АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXVII 1981 Вып. 3

УДК 534.24—26

ОТ ОТРАЖЕНИИ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ ОТ ЖИДКОГО НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ, ЛЕЖАЩЕГО НА УПРУГОМ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Маслов В. П.

Новым методом получено выражение коэффициента отражения звуковой волны от ряда жидких и упругих однородных слоев. Для непрерывного изменения параметров упругой среды получена интегральная форма коэффициента в виде ряда по степеням волновой толщины неоднородного слоя.

В монографии [1] приведено точное решение задачи об отражении наклонно-падающей звуковой волны от произвольного числа жидких и упругих однородных слоев. Для нахождения входного импеданса системы жидких слоев используется формула пересчета импеданса с одной границы слоя на другую. Для нахождения входного импеданса системы упругих слоев перемножаются матрицы четвертого порядка, связывающие смещения и напряжения на противоположных поверхностях каждого слоя. Методы последовательных приближений для определения коэффициента отражения от жидкого слоя с непрерывным изменением параметров слоя получены в работе [2], приведенной в книге [1, § 25]. В работе [3] численным интегрированием дифференциальных уравнений для импедансов находился коэффициент отражения от упругого слоя с непрерывным изменением параметров.

В настоящей работе новым методом получено выражение коэффициента отражения от ряда жидких и упругих однородных слоев. Матрицы имеют более простую структуру. На основе полученного выражения выводятся формулы метода последовательных приближений для тонких неоднородных слоев с непрерывным изменением параметров. Выражения метода последовательных приближений для тонкого жидкого неоднородного слоя совпали с выражениями работы [2], приведенной в книге [1, § 25, 4]. Для упругого слоя коэффициент отражения представлен в виде отношения матричных рядов. Коэффициентами рядов являются k-кратные интегралы по толщине слоя. Матрицы в методе последовательных приближений имеют дважды меньший порядок.

Для вывода используется следующий прием. Рассмотрим границу между двумя однородными средами, жидкими или упругими. Если верхняя и нижняя среды одинаковы, то падающую волну и приходящую из нижнего полупространства (отраженную) волну можно разложить на сумму линейно независимых симметричного и антисимметричного полей относительно воображаемой плоскости раздела. Если взять верхнюю часть одной среды с симметричным полем и пристроить к ней [4] нижнюю часть другой среды с симметричным полем, можно удовлетворить граничным условиям. Граничные условия для упругих сред выражаются двумя равенствами вместо четырех в обычном случае. Назовем их симметричными граничными условиями. Амплитуды волн в верхней и нижней среде связывает матрица второго порядка. Можно удовлетворить также граничным

условиям для антисимметричных полей. Их назовем антисимметричными граничными условиями. Поскольку для разных верхней и нижней сред поле уже не будет обладать симметрией, далее в тексте назовем поле в верхней среде симметричным (или антисимметричным) относительно нижней границы, а поле в нижней среде — симметричным (или антисимметричным) относительно верхней границы.

Рассмотрим теперь однородный слой. Часть поля в слое, симметричная относительно верхней границы, не совпадает с частью, симметричной относительно нижней границы. Можно разложить симметричное относительно верхней границы поле на сумму симметричного и антисимметричного полей относительно нижней границы. Также можно разложить антисимметричное относительно верхней границы поле. Амплитуды симметричных и антисимметричных относительно верхней границы полей связаны матрицами второго порядка с амплитудами полей, симметричных и антисимметричных относительно нижней границы. Последовательно переходя от слоя к слою, можно найти амплитуды полей в нижнем однородном полупространстве в виде суммы произведений. Условием, связывающим амплитуды симметричного и антисимметричного полей в нижнем полупространстве, будет условие отсутствия приходящей из нижнего полупространства волны.

