АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXVII 1981 Вып. 2

УДК 534.26

ДИФРАКЦИЯ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН НА МЯГКОМ ЭКРАНЕ ТИПА РАССЛОЕНИЯ В ПЛАСТИНЕ

Касаткин Б. А.

Дан метод решения дифракционной задачи, опирающийся на соотношения обобщенной ортогональности нормальных волн твердого волновода. Приближенное решение получено для частного случая приповерхностного расслоения произвольной длины.

Дифракция нормальных волн на расслоении произвольных размеров и ориентации в пластине является важной в практическом отношении задачей в ультразвуковой дефектоскопии.

Один из методов решения такой дифракционной задачи рассмотрен в работах [1, 2], где в качестве модели реального расслоения в пластине взят полубесконечный разрез (мягкий экран), расположенный в срединной плоскости пластины, причем последнее ограничение является принципиальным для применения предложенного метода решения (метода факторизации). В настоящей работе в качестве модели расслоения принят мягкий экран (разрез) произвольной длины, расположенный на произвольной глубине и ориентированный параллельно поверхностям пластины, занимающей область $|x|\leqslant l$, $-\infty<z<\infty$.

Решение задачи в существенной мере опирается на соотношения обобщенной ортогональности нормальных волн, которые можно записать в виде

$$(k_n-k_m)(\mathbf{w}_n, N\bar{\mathbf{w}}_m)=(k_n-k_m)[(\boldsymbol{\sigma}_n, \bar{\mathbf{u}}_m)-(\mathbf{u}_n, \bar{\boldsymbol{\sigma}}_m)]=0, \tag{1}$$

где $\{k_n\}$ — спектр волновых чисел твердого волновода, $(\mathbf{x}, \mathbf{y})=\int\limits_s\left(\sum\limits_i x_i y_i^*\right)ds$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, определенное в области s (в поперечном сечении волновода), y^* — величина, комплексно-сопряженная с y, N — квадратная матрица четвертого ранга, у которой отличны от нуля элементы $N_{13}=N_{24}=N_{31}=N_{42}=1$, $\mathbf{w}(u_z, u_x, \sigma_{zz}, \sigma_{xz})$ — вектор, у которого первые две компоненты есть компоненты вектора смещения $\mathbf{u}(u_z, u_x)$, а остальные две компоненты — компоненты вектора напряжения $\boldsymbol{\sigma}(\sigma_{zz}, \sigma_{xz})$, действующие в поперечном сечении волновода, $\bar{\mathbf{w}}(\bar{\mathbf{u}}, -\bar{\boldsymbol{\sigma}})$ — вектор, сопряженный с $\mathbf{w}$, причем

$$\bar{\mathbf{u}}_m=\mathbf{u}_m(k_m^*),\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_m=\boldsymbol{\sigma}_m(k_m^*).$$

Рассмотрим теперь следующую дифракционную задачу. Пусть из области $z>0$ на мягкий экран, занимающий область $x=l_1$, $|z|\leqslant d$ волновода со свободной боковой поверхностью, падает нормальная волна индекса p.

Поле в области $|z|\geqslant d$ представим полной совокупностью нормальных волн $\mathbf{w}_{1n}$ волновода толщиной $2l$:

$$z\geqslant d,$$

$$\mathbf{w}_1^+=\mathbf{w}_{1p}^- + \sum a_n^+\mathbf{w}_{1n}^+,$$

$z \leqslant -d,$

$$\mathbf{w}_1^- = \sum a_n^- \mathbf{w}_{1n}^-, \qquad \mathbf{w}_{1n}^+ = \mathbf{w}_{1n}^\pm(x)\, e^{\pm i k_{1n} z},$$

$$\operatorname{Im} k_{1n} \geqslant 0, \qquad \frac{dk_{1n}}{d\omega} \geqslant 0, \qquad \operatorname{Im} k_{1n} = 0,$$

ω — круговая частота, $\{k_{1n}\}$ — спектр волновых чисел волновода толщиной $2l$ со свободной боковой поверхностью.

