АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXVII 1981 Вып. 1

УДК 534.26:51

ДИФРАКЦИЯ ЗВУКА В СРЕДЕ С ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ВОЛНОВОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Демидов В. П.

Рассмотрена двумерная задача о распространении и возбуждении упругих волн в среде, в которой сечение волновой поверхности плоскостью, нормальной к излучателю, есть эллипс. Получено точное решение, которое сравнивается с формулами для дифракционного интеграла Рэлея — Зоммерфельда в анизотропной среде. Обсуждена возможность аппроксимации дугой эллипса реальной кривой сечения волновой поверхности продольных волн плоскостью симметрии в ниобате лития и плоскостью, перпендикулярной кристаллографической оси симметрии второго порядка в кварце. Приведены угловые зависимости параметров аппроксимирующего эллипса.

При рассмотрении дифракционных эффектов в анизотропной среде параболическое приближение [1—4] является единственным известным методом аналитического исследования дифракции. В работе [2] показано, что предложенная [1] аппроксимация фазовой скорости параболой вблизи осей высокой симметрии (выше второго порядка) позволяет получить обратную групповую скорость также в виде параболы и, следовательно, выразить в квадратурах дифракционный интеграл Рэлея — Зоммерфельда. В работе [3] на основе параболической аппроксимации была решена задача о фокусировке звука в анизотропной среде, а в работе [4] найдено решение для поля излучателя с произвольной функцией источника.

Недостатком параболического приближения является, во-первых, то, что такой подход может быть использован только в узких интервалах углов вблизи направлений высокой симметрии, причем величина данных интервалов для конкретных материалов неизвестна; во-вторых, выражение для дифракционного интеграла в анизотропной среде получено в работах [2, 3] по аналогии со случаем изотропной среды, а не на основе точного решения. Поэтому при расчете конкретных устройств с анизотропным звукопроводом обычно ограничиваются только качественными выводами, а точный расчет проводят численными методами [5—7].

Представляется перспективным аппроксимировать сечение реальной волновой поверхности плоскостью не параболой, а эллипсом, поскольку, во-первых, аппроксимация замкнутой кривой (эллипсом) позволяет ожидать более широких пределов применимости, чем в случае аппроксимации незамкнутой кривой (параболой); во-вторых, в некоторых случаях сечение волновой поверхности является точным эллипсом [8]; в-третьих, в среде с эллиптической волновой поверхностью можно получить точное решение задачи о дифракционном поле излучателя, которое позволит оценить справедливость ранее полученных результатов.

Цель данной работы — построение применимой к расчету конкретных устройств эллиптической аппроксимации анизотропии и определение пределов применимости данной аппроксимации для часто используемых материалов.

Рассмотрим сначала дифракционное поле излучателя в виде бесконечной полосы шириной L, расположенной на плоскости XY кристалла параллельно оси Y. Для простоты будем считать, что плоскость XZ есть плоскость симметрии кристалла, и рассмотрим волну, волновой вектор которой $\mathbf{k}$ лежит в плоскости XZ, а смещение $\mathbf{u}$ направлено по оси Y. Предположим, что кривая групповой скорости есть эллипс, большая полуось которого a совпадает с осью координат Z, т. е. в выбранной системе координат двумерный тензор $\tau_{mn}=\lambda_{2mn2}$ $(m=n=1,3)$ [8], где λ_{ijkl} — приведенный тензор модулей упругости. Тогда уравнение кривой групповой скорости в плоскости XZ можно записать в виде

$$\frac{s_z^2}{a^2}+\frac{s_x^2}{b^2}=1, \tag{1}$$

где a^2 и b^2 — главные значения тензора τ. В выбранной системе координат получаем следующее уравнение для упругой волны частоты ω:

$$b^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\omega^2 u=0.$$

Если изменить масштаб по оси Z, то в новых координатах $x'=x$, $z'=zb/a$ получим

$$\frac{\partial^2 u}{(\partial x')^2}+\frac{\partial^2 u}{(\partial z')^2}+k_1^2 u=0, \tag{2}$$

где $k_1=\omega/b$, а масштаб по нормали к излучателю увеличен в a/b раз.

