

УДК 534.1

РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ КОНЦЕНТРАТОРОВ  
С НЕЛИНЕЙНОЙ НАГРУЗКОЙ

*Асташев В. К.*

Рассмотрена теория ультразвукового концентратора, работающего на нелинейную упругодиссипативную нагрузку. Для процесса ультразвуковой обработки определены зависимости скорости резания, упругой и диссипативной составляющих нагрузки от параметров колебаний инструмента. Приведены примеры расчета экспоненциального и ступенчатого концентраторов.

Теория ультразвуковых концентраторов, предполагающая их идеальное согласование на холостом ходу, развита в работах [1, 2]. Ниже рассматривается стержневой концентратор, обладающий внутренними потерями. Сечение  $x=0$  концентратора связано с возбудителем колебаний, а в сечении  $x=l$  закреплен инструмент, взаимодействующий с обрабатываемым изделием или средой. Колебания сечения  $x$  концентратора мы будем описывать функцией

$$(1) \quad u_x(t) \approx a_x \exp j(\omega t - \varphi_x),$$

где  $a_x$ ,  $\omega$ ,  $\varphi_x$  — амплитуда, круговая частота и начальная фаза колебаний.

В технологических ультразвуковых процессах нагрузка на колебательную систему со стороны изделия носит, как правило, нелинейный характер и может быть представлена в виде силовой реакции

$$(2) \quad f_l(u_l) \approx [k(a_l) + j\omega\beta(a_l)] u_l.$$

Нелинейность нагрузки проявляется в том, что ее упругая  $k(a_l)$  и диссипативная  $\beta(a_l)$  составляющие оказываются зависящими от амплитуды колебаний инструмента. Такая зависимость неоднократно наблюдалась экспериментально [3].

Взаимное влияние концентратора и возбудителя колебаний будем оценивать силой, действующей в месте их стыка

$$(3) \quad f_0(t) \approx F_0 \exp j\omega t.$$

Движение концентратора определим с помощью величины динамической податливости  $L_s(x, j\omega)$ , связывающей перемещение  $u_x$  сечения  $x$  с реакциями (2), (3) и инерционной силой  $-M\omega^2 u_l$  от присоединенного инструмента, действующими в сечениях  $s=0, l$ :

$$(4) \quad u_x(t) = L_0(x, j\omega) F_0 e^{j\omega t} - L_l(x, j\omega) [k(a_l) - M\omega^2 + j\omega\beta(a_l)] u_l(t).$$

Выразив, согласно формуле (1), величины  $\exp j\omega t = u_l a_l^{-1} \exp j\varphi_l$ ,  $u_x = u_l a_x a_l^{-1} \exp j(\varphi_l - \varphi_x)$  и подставив их в уравнение (4), получим при  $x=0$  и  $x=l$

$$(5) \quad a_0 \left\{ 1 + \frac{a_l}{a_0} e^{j(\varphi_0 - \varphi_l)} L_l(0, j\omega) [k(a_l) - M\omega^2 + j\omega\beta(a_l)] \right\} = F_0 e^{j\varphi_0} L_0(0, j\omega),$$



$$(6) \quad a_l W(a_l, j\omega) = F_0 e^{j\varphi_l},$$

где  $W(a_l, j\omega) = \{1 + L_l(l, j\omega) [k(a_l) - M\omega^2 + j\omega\beta(a_l)]\} L_0^{-1}(l, j\omega)$ .

После разделения в формуле (6) действительной и мнимой составляющих найдем выражения для амплитуды  $a_l$  и фазы  $\varphi_l$  движения сечения  $x=l$  концентратора

$$(7) \quad a_l = F_0 |W(a_l, j\omega)|^{-1} = F_0 [(Re W)^2 + (Im W)^2]^{-1/2},$$

$$\cos \varphi_l = a_l F_0^{-1} Re W, \quad \sin \varphi_l = a_l F_0^{-1} Im W.$$