Поле в области $|z| \leqslant d$ представим следующим образом:

$x \geqslant l_1,$

$$\mathbf{w}_2 = \sum b_n^+ \mathbf{w}_{2n}^+ + b_n^- \mathbf{w}_{2n}^-, \qquad \mathbf{w}_{2n}^\pm = \mathbf{w}_{2n}^\pm(x)\, e^{\pm i k_{2n} z},$$

$x \leqslant l_1,$

$$\mathbf{w}_3 = \sum c_n^+ \mathbf{w}_{3n}^+ + c_n^- \mathbf{w}_{3n}^-, \qquad \mathbf{w}_{3n}^\pm = \mathbf{w}_{3n}^\pm(x)\, e^{\pm i k_{3n} z},$$

$$\operatorname{Im} k_{in} \geqslant 0, \qquad \frac{dk_{1n}}{d\omega} \geqslant 0, \qquad \operatorname{Im} k_{in} = 0, \qquad i = 2, 3,$$

$\{k_{2n}\}$ — спектр волновых чисел волновода толщиной $l_2 = l - l_1$ со свободной боковой поверхностью, $\{k_{3n}\}$ — спектр волновых чисел волновода толщиной $l_3 = l + l_1$ со свободной боковой поверхностью.

Используя граничные условия, требующие непрерывности введенных векторов в сечениях $z = \pm d$, и соотношения (1), можно получить систему уравнений относительно искомых коэффициентов $a_q^\pm$:

$$\sum_q^{M_1} A_{mq}^+ a_q^+ + B_{mq}^+ a_q^- = C_{pm}^+, \qquad m, q = 1, 2, \ldots, M_1, \tag{2}$$

$$\sum_q^{M_1} B_{mq}^- a_q^+ + A_{mq}^- a_q^- = C_{pm}^-, \qquad M_1 \to \infty,$$

$$A_{mq}^+ = \delta_{mq} - \sum_n^{M_2} \frac{(\mathbf{w}_{1q}^+, N\overline{\mathbf{w}}_{2n}^-)_2^+}{(\mathbf{w}_{2n}^-, N\overline{\mathbf{w}}_{2n}^-)_2} \frac{(\mathbf{w}_{2n}^-, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^+)_2^+}{(\mathbf{w}_{1m}^+, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^+)} -$$

$$- \sum_n^{M_3} \frac{(\mathbf{w}_{1q}^+, N\overline{\mathbf{w}}_{3n}^-)_3^+}{(\mathbf{w}_{3n}^-, N\overline{\mathbf{w}}_{3n}^-)_3} \frac{(\mathbf{w}_{3n}^-, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^+)_3^+}{(\mathbf{w}_{1m}^+, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^+)},$$

$$B_{mq}^+ = - \sum_n^{M_2} \frac{(\mathbf{w}_{1q}^-, N\overline{\mathbf{w}}_{2n}^+)_2^-}{(\mathbf{w}_{2n}^+, N\overline{\mathbf{w}}_{2n}^+)_2} \frac{(\mathbf{w}_{2n}^+, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^+)_2^+}{(\mathbf{w}_{1m}^+, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^+)} -$$

$$- \sum_n^{M_3} \frac{(\mathbf{w}_{1q}^-, N\overline{\mathbf{w}}_{3n}^+)_3^-}{(\mathbf{w}_{3n}^+, N\overline{\mathbf{w}}_{3n}^+)_3} \frac{(\mathbf{w}_{2n}^+, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^+)_3^+}{(\mathbf{w}_{1m}^+, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^+)}$$

$$C_{pm}^+ = \sum_n^{M_2} \frac{(\mathbf{w}_{1p}^-, N\overline{\mathbf{w}}_{2n}^-)_2^+}{(\mathbf{w}_{2n}^-, N\overline{\mathbf{w}}_{2n}^-)_2} \frac{(\mathbf{w}_{2n}^-, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^+)_2^+}{(\mathbf{w}_{1m}^+, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^+)} +$$

$$+ \sum_n^{M_3} \frac{(\mathbf{w}_{1p}^-, N\overline{\mathbf{w}}_{3n}^-)_3^+}{(\mathbf{w}_{3n}^-, N\overline{\mathbf{w}}_{3n}^-)_3} \frac{(\mathbf{w}_{3n}^-, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^+)_3^+}{(\mathbf{w}_{1m}^+, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^+)}$$

