АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXVII 1981 Вып. 4

УДК 534.231

ВИБРОДЕМПФИРУЮЩИЕ СВОЙСТВА ВЯЗКОУПРУГОГО СЛОЯ, НАХОДЯЩЕГОСЯ В ВОДЕ, ВБЛИЗИ ИЗГИБНО-КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ПЛАСТИНЫ

Дубасов В. Д., Мачеварпани М. М., Шкварников А. П.

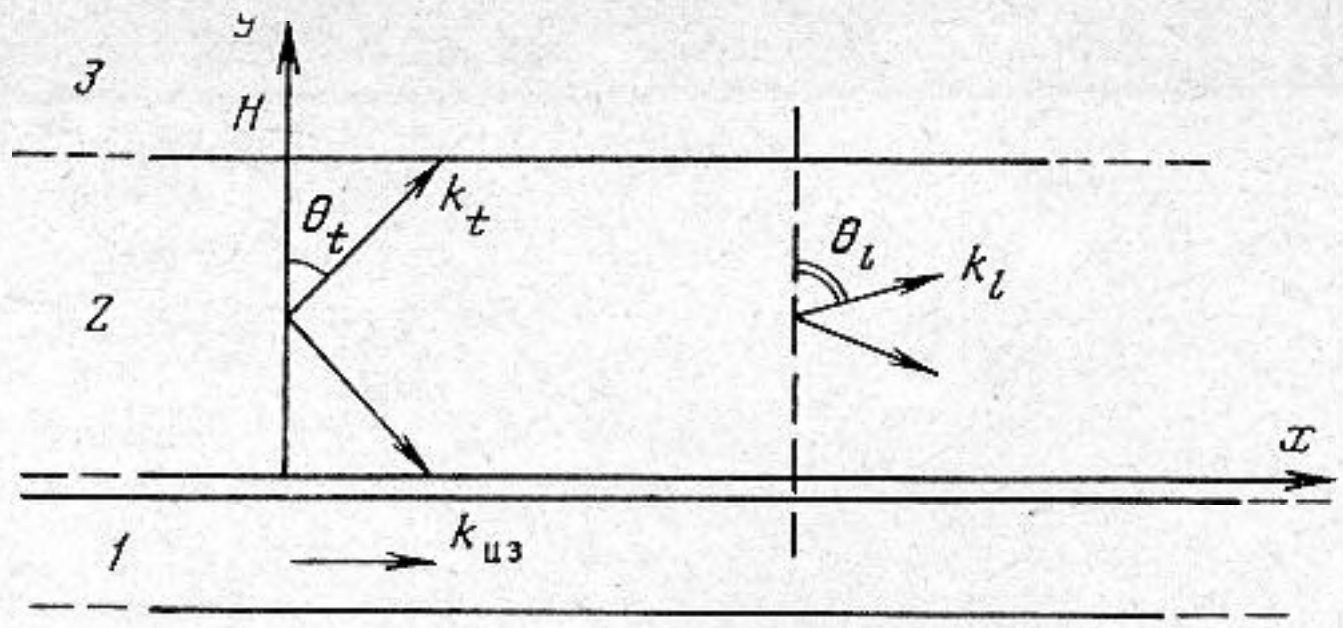
Исследованы вибродемпфирующие свойства находящегося в воде слоя вязкоупругого резиноподобного материала, расположенного вблизи соприкасающейся с водой поверхности изгибно колеблющейся пластины. Показано, что в районе частоты совпадения скоростей изгибной волны и нормальной волны продольного типа в слое вибродемпфирование максимально. Величина эффекта вибродемпфирования резко снижается при отсутствии акустической нагрузки на слой со стороны воды.

В отличие от вибродемпфирующих слоев, работающих в воздухе, механизм поглощения вибраций вязкоупругими слоистыми конструкциями, находящимися в воде, вблизи изгибно колеблющейся пластины, в настоящее время изучен недостаточно. Лишь в работах [1, 2] исследовались вибродемпфирующие свойства находящегося в воде жидкого слоя, обладающего более высокой по сравнению с водой объемной сжимаемостью. Было показано, что в районе частоты резонанса объемной упругости слоя с «присоединенной массой» воды слой акустически «мягкого» материала с потерями обладает высокими вибродемпфирующими свойствами. Ниже рассматривается другой механизм интенсивного поглощения вибрационной энергии находящимся в воде упругим слоем, связанный с резонансом сдвиговой упругости слоя и «присоединенной массы» воды, который имеет место вблизи частоты совпадения скоростей изгибной волны в пластине и продольной волны в упругом слое.