Для определения дифракционного поля указанного излучателя требуется дополнить уравнение (2) граничными условиями:

$$u(x',0)=\begin{cases} 0 & \text{при } z'=0,\ x\in[-L/2,L/2],\\ U_0(x') & \text{при } z'=0,\ x\in[-L/2,L/2].\end{cases}$$

Используя функцию Грина для уравнения Гельмгольца с данными граничными условиями [9], запишем решение уравнения (2):

$$u(x',z')=\frac{k_1}{2i}\int\limits_{-L/2}^{L/2} U_0(x_0)H_1^{(1)}(k_1R')\frac{z'}{R'}dx_0, \tag{3}$$

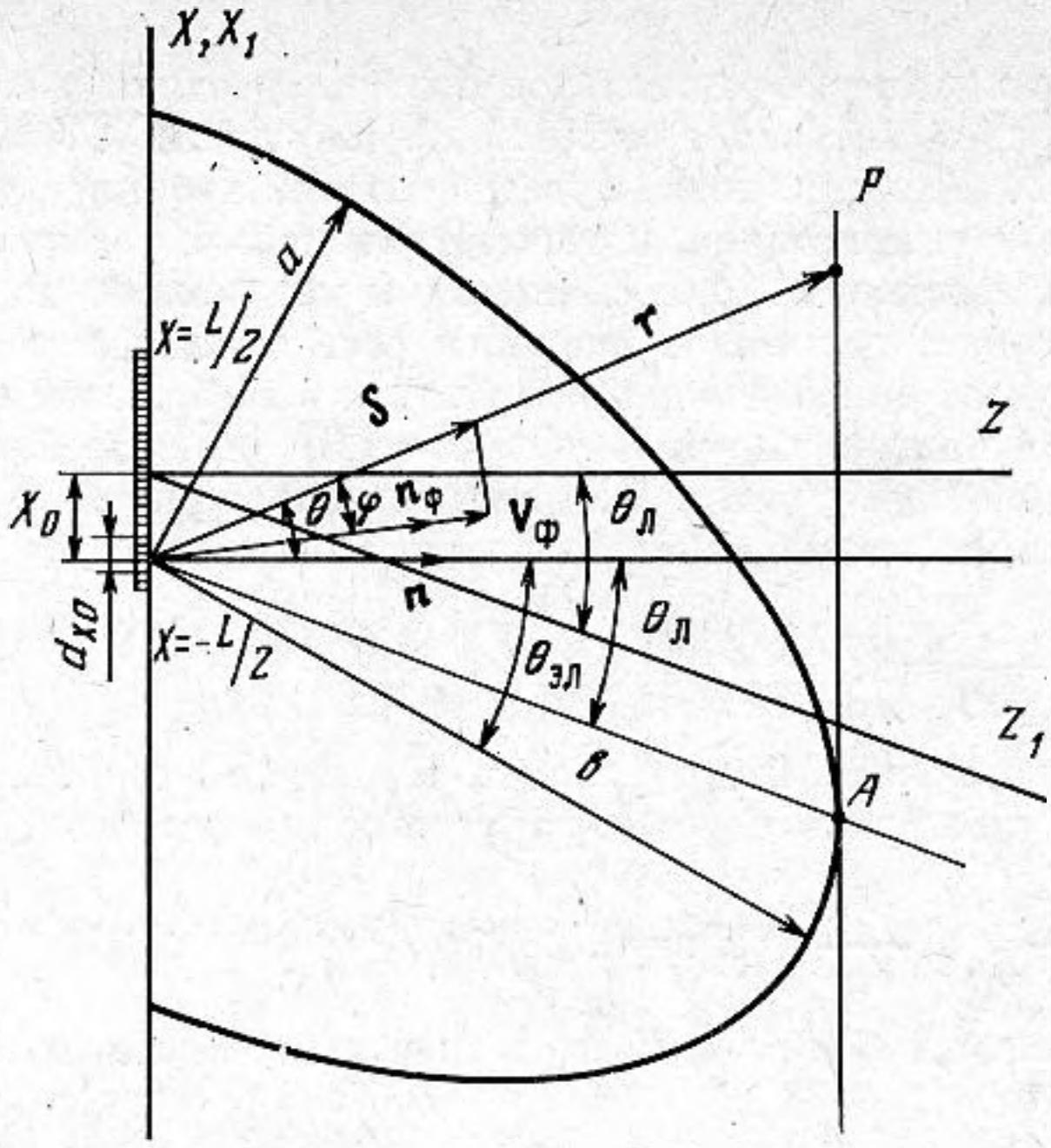
где $H_1^{(1)}(z)$ — функция Ханкеля первого рода первого порядка, а $R'=\sqrt{(x'-x_0)^2+(z')^2}$. С помощью (1) величину k_1R' можно преобразовать следующим образом:

$$k_1R'=\omega\sqrt{\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}}=\frac{\omega|\mathbf{r}|}{|\mathbf{s}|}=\frac{\omega|r|\cos\varphi}{v_\text{ф}}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}, \tag{4}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор от точки источника x_0 к точке наблюдения, $\mathbf{v}_\text{ф}=v_\text{ф}\mathbf{n}_\text{ф}$ — фазовая скорость волны, групповая скорость которой направлена по $\mathbf{r}$, φ — угол между $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}_\text{ф}$. Из формул (3) и (4) получим для дальней зоны

$$u(x,z)=\frac{k_1}{i\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-L/2}^{L/2} U_0(x_0)\frac{\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\,bz\,dx_0}{\sqrt{\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\sqrt{a^2(x-x_0)^2+b^2z^2}}. \tag{5}$$

Выражение (5) дает точное решение поставленной задачи и позволяет уточнить обычно используемые формулы (например, формулу (2) в работе [2] или формулу (1) в работе [3]) — в знаменателе дифракционного интеграла Рэлея — Зоммерфельда для анизотропной среды следует вместо $|\mathbf{k}|\cdot|\mathbf{r}|$ использовать скалярное произведение $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$.



Фиг. 1. Полосовой излучатель на среде с эллиптической волновой поверхностью

Полученная формула (5) приводит задачу о дифракционном поле излучателя с произвольной функцией источника к случаю изотропной среды [4]. Рассмотрим в качестве примера источник с однородным возбуждением:

$$U_0(x)=U_0\begin{cases} 1 & \text{при} \quad |x|<L/2, \\ {}^1/_2 & \text{при} \quad |x|=L/2, \\ 0 & \text{при} \quad |x|>L/2. \end{cases}$$

В приближении Кирхгофа получаем из (5) для данной функции источника при $z'>|x-x_0|$:

$$u(x,z)=\frac{U_0\exp(2\pi i\hat{z})}{i\sqrt{2}}\left[F\left(\frac{\hat{x}+\hat{L}/2}{\sqrt{\hat{z}b^2/2a^2}}\right)-F\left(\frac{x-\hat{L}/2}{\sqrt{\hat{z}b^2/2a^2}}\right)\right], \tag{6}$$

где $F(z)=\int\limits_0^z \exp(i\pi y^2/2)\,dy$, а знак «шляпка» означает нормировку на длину волны звука по направлению нормали к излучателю, $\hat{x}=x/\lambda_1$, $\hat{z}=z/\lambda_1$, $\hat{L}=L/\lambda_1$, $\lambda_1=2\pi a/\omega$. При $z'\gg x_0$ из (5) следует

$$u(x,z)\approx\frac{U_0\hat{L}\exp(2\pi i\hat{z})}{i\sqrt{\hat{z}b^2/a^2}}\operatorname{sinc}\left(\frac{\hat{x}\hat{L}}{\hat{z}b^2/a^2}\right), \tag{7}$$

где $\operatorname{sinc}(z)=\sin(\pi z)/(\pi z)$. Из полученных выражений (6), (7) видно, что распределение смещения $u(x, z)$ описывается теми же зависимостями, что и в изотропной среде или в среде с параболическим характером анизотропии [4], с той лишь разницей, что вместо масштабного множителя $|1+\gamma|$, где γ — параметр параболичности, входит величина b^2/a^2.