Рассмотрим вначале границу между однородными жидкими средами. Поле в верхней среде представим следующим образом (временной множитель опущен):

$$p(z)=p_{\text{пад}}e^{ik_z z}+p_{\text{отр}}e^{-ik_z z}=p^{\text{c}}(e^{ik_z z}+e^{-ik_z z})+p^{\text{a}}(e^{ik_z z}-e^{-ik_z z}),$$

где ось z направлена сверху вниз нормально границе, p — давление в жидкости, k_z — z-компонента волнового вектора $\mathbf{k}_0=k_z\mathbf{e}_z+\xi\mathbf{e}_x$ в жидкости, индекс (пад) относится к падающей волне, (отр) относится к отраженной волне, (с) обозначает симметричное поле, (а) — антисимметричное поле.

Коэффициент отражения V имеет вид

$$V=p_{\text{отр}}/p_{\text{пад}}=(p^{\text{c}}-p^{\text{a}})/(p^{\text{c}}+p^{\text{a}}). \tag{1}$$

Поле в нижней среде запишем в виде

$$p_1(z)=p_1^{\text{c}}(e^{ik_{1z}z}+e^{-ik_{1z}z})+p_1^{\text{a}}(e^{ik_{1z}z}-e^{-ik_{1z}z}).$$

Симметричным граничным условием будет $p_1^{\text{c}}=p^{\text{c}}$, и антисимметричным: $u_{1z}^{\text{a}}=u_z^{\text{a}}$, где u_{1z}^{a}, u_z^{a} — смещения. Из второго условия получим $p_1^{\text{a}}=(q_0/q_1)p^{\text{a}}$, где $q_0/q_1=(\cos\theta_0\rho_1c_1)/(\cos\theta_1\rho_0c_0)$, θ_0 и θ_1 — углы падения и преломления, ρ_0, ρ_1 — плотности сред, c_0, c_1 — скорости звука. Условием отсутствия приходящей из нижней среды волны будет $p_1^{\text{c}}=p_1^{\text{a}}$. Отсюда получим

$$V=(q_0-q_1)/(q_0+q_1),$$

что совпадает с известным выражением [1].

Рассмотрим теперь отражение звуковой волны от n однородных жидких слоев, лежащих на однородном жидком полупространстве. Амплитуды $\mathbf{p}_{jh}=(p_{jh}^{\text{c}}, p_{jh}^{\text{a}})$ полей, симметричных и антисимметричных относительно нижней границы j-го слоя, связаны с амплитудами $\mathbf{p}_j=(p_j^{\text{c}}, p_j^{\text{a}})$ полей, симметричных и антисимметричных относительно верхней границы j-го слоя, зависимостью $\mathbf{p}_{jh}=I_j\mathbf{p}_j$,

$$I_j=\begin{vmatrix}\cos k_{jz}h_j & i\sin k_{jz}h_j\\ i\sin k_{jz}h_j & \cos k_{jz}h_j\end{vmatrix},$$

где h_j — толщина j-го слоя.

Амплитуды полей верхнего и нижнего однородных полупространств связаны произведением матриц

$$\mathbf{p}_{n+1}=\prod_{j=0}^{n}(M_{j+1,j}I_j)\,\mathbf{p}, \tag{2}$$

где $\mathbf{p}=(p^{\text{c}},p^{\text{a}})$, $h_0=0$, $M_{j+1,j}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & q_j/q_{j+1}\end{vmatrix}$.

Представим матрицу I_j как сумму

$$I_j=\cos k_{jz}h_j\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}+i\sin k_{jz}h_j\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}.$$

Разложим произведение в выражении (2) на сумму произведений. Первым слагаемым будет

$$B_0=A^{(0)}_{n+1,0}=\prod_{j=0}^{n}(M_{j+1,j}I_j^{\text{c}})=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & q_0/q_{n+1}\end{vmatrix}P_{n,1},$$

где $P_{n,1}=\prod_{j=1}^{n}\cos k_{jz}h_j$.