Итак, рассмотрим задачу об изгибных колебаниях пластины (*1*), граничащей одной стороной с вакуумом, а другой стороной с жидкостным полупространством (*3*), в котором размещен вблизи поверхности пластины слой вязкоупругого материала (*2*) (фиг. 1). При этом будем считать, что слой вязкоупругого материала является однородным и акустический контакт между пластиной и слоем осуществляется через пренебрежимо тонкий зазор, заполненный водой. В этом случае реакция слоя на колебания пластины может быть описана одним скалярным параметром — акустическим импедансом $z_н$ для распространяющейся вдоль пластины изгибной волны. Волновые числа изгибных волн, распространяющихся по рассматриваемой задемпфированной пластине, могут быть найдены из решения следующего дисперсионного уравнения, которое легко получить из уравнения изгибных колебаний пластины с учетом реакции слоя:

$$t^4-1-z_0=0, \tag{1}$$

где $t=k/k_0$ — отношение волнового числа k в пластине, нагруженной жидкостным полупространством через слой вязкоупругого материала, к волновому числу k_0 ненагруженной пластины; z_0 — акустический импеданс внешней нагрузки на пластину $z_н$ (импеданс системы жидкая среда — слой вязкоупругого материала), отнесенный к инерционному импедансу единицы поверхности пластины.



Фиг. 1. Демпфируемая пластина с вязкоупругим слоем

Вследствие зависимости относительного импеданса z_0 от параметра t уравнение (1) является трансцендентным и в общем случае может быть решено только численным методом с использованием ЭВМ. Прежде чем перейти к результатам численного решения уравнения (1), получим и проанализируем выражение для акустического импеданса $z_н$ вязкоупругого слоя, соприкасающегося с жидкостным полупространством.

Гармонические колебания в слое описываются следующей системой уравнений движения твердой среды:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}-\rho\omega^2 u_x=0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}-\rho\omega^2 u_y=0,$$

$$\sigma_{yy}=\rho c^2\frac{\partial u_y}{\partial y}+\rho(c^2-2b^2)\frac{\partial u_x}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\sigma_{xx}=\rho(c^2-2b^2)\frac{\partial u_y}{\partial y}+\rho c^2\frac{\partial u_x}{\partial x},$$

$$\sigma_{xy}=\rho b^2\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right).$$

Здесь σ_{xx}, σ_{xy} и σ_{yy} — компоненты тензора напряжений; u_x и u_y — проекции вектора деформаций на оси x и y соответственно; ρ, c, b и ω — плотность, скорость продольных волн, скорость сдвиговых волн в вязкоупругом слое и круговая частота соответственно.

Граничные условия для уравнений движения (2) состоят в следующем. На верхней границе слоя $y=H$ отношение нормального напряжения к нормальной компоненте вектора скорости должно равняться взятому с обратным знаком акустическому импедансу жидкостного полупространства для изгибной волны $z_ж$:

$$\frac{\sigma_{yy}(H)}{-j\omega u_y(H)}=-z_ж=-\frac{\rho_ж c_ж}{\sqrt{1-k^2/k_ж^2}} \tag{3а}$$

где $\rho_ж$, $c_ж$, $k_ж$ — плотность, скорость звука и волновое число в жидком полупространстве.

На нижней границе слоя при $y=0$ нормальная компонента вектора смещений в слое должна быть равна создаваемому изгибной волной нормальному смещению пластины $u_{пл}$:

$$u_y(0)=u_{пл}. \tag{3б}$$

Помимо этого на верхней и нижней границах слоя должны обращаться в нуль тангенциальные напряжения:

(3в) $$\sigma_{xy}(0)=0; \quad \sigma_{xy}(H)=0.$$

Пусть по пластине в положительном направлении оси распространяется изгибная волна $u_{пл}=e^{jkx}$. В этом случае акустическое поле внутри слоя можно представить в виде суперпозиции четырех плоских волн: двух волн продольного типа и двух волн сдвигового типа. Волны продольного типа распространяются с волновым числом k_l под углами θ_l и $\pi-\theta_l$ к оси y, волны сдвигового типа с волновым числом k_t под углами θ_t и $\pi-\theta_t$ к оси y (направления распространения продольных и сдвиговых волн в слое схематически указаны на фиг. 1).

Компоненты вектора смещений в слое можно написать в следующем виде:

(4) $$\begin{aligned} u_x&=e^{jkx}[(Ae^{jk_l y\cos\theta_l}+Be^{-jk_l y\cos\theta_l})\sin\theta_l+(Ce^{jk_t y\cos\theta_t}-De^{-jk_t y\cos\theta_t})\cos\theta_t],\\ u_y&=e^{jkx}[(Ae^{jk_l y\cos\theta_l}-Be^{-jk_l y\cos\theta_l})\cos\theta_l-(Ce^{jk_t y\cos\theta_t}+De^{-jk_t y\cos\theta_t})\sin\theta_t], \end{aligned}$$

где $\sin\theta_l=k/k_l$, $\sin\theta_t=k/k_t$.

