АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXVII 1981 Вып. 3

УДК 534.26

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СРАЩИВАНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ К РЭЛЕЕВСКОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ В СКАЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ

Федорюк М. В.

Рассмотрено излучение и рассеяние длинных звуковых волн ограниченными телами и цилиндрами. Получены асимптотические формулы для рассеянных и излученных полей в ближней и дальней зонах.

Первое приближение задачи рассеяния длинных звуковых волн конечными телами или цилиндрами было найдено еще Рэлеем [1]. В последующих работах (см. [2]) найдены высшие приближения; их вычисление сводится к решению рекуррентной системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода. В настоящей работе для решения этих задач применяется метод сращивания асимптотических разложений (МС), который издавна применялся в задачах гидромеханики, аэромеханики, газодинамики [3—7], причем как в линейных, так и в нелинейных задачах. Мы используем вариант МС, развитый в работе [7]. Поэтому настоящая работа носит в основном методический характер; новыми являются, повидимому, только результаты, относящиеся к излучению осциллирующего цилиндра и к рассеянию на идеально мягком цилиндре.

Поле звукового давления $p(x)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(\Delta+k^2)p(x)=0 \tag{1}$$

во внешности ограниченной односвязной области D с достаточно гладкой границей Г. Здесь $x=(x_1, x_2, x_3)$ $(n=3)$ или $x=(x_1, x_2)$ $(n=2)$. На границе поставим одно из краевых условий

$$p(x)|_{\Gamma}=p_0(x) \quad \text{(а)}; \qquad \partial p(x)/\partial n|_{\Gamma}=u_0(x) \quad \text{(б)}, \tag{2}$$

где $p_0(x)$, $u_0(x)$ — достаточно гладкие функции. Нормаль к Г направлена внутрь области D. На бесконечности $p(x)$ удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда, которое можно записать в виде

$$p(x)=(e^{ikr}/r)f(\varphi, \theta; k)+O(r^{-2}) \qquad (r\to\infty)$$

при $n=3$ и в виде

$$p(x)=(e^{ikr}/\sqrt{r})f(\varphi; k)+O(r^{-3/2}) \qquad (r\to\infty)$$

при $n=2$. Малый параметр задачи есть $kd\ll 1$, где d — диаметр D; при проведении выкладок удобнее считать k малым параметром.

Опишем процедуру МС. Сделаем замену переменных

$$x=\xi/k. \tag{3}$$

Переменные ξ принято называть внешними, переменные x — внутренними. Асимптотику решения будем искать в двух различных формах: одна из них дает асимптотику решения в дальней зоне (внешнее разложение), другая — в ближней зоне (внутреннее разложение). Эти зоны имеют об-

ласть перекрытия, в которой оба разложения должны совпадать (сращиваться).

Для определенности возьмем случай $n=2$ и краевое условие (2), (б). Внешнее разложние будем искать в виде асимптотического ряда

$$p(x)=u_{00}(\xi)+k(u_{10}(\xi)+\ln ku_{11}(\xi))+\ldots, \tag{4}$$

внутреннее — в виде асимптотического ряда

$$p(x)=v_{00}(x)+\ln kv_{01}(x)+k(v_{10}(x)+\ln kv_{11}(x))+\ldots \tag{5}$$

Члены внешнего разложения $u_{jl}(\xi)$ удовлетворяют уравнению (1) всюду, кроме точки $\xi=0$; начало координат помещено внутрь области D, так что в переменных ξ, D переходит в kD и стягивается в точку при $k\to 0$. Функции u_{jl} удовлетворяют граничному условию на бесконечности (т. е. условию излучения), а потому обязаны иметь особенность в точке $\xi=0$. Анализ показывает, что эти особенности — степенные или логарифмические, так что

$$(\Delta+1)u_{jl}(\xi)=f_{jl}(\xi),$$

где $f_{jl}(\xi)$ — обобщенная функция конечного порядка, сосредоточенная в точке $\xi=0$. Следовательно [8], f_{jl} есть линейная комбинация дельта-функции и ее производных, а каждый из членов внешнего разложения есть линейная комбинация функции $H=H_0^{(1)}(\rho)$, $\rho=kr$ и ее производных. Будем искать u_{00} в виде

$$u_{00}(\xi)=aH, \tag{6}$$

где a — постоянная. Подставляя ряд (5) в уравнение (1), получаем для функций v_{jl} рекуррентную систему уравнений

$$\Delta v_{jl}=-v_{j-2,\,l}, \tag{7}$$

во внешности области D и краевые условия

$$\partial v_{00}/\partial n|_{\Gamma}=u_0(x);\quad \partial v_{jl}/\partial n|_{\Gamma}=0,\quad (j,\,l)\neq(0,\,0). \tag{8}$$