$$C_{pm}^{-}=\sum_{n}^{M_2}\frac{(\mathbf{w}_{1p}^{-},N\overline{\mathbf{w}}_{2n}^{-})_2^{+}}{(\mathbf{w}_{2n}^{-},N\overline{\mathbf{w}}_{2n}^{-})_2}\frac{(\mathbf{w}_{2n}^{-},N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^{-})_2^{-}}{(\mathbf{w}_{1m}^{-},N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^{-})}+$$

$$+\sum_{n}^{M_3}\frac{(\mathbf{w}_{1p}^{-},N\overline{\mathbf{w}}_{3n}^{-})_3^{+}}{(\mathbf{w}_{3n}^{-},N\overline{\mathbf{w}}_{3n}^{-})_3}\frac{(\mathbf{w}_{3n}^{-},N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^{-})_3^{-}}{(\mathbf{w}_{1m}^{-},N\mathbf{w}_{1m}^{-})}$$

$$M_2,\ M_3\to\infty,$$

δ_{mq} — символ Кронекера, а коэффициенты A_{mq}^{-}, B_{mq}^{-} получаются из коэффициентов A_{mq}^{+}, B_{mq}^{+} соответственно заменой знаков «±» на «∓».

Верхние знаки «±» у скалярных произведений означают, что скалярные произведения определены в сечениях $z=\pm d$ волновода соответственно, нижние индексы 2, 3 — скалярные произведения определены в области $x=(l_1,\ l)$, $x=(-l,\ l_1)$ соответственно, скалярное произведение без нижнего индекса определено в сечении $x=(-l,\ l)$ волновода, а скалярное произведение без знаков «±» не зависит от координаты z.

Ключевыми при анализе системы уравнений (2) являются вопросы сходимости метода редукции и поведения решения на ребрах экрана $x=l_1$; $z=\pm d$.

Используя асимптотику поведения спектра волновых чисел k_n больших номеров $\operatorname{Re} k_n=O(n)$; $\operatorname{Im} k_n=O(\ln n)$, можно показать справедливость оценок

$$\frac{(\mathbf{w}_{1q}^{+},N\overline{\mathbf{w}}_{2n}^{-})_2^{+}}{(\mathbf{w}_{2n}^{-},N\mathbf{w}_{2n}^{-})_2}=O\left(\frac{1}{n+q}\right),\quad \frac{(\mathbf{w}_{2n}^{-}\ N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^{+})_2^{+}}{(\mathbf{w}_{1m}^{+},N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^{+})}=O\left(\frac{1}{n+m}\right),$$

$$n,\ m,\ q\gg 1,$$

сходимость рядов, входящих в коэффициенты $A_{mq}^{\pm}$, $B_{mq}^{\pm}$, $C_{pm}^{\pm}$, регулярность системы (2) и сходимость метода редукции при ее решении.

Анализ поведения решения на ребрах экрана представляет собой самостоятельную и довольно сложную задачу, которая фактически сводится к определению такого соотношения между числом нормальных волн ($\mathbf{w}_{1n}^{+}$, $\mathbf{w}_{2n}$, $\mathbf{w}_{3n}$ или $\mathbf{w}_{1n}^{-}$, $\mathbf{w}_{2n}$, $\mathbf{w}_{3n}$), описывающих поле в прилежащих к ребру областях, и порядками редуцируемых систем уравнений соответственно, при котором обеспечивается требуемая сингулярность решения на ребре и конечность энергии упругой деформации.

Учет условия на ребре в более простом случае скалярных волноводов, содержащих разветвления (см., например, [3]), приводит к тому, что числа нормальных волн, описывающих поле в смежных областях волновода с экраном, оказываются пропорциональными геометрическим размерам волновода и его ответвлений.

Будем полагать в дальнейшем, что в рассматриваемом случае твердого волновода с экраном должно выполняться аналогичное соотношение между числами нормальных волн:

(3) $$M_1:M_2:M_3=2l:l_2:l_3.$$

Рассмотрим теперь предельный случай, вытекающий из общей системы уравнений (2):

(4) $$l_2\to 0\ (l_3\to 0),$$
$$C_{pm}^{+}=B_{mq}^{+}=0,\ C_{pm}^{-}=\delta_{pm},\ A_{mq}^{\pm}=\delta_{mq},$$
$$a_p^{-}=1,\ a_m^{-}=0,\ m\neq p,\ a_m^{+}=0.$$

Наличие предельного перехода (4) позволяет рассмотреть более общие случаи $\Delta_2=l_2/2l\ll 1$ (или $\Delta_3=l_3/2l\ll 1$), взяв за основу асимптотику (4) и диагональное приближение.