Второй группой слагаемых возьмем произведения, где сомножитель I_j^{a} встречается один раз

$$B_1=A^{(1)}_{n+1,0}=\sum_{j=1}^{n}A^{(0)}_{n+1,j}I_j^{\text{a}}A^{(0)}_{j,0}=$$

$$=\sum_{j=1}\left\{\begin{vmatrix}0 & q_0/q_j\\ q_j/q_0 & 0\end{vmatrix}P_{n+1,j+1}P_{j-1,0}\,i\sin k_{jz}h_j\right\}.$$

Третьей группой слагаемых возьмем произведения, где сомножитель I_j^{a} встречается два раза

$$B_2=A^{(2)}_{n+1,0}=\sum_{j=1}^{n-1}A^{(1)}_{n+1,j}I_j^{\text{a}}A^{(0)}_{j,0}=\begin{vmatrix}B_2^{\text{I}} & 0\\ 0 & B^{\text{II}}\end{vmatrix}.$$

Число слагаемых B_k равно $n+1$. Легко убедиться, что B_k при k четном представляет собой диагональную матрицу, а при k нечетном диагональные члены равны нулю. Обозначим через $B_{\text{чет}}$ сумму четных слагаемых, а через $B_{\text{неч}}$ — сумму нечетных слагаемых. Тогда $\overset{\text{c}}{p}_{n+1}=B^{\text{I}}_{\text{чет}}p^{\text{c}}+B^{\text{II}}_{\text{неч}}p^{\text{a}}$, $\overset{\text{a}}{p}_{n+1}=B^{\text{I}}_{\text{неч}}p^{\text{c}}+B^{\text{II}}_{\text{чет}}p^{\text{a}}$.

Условием отсутствия приходящей из нижнего полупространства волны будет $\overset{\text{c}}{p}_{n+1}=\overset{\text{a}}{p}_{n+1}$. Отсюда $(B^{\text{I}}_{\text{чет}}-B^{\text{I}}_{\text{неч}})p^{\text{c}}=(B^{\text{II}}_{\text{чет}}-B^{\text{II}}_{\text{неч}})p^{\text{a}}$. Выражение для коэффициента отражения запишем в виде

$$V=(D-1)/(D+1), \tag{3}$$

где $D=(B^{\text{II}}_{\text{чет}}-B^{\text{II}}_{\text{неч}})/(B^{\text{I}}_{\text{чет}}-B^{\text{I}}_{\text{неч}})$.

Если однородный слой разбит на несколько слоев, то, воспользовавшись формулами разложения синусов и косинусов, можно убедиться, что формулы в этом случае переходят в формулы для одного слоя. Если неоднородный слой разбит на большое число тонких однородных слоев, число слагаемых становится велико, и удобнее перейти к интегральной форме

записи. При волновой толщине слоя, стремящейся к нулю, выражение B_k переходит в k-й член разложения по степеням k_0H, где H — общая толщина неоднородного слоя. При этом

$$\cos k_{jz}h_j \to 1,\ \sin k_{jz}h_j \to k_{jz}h_j = k_0 n \cos\theta dz.$$

Обозначив через

$$\eta_1 = n(q/q_1)\cos\theta,\ \eta_2 = n(q_1/q)\cos\theta,$$

получим интегральную форму записи, полностью совпадающую с выражениями работы [1, § 25, 4].

Рассмотрим теперь отражение на границе жидкой и упругой однородных сред. Смещение в упругой среде запишем в виде

$$\mathbf{u}_1(z) = E_{\text{пад}}\mathbf{u}_{1\ \text{пад}} + E_{\text{отр}}\mathbf{u}_{1\ \text{отр}} = E^{\text{c}}u_1^{\text{c}} + E^{\text{a}}u_1^{\text{a}} + E^{\text{c}}_{\text{отр}}\mathbf{u}^{\text{c}}_{1\ \text{отр}} + E^{\text{a}}_{\text{отр}}\mathbf{u}^{\text{a}}_{1\ \text{отр}},$$