Амплитуды продольных и сдвиговых волн A, B, C и D должны быть определены из граничных условий (3а), (3б), (3в).

Подставляя выражение (4) в формулы (3а), (3б), (3в), получаем систему четырех линейных уравнений для нахождения амплитуд распространяющихся в слое продольных и сдвиговых волн:

(5) $$\begin{aligned} &A\cos\theta_l-B\cos\theta_l-C\sin\theta_t-D\sin\theta_t=1,\\ &(A-B)k_l\sin 2\theta_l+(C+D)k_t\cos 2\theta_t=0,\\ &k_l\sin 2\theta_l[\cos\tau_1(A-B)+j\sin\tau_1(A+B)]+\\ &+k_t\cos 2\theta_t[\cos\tau_2(C+D)+j\sin\tau_2(C-D)]=0,\\ &[jk_l\rho c_l^2\cos 2\theta_t\cos\tau_1+\omega z_ж\cos\theta_l\sin\tau_1](A+B)-\\ &-[k_l\rho c_l^2\cos 2\theta_t\sin\tau_1+j\omega z_ж\cos\theta_l\cos\tau_1](A-B)+\\ &+[k_t\rho c_t^2\sin 2\theta_t\sin\tau_2+j\omega z_ж\sin\theta_t\cos\tau_2](C+D)+\\ &+[-jk_t\rho c_t^2\sin 2\theta_t\cos\tau_2-\omega z_ж\sin\theta_t\sin\tau_2](C-D)=0, \end{aligned}$$

где $\tau_1=k_lH\cos\theta_l$, $\tau_2=k_tH\cos\theta_t$.

Решение системы (5) не вызывает затруднений, однако ввиду громоздкости выражения для амплитуд A, B, C и D здесь не приводятся. Импеданс внешней нагрузки $z_н$ для бегущей по пластине изгибной волны определяется следующим образом:

(6) $$z_н=\frac{\sigma_{yy}(0)}{j\omega u_y(0)}=\rho c_l\left[(A+B)\cos 2\theta_t-(C-D)\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_l}\sin 2\theta_t\right].$$

Подставляя в формулу (6) выражения для амплитуд волн в слое, найденные из решения системы уравнений (5), получаем для сопротивления нагрузки окончательную формулу

(7) $$z_н=\frac{\omega\rho}{k}\frac{M+Nz_ж/\rho c_l}{N-jQz_ж/\rho c_l}$$

где

$$\begin{aligned} M&=-4j\cos\theta_l\sin^2\theta_t\sin 2\theta_t\cos^2 2\theta_t(1-\cos\tau_1\cos\tau_2)-\\ &-j\sin\theta_l(\cos^4 2\theta_t+4\operatorname{ctg}^2\theta_l\sin^4\theta_t\sin^2 2\theta_t)\sin\tau_1\sin\tau_2,\\ N&=\cos^2 2\theta_t\sin\theta_l\cos\theta_l\cos\tau_1\sin\tau_2+2\cos^2\theta_l\sin^2\theta_t\sin 2\theta_t\sin\tau_1\cos\tau_2,\\ Q&=\cos^2\theta_l\sin\tau_1\sin\tau_2. \end{aligned}$$

В общем случае выражение (7) мало пригодно для аналитического исследования. Получим из выражения (7) в первую очередь наиболее инте-

ресное в практическом отношении низкочастотное приближение. Для этого предположим, что частоты колебаний пластины существенно ниже частоты совпадения скорости изгибной волны в пластине и скорости продольной волны в слое, а толщина слоя существенно меньше длин изгибной волны в пластине и сдвиговой волны в слое. Математически сформулированные условия можно написать следующим образом:

$$\sin\theta_t = \frac{c_t}{c} \gg 1,$$

(8)

$$|\tau_1| = |k_t H \cos\theta_t| \approx |kH| \approx |\tau_2| \ll 1.$$

Используя условия (8) и заменяя в формуле (7) тригонометрические функции от аргументов τ_1 и τ_2 первыми двумя членами разложения в степенной ряд, после несложных преобразований можно получить следующее низкочастотное приближение для импеданса внешней нагрузки на пластину:

$$z_н = -j\omega\rho H \frac{1 + j\dfrac{z_ж}{\rho H\omega}}{1 + j\dfrac{z_ж \omega H \sin^2\theta_t}{\rho c_t^2 (1 - 4\sin^2\theta_t)}}. \tag{9}$$

Учитывая, что в рассматриваемом низкочастотном диапазоне для импеданса жидкого полупространства $z_ж$ справедливо приближенное выражение

$$z_ж \approx -j\frac{\rho_ж c_ж}{\sin\theta_ж} = -j\frac{\rho_ж c_t}{\sin\theta_t}, \tag{10}$$