Под диагональным будем понимать приближение, при котором в исходной системе (2) учитываются только диагональные члены (старшие) и члены, содержащие коэффициент прохождения a_p^-, который является доминирующим в рассматриваемом случае приповерхностных расслоений.

Решение системы в указанном приближении для случая $\Delta_2 \ll 1$ имеет вид

$$a_p^- = C_{pp}^- / A_{pp}^-, \quad a_m^- = C_{pm}^-, \quad m \neq p, \quad a_m^+ = C_{pm}^+ - B_{pm}^+. \tag{5}$$

Сохраняя здесь старшие по параметру Δ_2 члены, можно написать

$$A_{pp}^- = 1 - \sum_n^{M_2} \frac{(\mathbf{w}_{1p}^+, N\overline{\mathbf{w}}_{2n}^-)_2^+}{(\mathbf{w}_{2n}^-, N\overline{\mathbf{w}}_{2n}^-)_2} \frac{(\mathbf{w}_{2n}^-, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^+)_2^+}{(\mathbf{w}_{1m}^+, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^+)} \tag{6}$$

$$B_{pm}^+ = -\sum_n^{M_2} \frac{(\mathbf{w}_{1p}^+, N\overline{\mathbf{w}}_{2n}^+)_2^-}{(\mathbf{w}_{2n}^+, N\overline{\mathbf{w}}_{2n}^+)_2} \frac{(\mathbf{w}_{2n}^+, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^+)_2^+}{(\mathbf{w}_{1m}^+, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^+)} -$$

$$- \frac{(\mathbf{w}_{1p}^-, N\overline{\mathbf{w}}_{3m}^+)_3^-}{(\mathbf{w}_{3m}^+, N\overline{\mathbf{w}}_{3m}^+)} \frac{(\mathbf{w}_{3m}^+, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^+)_3^+}{(\mathbf{w}_{1m}^+, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^+)},$$

$$C_{pm}^+ = \sum_n^{M_2} \frac{(\mathbf{w}_{1p}^-, N\overline{\mathbf{w}}_{2n}^-)_2^+}{(\mathbf{w}_{2n}^-, N\overline{\mathbf{w}}_{2n}^-)_2} \frac{(\mathbf{w}_{2n}^-, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^+)_2^+}{(\mathbf{w}_{1m}^+, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^+)} +$$

$$+ \frac{(\mathbf{w}_{1p}^-, N\overline{\mathbf{w}}_{3p}^-)_3^+}{(\mathbf{w}_{3p}^-, N\overline{\mathbf{w}}_{3p}^-)_3} \frac{(\mathbf{w}_{3p}^-, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^+)_3^+}{(\mathbf{w}_{1m}^+, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^+)},$$

$$C_{pm}^- = \sum_n^{M_2} \frac{(\mathbf{w}_{1p}^-, N\overline{\mathbf{w}}_{2n}^-)_2^+}{(\mathbf{w}_{2n}^-, N\overline{\mathbf{w}}_{2n}^-)_2} \frac{(\mathbf{w}_{2n}^-, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^-)_2^-}{(\mathbf{w}_{1m}^-, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^-)} +$$

$$+ \frac{(\mathbf{w}_{1p}^-, N\overline{\mathbf{w}}_{3p}^-)_3^+}{(\mathbf{w}_{3p}^-, N\overline{\mathbf{w}}_{3p}^-)_3} \frac{(\mathbf{w}_{3p}^-, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^-)_3^-}{(\mathbf{w}_{1m}^-, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^-)} +$$

$$+ \frac{(\mathbf{w}_{1p}^-, N\overline{\mathbf{w}}_{3m}^-)_3^+}{(\mathbf{w}_{3m}^-, N\overline{\mathbf{w}}_{3m}^-)_3} \frac{(\mathbf{w}_{3m}^-, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^-)_3^-}{(\mathbf{w}_{1m}^-, N\mathbf{w}_{1m}^-)} (1 - \delta_{pm})$$