где $u_{1z}^{\text{c}} = -\overset{\text{c}}{u}_{1z\ \text{отр}},\ \overset{\text{c}}{u}_{1x\ \text{отр}} = u_{1x}^{\text{c}},\ u_{1z}^{\text{a}} = \overset{\text{a}}{u}_{1z\ \text{отр}},$

$$u_{1x}^{\text{a}} = -\overset{\text{a}}{u}_{1x\ \text{отр}},\ E_{\text{пад}} = E_e \exp(ik_{ez}z) + E_t \exp(ik_{tz}z),$$

$$E_l = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \gamma_l\gamma_t\zeta\gamma_t \\ \zeta\gamma_l\zeta^2 \end{vmatrix},\quad E_t = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \zeta^2-\zeta\gamma_t \\ -\zeta\gamma_l\gamma_e\gamma_t \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \gamma_l\gamma_t + \zeta^2,\ \gamma_l = k_{lz}/k_0,\ \gamma_t = k_{tz}/k_0,\ \zeta = \xi/k_0,$$

k_{lz}, k_{tz} — z-компоненты волновых векторов продольной и поперечной волн,

$$E^{\text{c}} = E_l\cos k_{lz}z + E_t\cos k_{tz}z,\ E^{\text{a}} = E_l i\sin k_{lz}z + E_t i\sin k_{tz}z.$$

Граничным условием для симметричных полей будет $p^{\text{c}} = -\overset{\text{c}}{\sigma}_{1zz}$, и для антисимметричных: $u_z^{\text{a}} = u_{1z}^{\text{a}}$, $\overset{\text{a}}{\sigma}_{1xz} = 0$. Симметричное граничное условие не дает возможности определить соотношение между компонентами смещения у волн симметричного поля в упругой среде. Если $\mathbf{u}_1^{\text{c}}$ задано, то $p^{\text{c}} = -\overset{\text{c}}{\sigma}_{1zz} = -i\omega\rho_0 c_0 \mathbf{g}\mathbf{u}_1^{\text{c}}$, где

$$\mathbf{g} = m\left[\frac{\gamma_t}{\Delta}e_z + \zeta\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{2}{n_t^2}\right)e_x\right];\quad m = \frac{\rho_1}{\rho_0},\ n_t = \frac{c_0}{c_{t1}}.$$

Из антисимметричных граничных условий получим $\mathbf{u}_1^{\text{a}} = -\mathbf{a}p^{\text{a}}/(i\omega\rho_0 c_0)$, где

$$a = \gamma e_z + \frac{\zeta\gamma}{\gamma_l}\left(1 - \frac{2\Delta}{n_t^2}\right)\mathbf{e}_x;\quad \gamma = \cos\theta_0,\ \gamma_l = \frac{k_{lz}}{k_0}.$$

Условием отсутствия приходящей волны будет $\mathbf{u}_1^{\text{c}} = \mathbf{u}_1^{\text{a}}$. Отсюда получим выражение коэффициента отражения в виде (3), где

$$D = \mathbf{g}\cdot\mathbf{a} = \frac{\gamma m}{\gamma_l}\left[\left(1 - \frac{2\zeta^2}{n_t^2}\right)^2 + \frac{4\zeta^2\gamma_l\gamma_t}{n_t^4}\right],$$

что совпадает с известным выражением [1, 4].

Рассмотрим теперь отражение звуковой волны от n однородных упругих слоев, лежащих на однородном упругом пространстве.

Антисимметричные граничные условия на первой границе между упругими слоями есть $u_{1z}^{\text{a}} = u_{2z}^{\text{a}}$, $\overset{\text{a}}{\sigma}_{1xz} = \overset{\text{a}}{\sigma}_{2xz}$; и симметричные граничные условия: $u_{1x}^{\text{c}} = u_{2x}^{\text{c}}$, $\overset{\text{c}}{\sigma}_{1zz} = \overset{\text{c}}{\sigma}_{2zz}$. Отсюда получим зависимости между смещениями

$$\mathbf{u}_2^{\text{a}} = M_{21}^{\text{a}}\mathbf{u}_1^{\text{a}},\ \mathbf{u}_2^{\text{c}} = M_{21}^{\text{c}}\mathbf{u}_1^{\text{c}},$$

где

$$M_{21}^{\text{a}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma_{2t}^{-1} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b_{21} & d_{21} \end{vmatrix},\quad M_{22}^{\text{c}} = \begin{vmatrix} \gamma_{2t}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_{21} & -b_{21} \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$b_{21} = \zeta\left[1 - \delta_{21} - 2\Delta_2\left(n_{2t}^{-2} - \frac{\rho_1}{\rho_2}n_{1t}^{-2}\right)\right],$$

$$d_{21} = \gamma_{1t}\delta_{21},\ c_{21} = \gamma_{1t}\delta_{21},\ \delta_{21} = \rho_1\Delta_2 / (\rho_2\Delta_1).$$