можно провести дальнейшее упрощение приближенной формулы (9):

$$z_н = -j\omega\rho H \frac{1 + \dfrac{\rho_ж}{\rho kH}}{1 + \dfrac{\rho_ж}{\rho}\dfrac{kH}{1 - 4\sin^2\theta_t}}. \tag{11}$$

При выполнении условия

$$\sin\theta_t = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\rho_ж}{\rho} kH\right)^{1/2} \tag{12}$$

знаменатель выражения (11) обращается в нуль, что приводит к резонансному возрастанию импеданса внешней нагрузки. В районе указанного резонанса (при $\sin\theta_t > 1/2$) следует ожидать сильного влияния вязкоупругого слоя на волновые параметры вибрирующей пластины. Учитывая, что $kH \ll 1$ формула (8), для приближенной оценки частоты резонанса из условия (12) можно получить более простое условие:

$$\sin\theta_t = \frac{c_t}{c} \approx \frac{1}{2}. \tag{12а}$$

Для резиноподобного материала модуль Юнга E, модуль сдвига μ и коэффициент Пуассона γ приближенно удовлетворяют следующим соотношениям: $E \approx 3\mu$, $\gamma \approx 0{,}5$. Ввиду этого для скорости продольной волны в тонком резиноподобном слое справедлива следующая приближенная формула:

$$c_{пр} = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\gamma^2)}} \approx \sqrt{\frac{4\mu}{\rho}} \approx 2c_t. \tag{12б}$$

Подставляя (12б) в (12а), получаем, что в случае тонкого резиноподобного вязкоупругого слоя приближенное условие резонанса (12а) означает совпадение скорости изгибной волны со скоростью продольной волны в слое:

(13) $$c \approx 2c_t \approx c_{\text{пр}}.$$

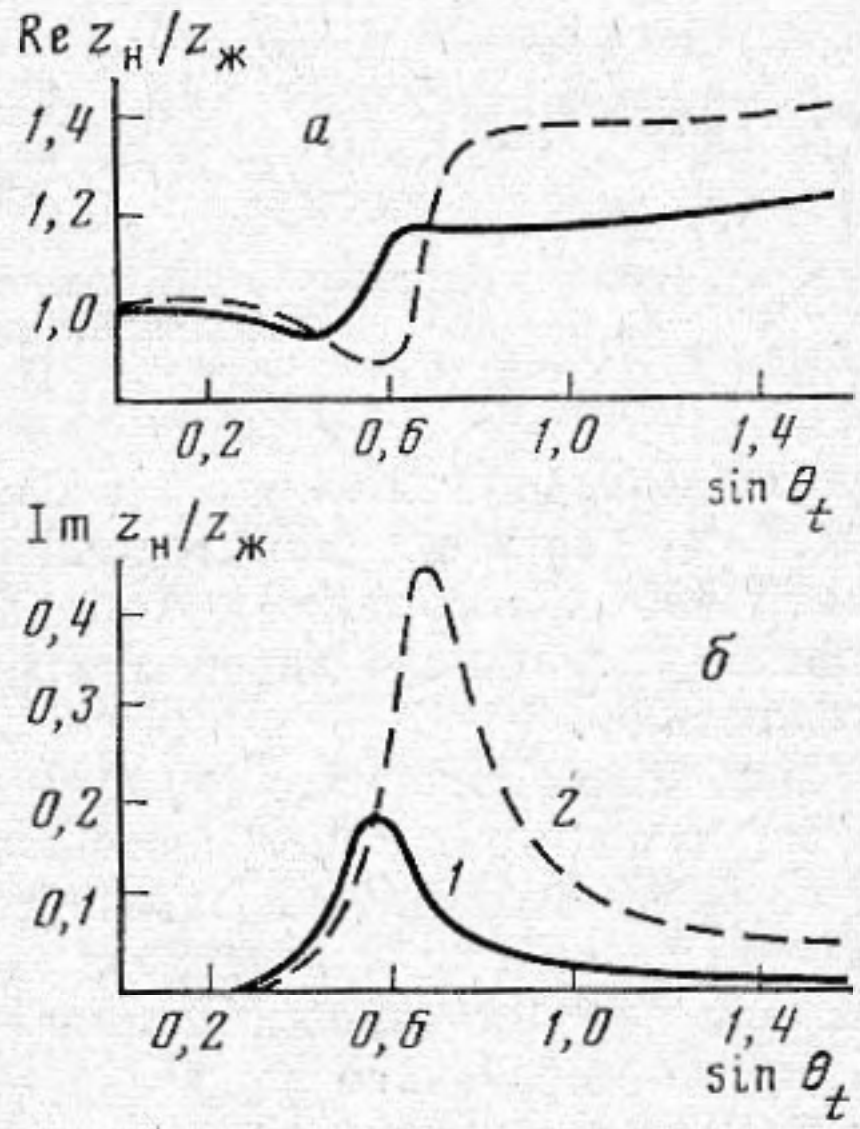
Таким образом, для тонкого слоя ($kH \ll 1$) из резиноподобного материала имеет место резонансное возрастание импеданса по отношению к изгибной волне в районе частоты совпадения скоростей изгибной и продольной волн в слое. Следует отметить, что частота этого резонанса (12) ввиду малости параметра kH по сравнению с единицей весьма слабо зависит от толщины слоя.