Здесь $v_{jl}\equiv 0$ при $j<0$. Члены внешнего разложения не определяются уравнениями (7) и краевыми условиями (8), так как они растут при $r\to\infty$. Они определяются только из сравнения с членами внешнего разложения.

Проведем сращивание разложений в первом порядке. Сращивание высших приближений мы для краткости не рассматриваем. Отметим, что, хотя высшие приближения не имеют простого физического смысла и процедура их вычисления с каждым шагом все усложняется, сам факт их существования необходимо установить. Дело в том, что первое приближение может удовлетворять уравнению (1) не с малой, а с большой невязкой, так что, для того чтобы построить функцию, приближенно удовлетворяющую уравнению (1), необходимо взять несколько первых членов разложений.

Напишем асимптотику внешнего разложения при $\rho\to 0$:

$$u_{00}=a(\alpha_0\ln\rho+\alpha_1+\ldots)+\ldots, \tag{9}$$

$$\alpha_0=2i/\pi,\quad \alpha_1=1+(2i/\pi)(C-\ln 2),$$

где $C=0{,}5772\ldots$ — постоянная Эйлера. Внешнее и внутреннее разложения сращиваются в зоне, в которой $\rho\to 0$, а $r\to\infty$. Поэтому перепишем главные члены асимптотики (9) во внутренних переменных x:

$$p(x)=a(\alpha_0\ln r+\alpha_1+\alpha_0\ln k)+\ldots \tag{9'}$$

Найдем функцию v_{00}, которая является решением задачи Неймана

$$\Delta v_{00}=0,\quad \partial v_{00}(x)/\partial n|_{\Gamma}=u_0(x).$$

Пусть выполнено условие

$$(10)\qquad \int_\Gamma u_0(x)\,ds=A\neq 0,$$

тогда необходимое условие разрешимости классической внешней задачи Неймана ([8], § 26) не выполняется, и функция v_{00} обязана расти при $r\to\infty$. Из сравнения с формулой (9′) следует, что этот рост должен быть логарифмическим, т. е. v_{00} имеет асимптотику

$$v_{00}(x)=a_1\ln r+a_2+O(r^{-1})\qquad (r\to\infty).$$

Постоянная a_1 определяется из условия

$$\int_\Gamma (u_0(x)-a_1\partial/\partial n\ln r)\,ds=0,$$

так что $a_1=-A/(2\pi)$, поскольку

$$(11)\qquad \int_\Gamma \partial/\partial n\ln r\,ds=-2\pi.$$

Для сращивания разложений необходимо, очевидно, положить $a=\alpha_0^{-1}a_1$, $a_2=\alpha_1 a$. Так как функция v_{01} удовлетворяет уравнению Лапласа и нулевому условию Неймана на Г, то можно положить $v_{01}=\alpha_0 a$, чтобы провести сращивание с членом порядка $\ln k$ из (9′). Тем самым функции u_{00}, v_{00}, v_{01} построены.

Из асимптотики функции Ханкеля при $kr\to\infty$ и из полученных выше результатов находим асимптотику амплитуды f:

$$(12)\qquad f(\varphi;k)=0{,}25\exp(i\pi/4)\int_\Gamma u_0(x)\,ds\times\sqrt{2/\pi k}+O(\sqrt{k}|\ln k|).$$

Пусть теперь $A=0$, тогда внешнее и внутреннее разложения будем искать в виде

$$(13)\qquad \begin{aligned}&p(x)=ku_{10}(\xi)+k^2(u_{20}(\xi)+\ln ku_{21}(\xi))+\\&+\ldots+k^m(v_{m0}(\xi)+\ln ku_{m1}(\xi))+\ldots,\\&p(x)=v_{00}(x)+k(v_{10}(x)+\ln kv_{11}(x))+\ldots\\&\ldots+k^m(v_{m0}(x)+\ln kv_{m1}(x))+\ldots\end{aligned}$$

Теперь условие разрешимости задачи Неймана для функции v_{00} выполнено, эта задача имеет ограниченное на бесконечности решение, и

$$(14)\qquad v_{00}(x)=A_1\cos\varphi/r+A_2\sin\varphi/r+\mathrm{const}+O(\bar r^2)\qquad (r\to\infty).$$

Постоянные A_1, A_2 зависят от вида области D и от граничной функции $u_0(x)$ и однозначно ими определяются.