Амплитуды смещений $\mathbf{u}_{jh}=(\mathbf{u}_{jh}^{c}, \mathbf{u}_{j,h}^{a})$ на нижней границе j-го слоя связаны с амплитудами $\mathbf{u}_j=(\mathbf{u}_j^{c}, \mathbf{u}_j^{a})$ на верхней границе j-го слоя зависимостью $\mathbf{u}_{jh}=E_{jh}\mathbf{u}_j$, где

$$E_{jh}=\begin{vmatrix} E_j^{c} & E_j^{a} \\ E_j^{a} & E_j^{c} \end{vmatrix}.$$

Амплитуды однородного упругого полупространства и амплитуды верхней границы первого упругого слоя связаны произведением матриц

$$\mathbf{u}_{n+1}=\prod_{j=1}^{n}(M_{j+1,j}E_{jh})\mathbf{u}_1, \tag{4}$$

где

$$M_{j+1,j}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\otimes M_{j+1,j}^{c}+\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\otimes M_{j+1,j}^{a}$$

и символ $\otimes$ обозначает прямое произведение матриц.

Представим матрицу E_{jh} как сумму матриц

$$E_{jh}=E_{jh}^{c}+E_{jh}^{a}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\otimes E_j^{c}+\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\otimes E_j^{a}.$$

Разложим произведение в выражении (4) на сумму слагаемых. Первым слагаемым будет

$$F_0=R_{n+1,1}^{(0)}=\prod_{j=1}^{n}(M_{j+1,j}E_{j,h}^{c})=$$

$$=\prod_{j=1}^{n}\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\otimes M_{j+1,j}^{c}+\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\otimes M_{j+1,j}^{a}\right)E_j^{c}.$$

Второй группой слагаемых возьмем произведения, где сомножитель E_{jh} встречается один раз.

$$F_1=R_{n+1,1}^{(1)}=\sum_{j=1}^{n}R_{n+1,j}^{(0)}E_{jh}^{a}R_{j,1}^{(0)}=\left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\otimes F_1^{\mathrm{I}}+\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\otimes F_1^{\mathrm{II}}\right).$$

K-й группой слагаемых возьмем произведения, где сомножитель E_{jh}^{a} встречается k раз. Нетрудно убедиться, что при k четном F_k представляет собой блочно-диагональную матрицу, а при k нечетном диагональные блоки равны нулю. Обозначим через $F_{\text{чет}}$ сумму четных слагаемых, а через $F_{\text{неч}}$ — сумму нечетных слагаемых. Тогда $\mathbf{u}_{n+1}^{c}=F_{\text{чет}}^{\mathrm{I}}\mathbf{u}_1^{c}+F_{\text{неч}}^{\mathrm{II}}\mathbf{u}_1^{a}$,

$$\mathbf{u}_{n+1}^{a}=F_{\text{неч}}^{\mathrm{I}}\mathbf{u}_1^{c}+F_{\text{чет}}^{\mathrm{II}}\mathbf{u}_1^{a}.$$

Условием отсутствия приходящей из нижнего полупространства волны будет $\mathbf{u}_{n+1}^{c}=\mathbf{u}_{n+1}^{a}$. Отсюда $(F_{\text{чет}}^{\mathrm{I}}-F_{\text{неч}}^{\mathrm{I}})\mathbf{u}_1^{c}=(F_{\text{чет}}^{\mathrm{II}}-F_{\text{неч}}^{\mathrm{II}})\mathbf{u}_1^{a}$, и выражение коэффициента отражения получает вид (3), где

$$D=\mathbf{g}\cdot(F_{\text{чет}}^{\mathrm{I}}-F_{\text{неч}}^{\mathrm{I}})^{-1}(F_{\text{чет}}^{\mathrm{II}}-F_{\text{неч}}^{\mathrm{II}})\cdot\mathbf{a}. \tag{5}$$

Найдем теперь интегральную форму коэффициента отражения, устремив толщину каждого слоя к нулю. При этом $\cos k_{jtz}h_j\to 1$, $\cos k_{jtz}h_j\to 1$, $\sin k_{jtz}h_j\to k_0\gamma_{jt}dz$, $\sin k_{jtz}h_j\to k_0\gamma_{jt}dz$.