Исследуем теперь формулу для импеданса $z_{\text{н}}$ в области высоких частот. С ростом частоты волновое число изгибных волн в пластине k возрастает пропорционально квадратному корню из частоты, а волновое число сдвиговых волн в слое k_t — пропорционально частоте. Таким образом, на достаточно высоких частотах выполняется следующее соотношение:

(14) $$\sin\theta_t = \frac{k}{k_t} \approx 0.$$

Устремляя в (7) $\sin\theta_t$ к нулю, получаем высокочастотное приближение для импеданса внешней нагрузки на пластину:

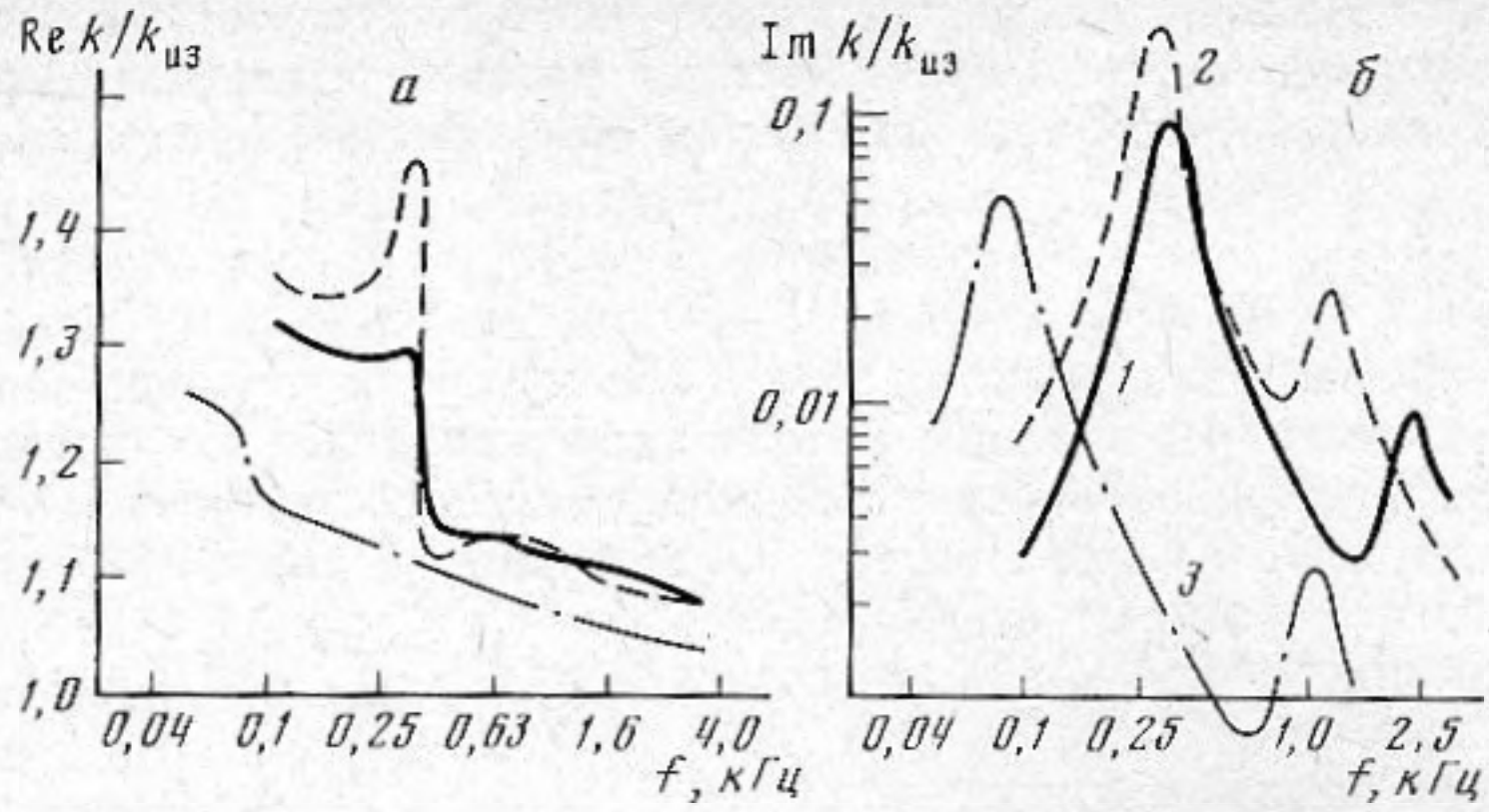
(15) $$z = \frac{\rho c_l}{\cos\theta_l}\,\frac{z_{\text{ж}} - j\,\text{tg}\,\tau_1\rho_l c_l/\cos\theta_l}{\rho_l c_l/\cos\theta_l - j\,\text{tg}\,\tau_1 z_{\text{ж}}}$$