Пусть теперь главные оси тензора τ не совпадают с координатными осями, связанными со звукопроводом (фиг. 1); ось a эллипса групповой скорости образует с осью Z угол $\theta_{эл}$. Точное решение задачи в данном случае можно получить, проводя в (5) соответствующее преобразование координат, однако для того, чтобы был ясен физический смысл, мы прове-

дем преобразование величины $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$. Используя (1), запишем уравнение эллипса групповой скорости (фиг. 1) в виде

$$s(\theta)=\frac{b}{\sqrt{1-e^2\cos^2(\theta+\theta_{эл})}},$$

где e — эксцентриситет эллипса. Тогда

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}=\frac{\omega|\mathbf{r}|}{b}\sqrt{1-e^2\left(\frac{z}{r}\cos\theta_{эл}-\frac{x-x_0}{r}\sin\theta_{эл}\right)^2}. \tag{8}$$

Введем косоугольные координаты

$$z_1=z,\quad x_1=x+z\,\mathrm{tg}\,\theta_л, \tag{9}$$

где

$$\theta_л=\mathrm{arctg}\,\frac{e^2\sin\theta_{эл}\cos\theta_{эл}}{1-e^2\sin^2\theta_{эл}} \tag{10}$$

есть угол между Z и направлением на точку A, через которую проходит касательная к эллипсу, параллельная оси X, т. е. $\theta_л$ — угол отклонения от оси Z групповой скорости волны, фазовая скорость которой направлена по оси Z.

Подставляя формулы (9) и (10) в (8), приведем выражение для $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$ к виду

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}=\frac{\omega v_z}{ab}\sqrt{\frac{a^2b^2}{v_z^4}z_1^2+(x_1-x_0)^2},$$

где v_z — фазовая скорость вдоль оси Z.

Выражение для $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$ и формула (5) позволяют получить решение двумерной задачи о дифракционном поле источника с заданной функцией источника $U_0(x)$, произвольно расположенного в плоскости симметрии или в плоскости, перпендикулярной оси симметрии четного порядка. Например, рассматривая случай однородного возбуждения, получим в дальней зоне