и оценить асимптотику решения (5):

$$a_p^- = 1 + O(\Delta_2), \quad a_m^- = O(\Delta_2), \quad m \neq p, \quad a_m^+ = O(\Delta_2),$$

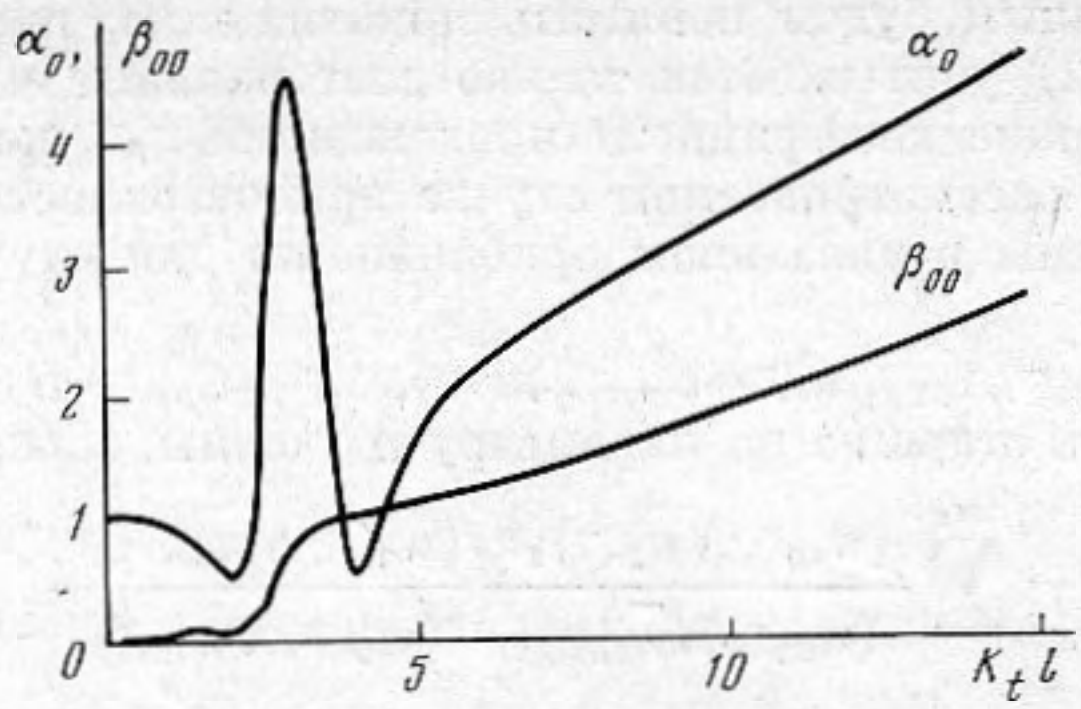
причем в силу условия (3) можно считать, что при достаточно малом параметре Δ_2 под знаком суммы в формуле (6) можно оставить минимальное число нормальных волн, описывающих поле над экраном, а именно, симметричную и антисимметричную нормальные волны нулевого порядка.

Наибольший интерес представляют обычно коэффициенты обратного отражения a_p^+ падающей нормальной волны (например, для целей ультразвуковой дефектоскопии приповерхностных расслоений с использованием нормальных волн).

Дальнейшее упрощение расчетных формул поясним на примере вычисления коэффициентов a_p^+, для чего введем представления:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_3 + \delta, \quad \delta = \frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial k_t} \Delta k_t = \Delta_2 k_t w_1', \tag{7}$$

$$w_1' = \frac{\partial w}{\partial k_t},$$



Частотная зависимость коэффициентов α_0, β_{00}, $(c_t^2/c_L^2=0{,}2)$

$k_t=\omega/c_t$, c_t — скорость поперечной волны,

$$\mathbf{w}^{\pm}=\begin{pmatrix} u_z(x) \\ \pm iu_x(x) \\ \mp i\sigma_{zz}(x) \\ \sigma_{xz}(x) \end{pmatrix} e^{\pm ikz}, \qquad (N\overline{\mathbf{w}}^{\pm})^*=\begin{pmatrix} \pm i\sigma_{zz}(x) \\ -\sigma_{xz}(x) \\ u_z(x) \\ \pm iu_x(x) \end{pmatrix} e^{\mp ikz},$$