Фиг. 2. Отношение импеданса нагрузки на демпфируемую пластину $z_{\text{н}}$ к импедансу жидкого полупространства (вода) $z_{\text{ж}}$

Формула (15) совпадает с выражением для импеданса жидкого слоя ($c_t=0$), опирающегося на нагрузку с импедансом $z_{\text{ж}}$, т. е. на достаточно высоких частотах вязкоупругий слой ведет себя по отношению к колеблющейся пластине аналогично слою жидкости.

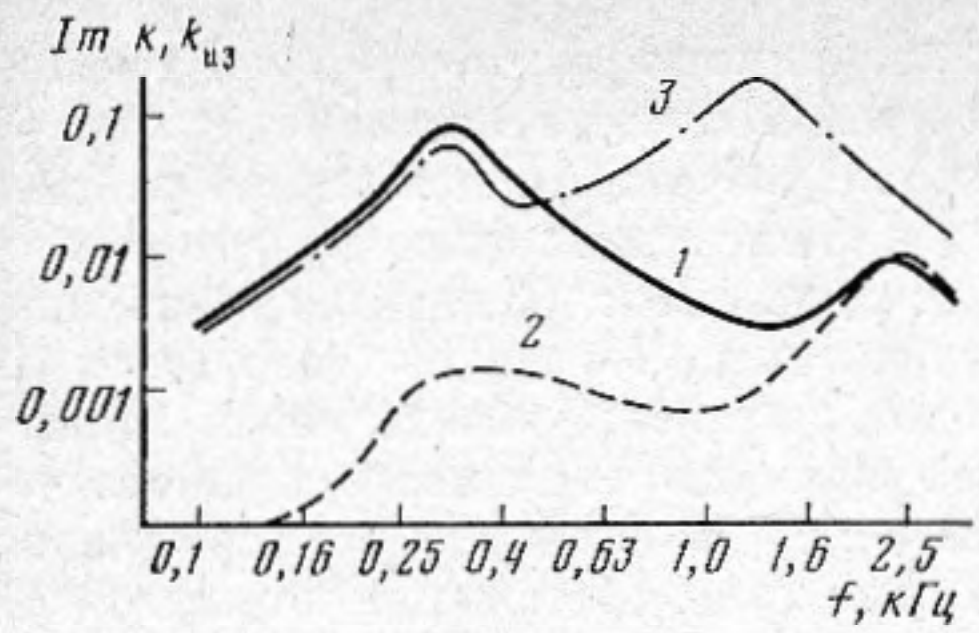
Результаты качественного исследования выражения (7) для импеданса внешней нагрузки на пластину можно резюмировать следующим образом. Сдвиговая упругость и связанные с ней большие диссипативные потери в резиноподобном вязкоупругом слое могут оказывать существенное влияние на распространение изгибных волн по пластине в низкочастотном диапазоне, где скорость сдвиговых волн в слое сравнима со скоростью изгибных волн в пластине. Наибольшего влияния сдвиговой упругости на затухание изгибных волн в пластине следует ожидать в районе частоты совпадения скоростей распространения изгибной волны в пластине и нормальной волны продольного типа в слое ($\sin\theta_t \approx 1/2$). На фиг. 2, *а* и *б* приведены результаты численного расчета по точной формуле (7) импеданса внешней нагрузки $z_{\text{н}}$ в зависимости от отношения скорости сдвиговых волн в слое к скорости изгибных волн $\sin\theta_t = c_t/c$. На фиг. 2, *а* по оси ординат отложена действительная часть отношения импеданса внешней нагрузки $z_{\text{н}}$ к импедансу жидкости (воды) в отсутствие слоя $z_{\text{ж}}$; на фиг. 2, *б* — мнимая часть этого отношения. Расчет проводился для слоя со следующими значениями параметров: $\rho=1$ г/см^3, $\mu=5\cdot10^7(1-0{,}3j)$ г/см·с^2, $c_l=1{,}5\cdot10^5$ см/с, $f=100$ Гц. Сплошные кривые на фиг. 2, *а* и *б* соответствуют слою толщиной $H=1{,}6$ см, а штриховые — слою толщиной $H=3{,}2$ см. Из приве-