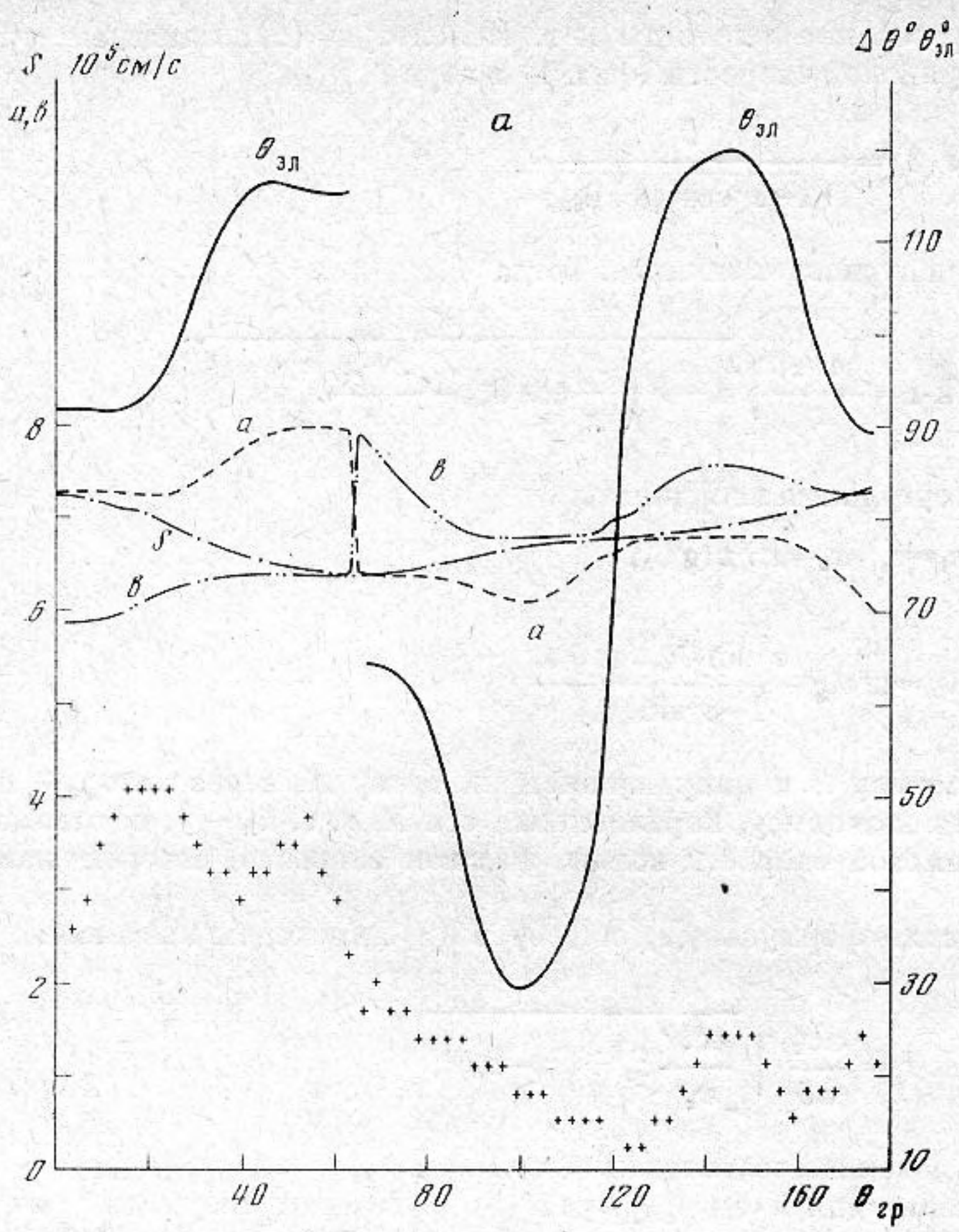
$$u(x,z)=\frac{U_0\hat{L}\exp(2\pi i\hat{z})}{\sqrt{\hat{z}b^2/v_z^2}}\,\mathrm{sinc}\left[\frac{(\hat{x}+\hat{z}\,\mathrm{tg}\,\theta_л)\hat{L}}{\hat{z}a^2b^2/v_z^4}\right],$$

где знак «шляпка» опять означает нормировку на длину волны звука вдоль оси Z.

Заканчивая рассмотрение дифракции звука в среде с эллиптической волновой поверхностью, укажем, что развитый подход применим не только в том случае, когда волновой вектор $\mathbf{k}$ лежит в плоскости симметрии или в плоскости, перпендикулярной оси симметрии четного порядка. Действительно, если плоскость XZ (фиг. 1) не является плоскостью симметрии, то $\mathbf{s}$ (а значит, и $\mathbf{r}$) в (5) может иметь компоненту s_y (или y). Однако, выражая $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$ через групповую скорость $\mathbf{s}$ и учитывая коллинеарность $\mathbf{r}$ и $\mathbf{s}$, получим

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}=\omega|\mathbf{r}|/|\mathbf{s}|=\omega|\mathbf{r}_\perp|/|\mathbf{s}_\perp|,$$