Функцию $u_{10}(\xi)$ будем искать в виде

$$u_{10}=a_1\partial H/\partial\xi_1+a_2\partial H/\partial\xi_2,$$

где a_j — постоянные, которые определятся при сращивании разложений. При $\rho\to 0$ имеем

$$p(x)=(k\alpha_0/\rho)(a_1\cos\varphi+a_2\sin\varphi)+\ldots$$

Переходя, как и выше, в этом разложении к внутренним переменным, получаем

$$p(x)=(\alpha_0/r)(a_1\cos\varphi+a_2\sin\varphi)+\ldots$$

Сравнивая с (14), находим $\alpha_0 a_j=A_j$, $j=1, 2$. Отсюда находим главный член асимптотики амплитуды f:

$$(15)\qquad f(\varphi;k)=\exp(-i\pi/4)\sqrt{\pi k/2}(A_1\cos\varphi+A_2\sin\varphi)+O(k|\ln k|),$$

где A_1, A_2 определяются из (14).

Отметим одно важное обстоятельство, характерное для метода сращивания. Для того чтобы найти асимптотику поля p в дальней зоне, не нужно знать функции $v_{\text{д}}$ — достаточно знать их асимптотику при $kr\to\infty$. Это обстоятельство сильно упрощает решение конкретных задач.

Пусть известна функция $w(z)$ $(z=x_1+ix_2)$, конформно отображающая внешность области D на внешность единичного круга $|w|>1$. При $z\to\infty$ эта функция имеет следующую асимптотику:

$$w(z)=\alpha z+O(1),$$

причем можно считать, что $\alpha>0$. Из известных формул для решения задачи Неймана [9] получаем соотношение

$$A_1\cos\varphi+A_2\sin\varphi=\frac{r}{2\pi\alpha}\int\limits_{\Gamma}h(\zeta)\,\mathrm{Im}\left[\frac{1}{\bar z}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{w(\zeta)}+\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial n}w(\zeta)\right]|d\zeta|,$$

$$h(z)=\int\limits_{z_0}^{z}u_0(\zeta)\,ds,$$

из которого легко находятся A_1, A_2.

Родственной к только что рассмотренной задаче является задача о рассеянии длинных волн цилиндром с идеально жесткими стенками. Пусть на цилиндр падает плоская волна

$$p_0(x)=A\exp\,(i(\eta,x)),\ \eta^2=k^2.$$

Асимптотика амплитуды рассеяния имеет вид (вывод этой формулы см. ниже)

$$f(\varphi,k)=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}Ak^{3/2}e^{i\pi/4}\left(\tilde A_1\cos\varphi+\tilde A_2\sin\varphi+\frac{S}{2\pi}\right)+O(k^{5/2}|\ln k|). \tag{16}$$

Здесь S — площадь поперечного сечения цилиндра, величины $\tilde A_1$, $\tilde A_2$ определяются из соотношения

$$v(x)=(\tilde A_1\cos\varphi+\tilde A_2\sin\varphi)/r+O(r^{-2})\qquad(r\to\infty), \tag{17}$$

где $v(x)$ — решение уравнения Лапласа во внешности области D с краевым условием $\partial/\partial n(v+(\eta/k,x))|_\Gamma=0$. Если Γ — эллипс $x_1^2/a^2+x_2^2/b^2=1$, то

$$A_1=a(a+b)\eta_1/(2k),\qquad A_2=b(a+b)\eta_2/(2k).$$

Из формулы (16) видно, что рассеянное жестким цилиндром поле в дальней зоне есть суперпозиция полей монопольного и дипольного линейных излучателей, причем амплитуда монополя пропорциональна площади поперечного сечения цилиндра. В случае эллиптического цилиндра по двум диаграммам направленности длинных плоских волн с различными углами падения можно восстановить форму поперечного сечения и длины полуосей.

