/\xi_s\right] \ll 1;$$

$$a_\alpha = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{\tilde{\eta}_\alpha}{\tilde{\eta}_\beta}\right)\dfrac{\xi_s^2}{\xi_r^2}\exp\left[2\left(\dfrac{\xi_r^2}{\xi_s^2} - 1\right)^{1/2}\arcsin\left(1 - \dfrac{\xi_s^2}{\xi_r^2}\right)^{1/2}\right], & \xi_r > \xi_s, \\ \left(1 - \dfrac{\tilde{\eta}_\alpha}{\tilde{\eta}_\beta}\right)\left(\dfrac{\xi_s}{\xi_r}\right)^{2[1-(1-\xi_r^2/\xi_s^2)^{1/2}]}\left[1 + \left(1 - \dfrac{\xi_r^2}{\xi_s^2}\right)^{1/2}\right]^{-2(1-\xi_r^2/\xi_s^2)^{1/2}}, & \xi_r < \xi_s, \end{cases}$$

$$b_{\alpha\beta} = 1 - \tilde{\eta}_\beta/\tilde{\eta}_\alpha; \quad \delta_\gamma = (2\tilde{\eta}_\gamma/\rho\omega)^{1/2}.$$

Выражение для $\tilde{a}_{\alpha\beta}$ ввиду громоздкости приведем в одноконстантном приближении, достаточном для оценки погрешности разложения. В этом приближении

$$a_{\alpha\beta} = 1 - \tilde{\eta}_\alpha/\tilde{\eta}_\beta, \quad b_{\alpha\beta} = 1 - \tilde{\eta}_\beta/\tilde{\eta}_\alpha,$$

$$\tilde{a}_{\alpha\beta} = (1 - \tilde{\eta}_\alpha/\tilde{\eta}_\beta)(1 - 2\tilde{\eta}_\alpha/\tilde{\eta}_\beta).$$

---

[2] В этой области, согласно уравнению (9), действительная часть сдвигового импеданса не равна мнимой.

Для холестерических жидких кристаллов аналогичные расчеты при большом шаге спирали (Pe_1) $P \gg \delta$ приводят к тем же формулам, что и для нематических.

При небольших значениях шага результат усложняется и зависит от соотношения шага, глубины проникновения и магнитной длины когерентности.

В смектических жидких кристаллах умеренные магнитные поля не оказывают влияния на свойства приграничного слоя и на сдвиговый импеданс.

Заметим, что полученные формулы остаются справедливыми и для случая неплоской границы (например, цилиндрической в эксперименте с крутильными колебаниями), поскольку на практике всегда радиусы ее кривизны значительно больше глубины проникновения сдвиговой волны $\delta \sim 10^{-3}$ см. Аналогично однородность магнитного поля необходима лишь в тонком приграничном слое указанной толщины.

Полученные результаты позволяют рассчитать коэффициенты вязкости и отношения упругих постоянных Франка K_i к анизотропии диамагнитной восприимчивости по экспериментальной зависимости сдвигового импеданса от напряженности магнитного поля. Для определения K_i можно вместо магнитного поля использовать течение в качестве ориентирующего фактора.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
2. *Де Жен П.* Физика жидких кристаллов. М: Мир, 1977.

Всесоюзный заочный
машиностроительный институт

Поступила в редакцию
24.XII.1979
После исправления
16.V.1980