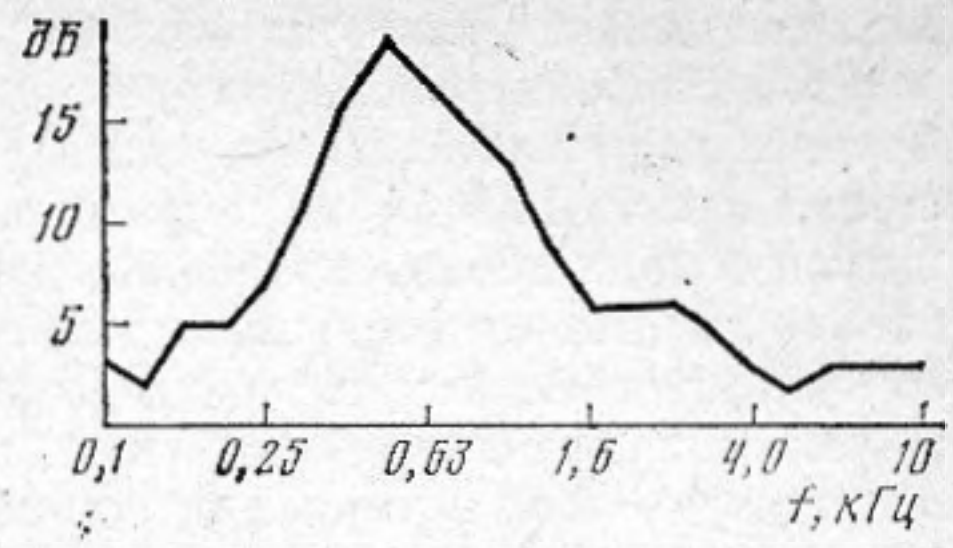
Фиг. 3. Зависимость волнового числа изгибных волн в пластине k от толщины демпфирующего слоя

денных кривых видно, что в районе $\sin\theta_t=0{,}5-0{,}7$ мнимая часть отношения $z_н/z_ж$ достигает максимального значения, т. е. в вязкоупругом слое имеет место максимальное поглощение акустической энергии, а при дальнейшем уменьшении параметра $\sin\theta_t$ импеданс $z_н$ стремится к импедансу жидкости $z_ж$.

Для количественного анализа влияния слоя резиноподобного материала на степень затухания изгибных волн проводилось численное решение методом Ньютона дисперсионного уравнения (1). При этом для расчета импеданса внешней нагрузки $z_н$ использовалась точная формула (7) и из системы решений дисперсионного уравнения (1) выделялось одно решение, соответствующее наименее затухающей изгибной волне, распространяющейся в положительном направлении оси x. Результаты численного решения дисперсионного уравнения приводятся на фиг. 3, *а* и *б*. Здесь по осям в логарифмическом масштабе отложены частота в кГц и отношение волнового числа изгибных волн в нагруженной пластине k к волновому числу в такой же пластине без внешней нагрузки $k_{из}$ (на фиг. 3, *а* по оси ординат отложена действительная часть указанного отношения, а на фиг. 3, *б* — мнимая). Расчеты проводились для слоя со следующими значениями параметров: $\rho=1$ г/см^3, $\mu=5\cdot10^7(1-0{,}3j)$ г/см·с^2, $c_l=1{,}5\cdot10^5$ см/с. Сплошные кривые соответствуют толщине пластины $h=0{,}8$ см и толщине слоя $H=1{,}6$ см; штриховые кривые соответствуют $h=0{,}8$ см и $H=3{,}2$ см; штрихпунктирные кривые — $h=3{,}2$ см $H=3{,}2$ см. Из кривых на фиг. 3, *а* и *б* видно, что действительная часть волнового числа изгибных волн в нагруженной пластине резко меняет свою величину, а мнимая часть имеет максимум в окрестности частоты совпадения скоростей изгибной и нормальной волн продольного типа в слое. Величина максимума мнимой части волнового числа свидетельствует о весьма высоких потерях энергии изгибных волн в этом частотном диапазоне (коэффициент потерь для изгибных волн $\eta_{из}\approx4\,\mathrm{Im}\,k/k_{из}$). Помимо указанного низкочастотного максимума потерь энергии изгибных волн имеет место значительно меньший по величине максимум в более высокочастотной области. Последний соответствует частоте, на которой по толщине слоя резиноподобного материала укладывается половина длины сдвиговой волны. При увеличении толщины слоя низкочастотный максимум практически не смещается по частоте, но возрастает по величине; полуволновой максимум при этом сдвигается в область более низких частот. При увеличении толщины пластины имеет место иная картина: оба максимума уменьшаются по величине, причем положение полуволнового максимума на частотной оси остается неизменным, а низкочастотный максимум смещается в сторону низких частот. На