причем

$$(\overline{u}_z(x, k^*))^*=u_z(x, k), \qquad (\overline{u}_x(x, k^*))^*=u_x(x, k),$$
$$(\overline{\sigma}_{zz}(x, k^*))^*=\sigma_{zz}(x, k), \qquad (\overline{\sigma}_{xz}(x, k^*))^*=\sigma_{xz}(x, k).$$

С учетом формулы (7) получаем окончательно

$$a_p^+=-\Delta_2\left[\alpha_p \sin 2k_{1p}d+\sum_n \beta_{pn} \sin (k_{1p}+k_{2n})d\right], \tag{8}$$

$$\alpha_p=\frac{2k_t}{(\mathbf{w}_{1p}^+, N\overline{\mathbf{w}}_{1p}^+)}\int_{-l}^{l} (u_{z,1p}\sigma'_{zz,1p}-u'_{z,1p}\sigma_{zz,1p}+u_{x,1p}\sigma'_{xz,1p}-u'_{x,1p}\sigma_{xz,1p})\,dx,$$

$$\beta_{pn}(d)=e^{-i(k_{1p}-k_{2n})d}(-u_{z,2n}\sigma_{zz,1p}+\sigma_{zz,2n}u_{z,1p})_{z=l}\left(\frac{u_{z,1p}}{u_{z,2n}}+\frac{\sigma_{zz,1p}}{\sigma_{zz,2n}}\right)_{x=l}.$$

Решению (8) можно дать следующую физическую трактовку.

Первое слагаемое в формуле (8) зависит только от типа падающей волны, а само отражение, соответствующее этому слагаемому, вызвано изменением фазовой скорости распространения нормальной волны вследствие изменения волнового размера волновода на величину Δ_2. Если длина расслоения кратна половине длины волны индекса p, то отражение данного типа отсутствует, так как отражение волны от переднего края расслоения полностью гасится противофазным отражением от заднего края.

Второе слагаемое в формуле (8) учитывает акустическую прозрачность области, расположенной над расслоением, зависит от типа падающей волны и от характеристик всех типов нормальных волн (индекса n), возбуждаемых в этой области. Само отражение является результатом двойной трансформации падающей волны в волну индекса n и трансформированной волны индекса n в отраженную волну индекса p.

Рассмотрим некоторые результаты численных расчетов. Пусть на приповерхностное расслоение ($\Delta_2 \ll 1$) падает нулевая симметричная нормальная волна ($p=0$), а само расслоение является коротким ($k_{10}d \ll 1$, $k_{2n}d \ll 1$). В этом случае можно полагать, что в области над расслоением будет возбуждаться только нулевая симметричная нормальная волна, а формула

(8) принимает вид

$$a_0^+ = -\Delta_2 d[2\alpha_0 k_{10} + \beta_{00}(k_{10} + k_{20})].$$

Частотная зависимость коэффициентов α_0, β_{00} приведена на фигуре ($(c_t/c_L)^2 = 0{,}2$, c_t, c_L — скорости поперечной и продольной волн). Можно отметить, что коэффициент α_0 имеет явно выраженный максимум, соответствующий области сильной дисперсии фазовой скорости нулевой нормальной волны. Этой же частотной области соответствует и резкий рост коэффициента β_{00}.

Приведенные результаты могут оказаться полезными при оценке отражающих свойств реальных расслоений, а также при выборе оптимальных параметров ультразвуковых методов контроля.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Меркулов Л. Г., Рохлин С. И.* Дифракция волн Лэмба в пластине на полубесконечном разрезе.– Дефектоскопия, 1969, № 4, с. 24–36.
2. *Меркулов Л. Г., Рохлин С. И.* Прохождение волн Лэмба через участок пластины с расслоением.– Дефектоскопия, 1970, № 3, с. 13–22.
3. *Миттра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974.

Всесоюзный научно-исследовательский
институт физико-технических
и радиотехнических измерений
Хабаровский филиал
Гидрофизический центр

Поступила
13.VII.1979
После исправления
26.XI.1979