В случае первого краевого условия (2), (а) асимптотика амплитуды f имеет вид

$$f(\varphi;k)=\sqrt{\pi/2k}\exp\,(-i3\pi/4)A_3\times$$
$$\times[\ln\,(k/2)+C+\pi/2i-A_4]^{-1}+O(\sqrt{k}). \tag{18}$$

Величины A_3, A_4 определяются следующим образом. Пусть v_1, v_2 — гармонические вне области D функции, ограниченные на бесконечности и удовлетворяющие краевым условиям

$$v_1(x)|_\Gamma=p_0(x),\qquad v_2(x)|_\Gamma=-\ln r, \tag{19}$$

тогда

$$A_3=v_1(\infty),\qquad A_4=v_2(\infty). \tag{20}$$

Для амплитуды рассеянной цилиндром плоской волны указанного выше вида справедлива формула (18), в которой $A_3=-A$.

Этот случай является наиболее тонким из всех рассмотренных здесь задач. Нетрудно, конечно, угадать, что главный член асимптотики функции $\sqrt{k}f$ имеет порядок $\mathrm{const}/|\ln k|$, и затем, например, теми же методами, что и в работе [2], получить асимптотический ряд для этой функции по степеням малого параметра $|\ln k|^{-1}$. Оценка остаточного члена будет иметь при этом порядок $O(|\ln k|^{-N})$, что явно неудовлетворительно ввиду медленного роста логарифма. Оказывается, однако, что можно вместо «естественного» малого параметра $|\ln k|^{-1}$ ввести малый параметр вида $(|\ln k|+\delta)^{-1}$ с подходящей константой δ (см. знаменатель в формуле (18)), и в полученном асимптотическом ряде будут только члены порядков k^m и $k^m(|\ln k|+\delta)^{-1}$, т. е. бесконечные ряды по степеням $|\ln k|^{-1}$ удается просуммировать. Такого рода примеры хорошо известны в гидромеханике [4, 7].

Если известна описанная выше функция $w(z)$, то, используя известные формулы, дающие решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа [9], нетрудно показать, что

$$A_3=(1/2\pi)\int_\Gamma p_0(z)\,\partial/\partial n \ln|w(z)|\,ds,$$

$$A_4=(-1/2\pi)\int_\Gamma \ln r\,\partial/\partial n \ln|w(z)|\,ds.$$

Если Γ — указанный выше эллипс, то

$$A_3=(1/2\pi)\int_0^{2\pi} p_0(a\cos\varphi, b\sin\varphi)\,d\varphi,$$

$$A_4=\ln(a+b)/2.$$

По измерениям амплитуды рассеянной цилиндром волны в дальней зоне можно восстановить только сумму полуосей эллипса. Функция w известна также в случае, когда Γ — лемниската $|z^2-a^2|=b^2$, $0<a<b$, а именно $w(z)=b^{-1}\sqrt{z^2-a^2}$.

Трехмерные задачи рассеяния проще двумерных. В случае краевого условия (2), (а) имеем

$$f(\varphi, \theta; k)=A_5+O(k^2), \tag{21}$$

где A_5 определяется следующим образом. Пусть $v_3(x)$ — гармоническая вне области функция, равная на Γ: $v_3(x)=p_0(x)$ и такая, что $v_3(\infty)=0$. Тогда

$$v_3(x)=A_5/r+O(r^{-2}) \quad (r\to\infty), \tag{22}$$

откуда и находится A_5. В случае краевого условия (2), (б) имеем

$$f(\varphi, \theta; k)=A_6+O(k), \tag{23}$$

где A_6 определяется асимптотикой

$$v_4(x)=A_6/r+O(r^{-2}) \quad (r\to\infty), \tag{24}$$

гармонической вне области D функции v_4, такой, что $v_4(\infty)=0$.