Матрицы E_{jh} переходят в

$$E_{jh}^{a}\to ik_0dzE_{j\Delta},\quad E_{jh}^{c}\to\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Первое слагаемое сильно упрощается

$$F_0=R^{(0)}_{n+1,1}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}\otimes M^{\text{ж}}_{n+1,1}+\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\otimes M_{n+1,1}.$$

Обозначим $R^{(0)}_{n+1,1}$ через $R(H, 0)$, $E_{j\Delta}$ через $E_\Delta(z)$. Второе слагаемое F_1 принимает вид

$$F_1=ik_0\int_0^H R(H,z)E_\Delta(z)R(z,0)\,dz=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}\otimes F_1^{\text{I}}+\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}\otimes F_1^{\text{II}}.$$

K-е слагаемое представляет собой k-й член разложения по степеням k_0H

$$F_k=(ik_0)^k\int_0^H dz_k\int_0^{z_k}dz_{k-1}\int_0^{z_{k-1}}dz_{k-2}\ldots\int_0^{z_2}P_k dz_1,$$

где

$$P_k=R(H, z_k)E_\Delta(z_k)R(z_k, z_{k-1})\ldots E_\Delta(z_1)R(z_1, 0).$$

Если однородный слой разбит на одинаковые слои, то k-й член ряда

$$F_k=(E_l\gamma_l^k+E_t\gamma_t^k)\,(ik_0H)^k\otimes\left[\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\right]^k\Big/k!,$$

поскольку

$$P_k=\left(E_\Delta\otimes\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\right)^k,\ E_l^k=E_l,\ E_t^k=E_t,\ E_lE_t=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}.$$

Отсюда $\mathbf{u}_n=E_{\text{пад}}\mathbf{u}_1$, что дает точное решение для однородного слоя.

Так же как и для конечного числа слоев, при k четном k-й член ряда представляет собой блочно-диагональную матрицу, а при k нечетном диагональные блоки равны нулю. Если обозначить через $F_{\text{чет}}$ сумму бесконечного ряда четных слагаемых, а через $F_{\text{неч}}$ сумму нечетных слагаемых и учесть условие отсутствия приходящей из нижнего полупространства волны, получим коэффициент отражения в виде (3), где D задано выражением (5).

В заключение выпишем точное выражение коэффициента отражения от m жидких и n упругих однородных слоев

$$V=\frac{(Db_{22}-b_{12})-(b_{11}-Db_{21})}{(Db_{22}-b_{12})+(b_{11}-Db_{21})},$$

где b_{ik} — элементы матрицы $\prod\limits_{j=1}^{m}(l_jM^{\text{ж}}_{j,j-1})$, характеризующей жидкие слои (формула (2));

$$D=\mathbf{g}\cdot(B_{11}-B_{21})^{-1}(B_{22}-B_{12})\cdot\mathbf{a},$$

$\mathbf{g}$, $\mathbf{a}$ — векторы, характеризующие границу жидких и упругих слоев. B_{ik} — матрицы второго порядка, образующие матрицу четвертого порядка $\prod\limits_{j=1}^{n}(M^{\text{у}}_{j+1,j}E_j)$ (формула (4)), характеризующую упругие слои.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
2. *Бреховских Л. М.* Отражение плоских волн от слоисто-неоднородных сред.— Ж. техн. физ., 1949, № 10, 1126—1129.
3. *Мачевариани М. М., Тютекин В. В., Шкварников А. П.* Импедансный метод расчета характеристик упругих слоисто-неоднородных сред.— Акуст. ж., 1971, т. 26, № 1, с. 97—102.
4. *Исакович М. А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973.

Институт океанологии
им. П. П. Ширшова

Поступила в редакцию
31.III.1980