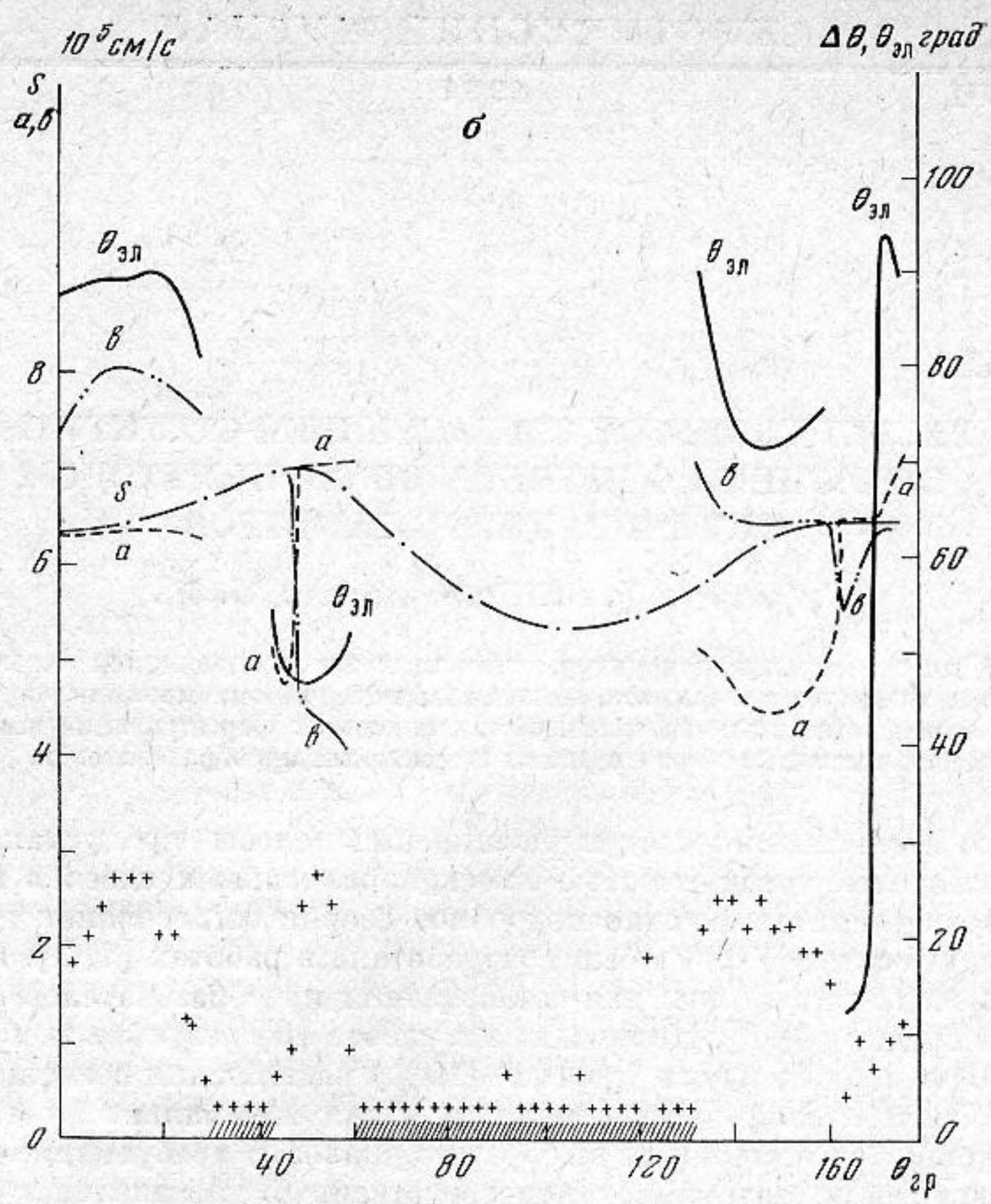
где $\mathbf{r}_\perp$ и $\mathbf{s}_\perp$ — проекции $\mathbf{r}$ и $\mathbf{s}$ на плоскость XZ. Таким образом, двумерную задачу дифракции звука от произвольно ориентированного источника в виде длинной полосы можно решать рассмотренным методом, если аппроксимировать проекцию пространственной кривой групповой скорости эллипсом в плоскости, нормальной к излучателю.