Пусть Γ — вытянутый сфероид с фокусами в точках $(0, 0, \pm d/2)$ и с полуосями a, b $(a<b)$. В сфероидальных координатах всякая гармоническая вне D функция, убывающая на бесконечности, разлагается в ряд

$$v(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} a_{nm}e^{im\varphi}P_n^{(|m|)}(\eta)\,Q_n^{(|m|)}(\xi)$$

по присоединенным функциям Лежандра [10]. Главный член асимптотики при $r\to\infty$ имеет вид

$$v(x)=(d/2r)\,a_{00}+O(\bar{r}^2),$$

так что вычисление величин A_5, A_6 приводится к вычислению коэффициента a_{00} в разложении решения. Отсюда находим

$$A_5=\frac{d}{8\pi Q_0(\xi_0)}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1} p_0 d\varphi d\eta,\quad A_6=\frac{a^2}{2\pi d}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\xi_0^2-\eta^2}\,u_0 d\varphi d\eta,$$

$$\xi_0=2d/b,$$

где значения функций p_0, u_0 берутся в точках на поверхности сфероида Г. В частности, для поля, которое получается при рассеянии телом плоской волны, имеем

$$\tilde{A}_5=-dA/(2Q_0(\xi_0))$$

для тела с идеально мягкими стенками и

$$f(\theta,\varphi)\cong\frac{A}{3}k^2\left(\frac{d}{2}\right)^2\left[\frac{d\sqrt{1-\eta^2}}{ab[Q_1^{(1)}(\xi_0)]'}\left(\frac{\eta_1^0}{k}\cos\varphi+\frac{\eta_2^0}{k}\sin\varphi\right)-\right.$$

$$\left.-b\eta_3^0\eta/kQ_1'(\xi_0)\right]$$

для тела с идеально жесткими стенками.

Аналогичные результаты можно получить также в случаях, когда Г — сплюснутый сфероид или трехосный эллипсоид; в последнем случае надо использовать разложение гармонической функции в ряды по функциям Ламе [10].

Если имеется несколько рассеивающих тел, размеры которых малы по сравнению с длиной волны, а расстояния между ними — порядка длины волны, то в первом приближении рассеянное поле будет суперпозицией полей, рассеянных каждым телом в отдельности. Высшие приближения также могут быть получены методом сращивания. Если же расстояния между телами малы по сравнению с длиной волны, то функции внутреннего разложения v_{jl} будут решениями уравнений Пуассона вне этих тел.

Сращивание разложений в плоских задачах. Для осциллирующего цилиндра (условие (2), (а)) разложения будем искать в виде

$$\begin{aligned}(25)\qquad & p(x)=\mu u_{01}(\xi)+k(u_{10}(\xi)+\mu u_{11}(\xi))+\ldots+\\ & +k^n(u_{n0}(\xi)+\mu u_{n1}(\xi))+\ldots,\\ & p(x)=\mu v_{01}(x)+v_{00}(x)+\ldots+k^n(v_{n0}(x)+\mu v_{n1}(x))+\ldots\end{aligned}$$

Здесь $\mu=(\ln k+\delta)^{-1}$ и δ будет найдено в процессе сращивания. Главный член внешнего разложения будем искать в виде $u_{01}=aH$, где a — постоянная. Выпишем асимптотику функции H при $\rho\to 0$ с точностью до бесконечно малой и перейдем к внутренним переменным, тогда получим

$$(26)\qquad p(x)=a\alpha_0+a\mu(\alpha_0\ln r+\alpha_1-\alpha_0\delta)+\ldots$$

Здесь мы воспользовались тождеством $\ln k=\mu^{-1}-\delta$. Функция $v_{00}(x)$ есть решение задачи Дирихле

$$\Delta v_{00}=0,\quad v_{00}|_{\Gamma}=p_0(x)$$

во внешности D и потому при $r\to\infty$ имеет асимптотику

$$v_{00}(x)=v_{00}(\infty)+O(1/r).$$

Для сращивания разложения следует, очевидно, положить $v_{00}(\infty)=\alpha_0 a$. Функция v_{01} есть решение задачи Дирихле

$$\Delta v_{01}=0,\quad v_{01}|_{\Gamma}=0$$

во внешности D, и из сравнения (26) и (25) следует, что она должна иметь логарифмический рост при $r\to\infty$. Положим $v_{01}=a\alpha_0\ln r+w$, тогда гармоническая вне D функция w удовлетворяет краевому условию $w|_\Gamma=-a\alpha_0\ln r$ и потому имеет асимптотику $w(x)=w(\infty)+O(1/r)$. Для сращивания разложений необходимо положить $a(\alpha_1-\alpha_0\delta)=w(\infty)$. Из этих формул и асимптотики функции Ханкеля при $kr\to\infty$ следует (18).