Фиг. 4



Фиг. 5

Фиг. 4. Поглощение вибрационной энергии различными вязкоупругими слоями (H=1,6 см, h=0,8 см). *1* – слой нагруженный на воду, *2* – слой в отсутствие воды; *3* – слой из материала, объемная сжимаемость которого выше объемной сжимаемости воды

Фиг. 5. Снижение уровней вибраций в соприкасающейся с водой пластине за счет вибродемпфирования близкорасположенным слоем резины (эксперимент). H=1,6 см, h=0,8 см

фиг. 4 по координатным осям отложены те же величины, что и на фиг. 3, *б*. Сплошная кривая совпадает со сплошной кривой на фиг. 3, *б* и характеризует затухание изгибной волны в пластине толщиной h=0,8 см при толщине слоя резиноподобного материала H=1,6 см. Штриховая кривая рассчитана для тех же параметров пластины и слоя в предположении, что жидкое полупространство за слоем отсутствует ($z_ж$=0), а в зазоре между пластиной и слоем жидкость сохранена. Штрихпунктирная кривая получена для акустически более «мягкого» слоя, скорость продольной волны в котором равна $c_l=1{,}5\cdot10^4(1-0{,}15j)$ см/с. Из сравнения сплошной и штриховой кривых на фиг. 4 следует, что жидкость (вода), находящаяся за слоем резиноподобного материала, играет весьма важную роль в обеспечении высокого поглощения изгибных волн в низкочастотном диапазоне (в районе частоты совпадения). Сопоставление сплошной и штрихпунктирной кривых показывает, что существенное изменение скорости распространения продольных волн в слое весьма мало влияет на поглощение изгибных волн в низкочастотной области. При уменьшении скорости распространения продольных волн в слое в 10 раз максимум поглощения, соответствующий частоте совпадения изгибной волны в пластине и нормальной волны продольного типа в слое, практически не претерпел изменений. Однако слой, скорость продольных волн в котором меньше скорости звука в воде (штрихпунктирная кривая), дал существенное увеличение поглощения на более высоких частотах, связанное с резонансом объемной сжимаемости материала слоя и инерционного сопротивления жидкости.

Для экспериментального подтверждения наличия эффекта сильного поглощения вибрационной энергии в низкочастотной области слоем из резиноподобного материала, находящимся в воде вблизи вибрирующей пластины, были выполнены следующие измерения. На стальной пластине толщиной 0,8 см, соприкасающейся с водой, регистрировались уровни вибраций в определенных точках, находящихся на расстоянии 0,3–1,5 м от источника вибраций (молоточкового вибратора). Затем в воде под пластиной на расстоянии нескольких миллиметров от ее поверхности размещался слой резины толщиной 1,6 см и измерялись уровни вибраций в тех же точках. При сопоставлении результатов обоих измерений было обнаружено существенное падение уровней вибраций при размещении вблизи поверхности пластины слоя резины. Величина эффекта снижения вибраций возрастала по мере удаления точки измерения от источника. Для всех точек измерения максимум эффекта наблюдался на частоте ~500 Гц, вблизи которой скорость изгибной волны в пластине приблизительно равна скорости продольной волны в слое резины. На фиг. 5 приведена экспе-

риментальная кривая, полученная усреднением эффекта по трем точкам, находящимся на расстояниях 0,8; 1,1 и 1,4 м от источника вибраций.

В заключение сформулируем основные результаты настоящей работы. Теоретически исследован и подтвержден экспериментально эффект поглощения изгибных волн на низких частотах резиноподобным слоем, находящимся в воде вблизи колеблющейся пластины. Показано, что рассматриваемое низкочастотное поглощение изгибных волн определяется сдвиговой упругостью слоя, и максимум этого эффекта имеет место в районе частоты совпадения скоростей изгибной волны в пластине и нормальной волны продольного типа в резиноподобном слое. Положение на частотной оси максимума поглощения практически не зависит от объемной сжимаемости и толщины слоя. В отсутствие воды позади резиноподобного слоя эффект низкочастотного поглощения изгибных волн практически не реализуется.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Барабанов В. В., Сергеев Ю. Д.* О затухании изгибной волны, обусловленном взаимодействием слоя и жидкости, в пластине с мягким виброизолирующим покрытием.– В кн.: Вибропоглощающие материалы и покрытия и их применение в промышленности: Матер. к краткосрочному семинару. Л.: Ленинградский дом научно-технической пропаганды, 1976 с. 18–20.
2. *Барабанов В. В., Ляпунов В. Т.* О затухании изгибных волн в двухслойной пластине с ребрами жесткости.– В кн.: Сб. докл. IX Всес. акуст. конф. М., 1977, с. 111–114.

Поступила в редакцию
10.I.1980
После исправления
22.IX.1980