Фиг. 2. Угловая зависимость параметров аппроксимирующего эллипса и пределы аппроксимации для ниобата лития (*а*) и кварца (*б*)

Обсудим возможность эллиптической аппроксимации кривой групповой скорости продольной волны в плоскости симметрии ниобата лития и в плоскости, перпендикулярной кристаллографической оси симметрии второго порядка кварца. Вблизи каждого направления групповой скорости, определяемого отсчитанным от оси L_3 углом $\theta_{гр}$, будем аппроксимировать реальную кривую $s(\theta_{гр})$ дугой эллипса, характеризуемого полуосями a и b и углом $\theta_{эл}$, который большая полуось a образует с осью L_3. Пределом применимости такой аппроксимации будем считать интервал углов δ в одну сторону от $\theta_{гр}$, в котором параметры a, b, $\theta_{эл}$ аппроксимирующего эллипса изменяются менее чем на 5% своей величины. Кривые $s(\theta)$ для кварца и ниобата лития были вычислены на основе данных [10, 11] о константах материалов.

Результаты аппроксимации представлены на фиг. 2, *а* для ниобата лития и на фиг. 2, *б* для кварца, где приведены кривые: s — групповая скорость, a и b — величины полуосей аппроксимирующего эллипса, $\theta_{эл}$ — угол наклона оси a к L_3, а крестиками отмечены значения пределов аппроксимации δ. Как видно из фиг. 2, *а*, кривая групповой скорости продольной волны в плоскости симметрии ниобата лития хорошо аппроксимируется эллипсом — для любого направления пределы аппроксимации δ составляют не менее $\pm 12°$. В случае кварца (фиг. 2, *б*) возможность аппроксимации реальной кривой групповой скорости дугой эллипса существенно хуже —



Фиг. 2 (б)

надежная аппроксимация (пределы аппроксимации превышают ±3°) допустима только в интервалах 0°–30°, 45°–60°, 133°–180°.

Автор благодарен В. А. Якименко за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Waterman P. C.* Orientation Dependence of Elastic Waves in Single Crystals.— Phys. Rev., 1959, № 5, 1240–1253.
2. *Papadakis E. P.* Ultrasonic diffraction loss and phase change in anisotropic materials.— J. Acoust. Soc. Amer., 1966, v. 40, № 4, 863–876.
3. *Cohen M. G.* Optical study of ultrasonic diffraction and focusing in anisotropic media.— J. Appl. Phys., 1967, v. 38, № 10, 3821–3828.
4. *Szabo T. L.* Generalized Fourier transform diffraction theory for parabolically anisotropic media.— J. Acoust. Soc. America, 1978, v. 63 (1), № 1, p. 28–34.
5. *Szabo T. L., Slobodnik A. J. (Jr.).* The effect of diffraction on the design of SAW devices.— IEEE Trans. on Sonics and Ultrasonics, 1973, v. SU – 20, № 3, p. 240–251.
6. *Каринский С. С.* Устройства обработки информации на упругих поверхностных волнах. М.: «Энергия», 1973.
7. *Харузи, Фарнелл.* Дифракция и фокусировка в анизотропных кристаллах.— ТИИЭР, 1972, т. 60, № 8, с. 28–40.
8. *Федоров Ф. Ф.* Упругие волны в кристаллах. М.: Наука, 1969.
9. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
10. *Bechmann R.* Elastic and piezoelectric constants of alpha-quartz.— Phys. Rev., 1958, v. 110, № 5, p. 1060–1061.
11. *Warner A. W., Onoe M., Coquin G. A.* Elastic and piezoelectric constants for crystals in class 3 mm.— J. Acoust. Soc. Amer., 1967, v. 42, № 12, p. 1223–1231.

Поступила в редакцию
5.XI.1979
После исправления
11.VI.1980