Рассмотрим задачу о рассеянии длинных волн цилиндром с идеально жесткими стенками. Внешнее и внутреннее разложения будем искать в виде

$$
\begin{aligned}
(27)\qquad & p(x)=k^2(u_{20}(\xi)+\ln ku_{21}(\xi))+\ldots+\\
& +k^n(u_{n0}(\xi)+\ln ku_{n1}(\xi))+\ldots,\\
& p(x)=kv_{10}(x)+k^2(\ln kv_{21}(x)+\\
& +v_{20}(x))+\ldots+k^n(v_{n0}(x)+\ln kv_{n1}(x))+\ldots
\end{aligned}
$$

Функцию u_{20} возьмем в виде $u_{20}=a_1\partial H/\partial\xi_1+a_2\partial H/\partial\xi_2+a_0H$, где a_j — постоянные. Выписывая главные члены ее асимптотики при $\rho\to0$ с точностью до членов порядка $o(1)$ и переходя затем в этом разложении к внутренним переменным, получаем

$$
\begin{aligned}
& p(x)=k\alpha_0r^{-1}(a_1\cos\varphi+a_2\sin\varphi)+\\
& +k^2a_0(\alpha_0\ln r+\alpha_1)+k^2\ln k\alpha_0a_0+\ldots
\end{aligned}
$$

Из сравнения этого разложения с внутренним и из асимптотики (14) находим $\alpha_0a_j=A_j$, $j=1$, 2. Функцию v_{20} представим в виде $v_{20}=Av$, тогда $v(x)$ — гармоническая вне D функция, удовлетворяющая краевому условию $v|_\Gamma=(1/2)k^{-2}\partial(\eta,x)^2/\partial n$. Из сравнения с внешним разложением следует, что функция v должна на бесконечности расти как логарифм, т. е.

$$v(x)=B\ln r+o(1)\qquad(r\to\infty).$$

После того как B будет найдена, немедленно находится $a_0=\alpha_0^{-1}AB$. Остаются нескомпенсированными члены $k^2a_0\alpha_1$, $k^2\ln k\alpha_0a_0$ из внешнего разложения. Так как константа удовлетворяет уравнению Лапласа и нулевому граничному условию Неймана на Γ, то можно положить $v_{21}(x)\equiv\alpha_0a_0$, а величину $k^2a_0\alpha_1$ скомпенсировать, добавив нужную константу к функции $v_{20}(x)$.

Вычислим B. Из формулы Грина

$$\int\limits_\Gamma \partial f/\partial n ds=-\iint\limits_D \Delta f dx$$

(напомним, что нормаль к Γ направлена внутрь области D) вытекает, что

$$(1/2k^2)\int\limits_\Gamma \partial(\eta,x)^2/\partial n ds=-S.$$

Следовательно, $B=S/2\pi$ (см. (11)). Из полученных здесь выражений для постоянных a_j и из асимптотики функции Ханкеля при $kr\to\infty$ следует (17).

В заключение заметим, что приведенные в настоящей работе примеры далеко не исчерпывают возможности применения метода сращивания асимптотических разложений к теории дифракции волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рэлей.* Теория звука. т. 2. М.: Гостехтеориздат, 1955.
2. *Хёнл Х., Мауэ А., Вестфалль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964.
3. *Oseen C. W.* Über die Stokes'she Formel, und über eine verwandte Anfgabe in der Hydrodynamik.— Ark. Mat. Astronom. Fys., 1910, c. 6, № 29.
4. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.

5. *Праудмен И., Пирсон Дж.* Разложения по малым числам Рейнольдса в задачах обтекания сферы и кругового цилиндра: Сб.: переводов. Механика, 1958, т. 2, в. 48, с. 3—28.
6. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.
7. *Ильин А. М.* Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. 2. Область с малым отверстием.— Матем. сб., 1977, т. 103, № 2, с. 265—284.
8. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1975.
9. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
10. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Т. 2. М.: Физматгиз, 1963.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
5.II.1979