Введем обозначение для динамической жесткости

$$(8) \quad L_s^{-1}(x, j\omega) = U_s(x, \omega) + jV_s(x, \omega).$$

В дальнейшем величины  $V_s(x, \omega)$  и  $\beta(a_l)$ , характеризующие диссипативные потери в концентраторе и в нагрузке, полагаются малыми, и все вычисления ограничиваются малыми первого порядка. Уравнение (7) определяет амплитудно-частотную характеристику концентратора при действии на конце  $x=0$  гармонической силы (3). Максимальная амплитуда  $a_l$  достигается при условии  $Re W(a_l, j\omega) = 0$ , которое с учетом формулы (8) и равенства  $L_0(l, j\omega) = L_l(0, j\omega)$  приводится к виду

$$(9) \quad U_l(l, \omega) + k(a_l) - M\omega^2 = 0.$$

При этом, естественно, любая заданная амплитуда  $a_l$  обеспечивается минимальной силой  $F_0$ , и, следовательно, соотношение (9) является условием наилучшего согласования возбудителя колебаний с нагруженным концентратором. Исключая величину  $F_0$  из уравнений (5), (6) и принимая во внимание соотношения (8), (9), получим

$$(10) \quad K = a_l/a_0 = |U_l(0, \omega)/U_l(l, \omega)|.$$

По аналогии с работами [1, 2] величину  $K = a_l/a_0$ , характеризующую степень трансформации уровня колебания от возбудителя к инструменту, мы будем называть коэффициентом усиления концентратора. При заданной величине  $a_0$  соотношение (10) сразу определяет амплитуду рабочего торца концентратора, удовлетворяющего условию (9) наилучшего согласования под нагрузкой. Присоединение концентратора приводит к нагружению возбудителя. Пусть ненагруженный возбудитель совершает колебания  $u_0^*(t) = a_0^* \exp j(\omega t - \varphi)$ . Его движение под нагрузкой опишем следующим уравнением:

$$(11) \quad u_0(t) = u_0^*(t) - f_0(t)/W_{\Pi}(j\omega),$$

где  $W_{\Pi}(j\omega) = U_{\Pi}(\omega) + jV_{\Pi}(\omega)$  — динамическая жесткость возбудителя в точке присоединения концентратора.

С помощью соотношений (6), (8) — (10) величину реакции (3) представим в виде

$$(12) \quad f_0(t) = j[V_l(l, \omega) + \omega\beta(a_l)] K^2 u_0(t).$$

В ультразвуковых технологических установках в качестве возбудителей колебаний используются, как правило, резонансные электроакустические преобразователи. Условие их резонансной настройки имеет вид  $U_{\Pi}(\omega) = 0$ . Теперь для нагруженного преобразователя из (11), (12) имеем

$$(13) \quad u_0(t) = u_0^*(t) \left[ 1 + \frac{V_l(l, \omega) + \omega\beta(a_l)}{V_{\Pi}(\omega)} K^2 \right]^{-1}.$$

Отсюда следует, что присоединение согласованного концентратора не изменяет резонансной настройки преобразователя, а изменение уровня его колебаний определяется соотношением диссипативных параметров преобразователя, концентратора и нагрузки. Из соотношения (10) с учетом



формулы (13) находим амплитуду колебаний инструмента в рабочем режиме

$$(14) \quad a_l = a_0 \cdot K \left[ 1 + \frac{V_l(l, \omega) + \omega \beta(a_l)}{V_{\pi}(\omega)} K^2 \right]^{-1}.$$

Рассмотрим ситуацию, возникающую при ультразвуковом резании [4] хрупких материалов, когда происходит высокочастотное виброударное взаимодействие инструмента с изделием при их сжатии статической силой  $P$ . В работе [5] на основе реологической модели процесса резания получены следующие выражения для упругой и диссипативной составляющих нагрузки (2):

$$(15) \quad k(a_l) = \frac{D}{\pi a_l} \sin \frac{2\pi P}{D}, \quad \beta(a_l) = \frac{D}{\pi \omega a_l} \left( 1 - \cos \frac{2\pi P}{D} \right),$$

где  $D$  — величина, пропорциональная площади инструмента и зависящая от материала изделия и вида абразивной суспензии.

После подстановки выражения (15) в формулы (9) и (14) мы получаем систему уравнений

$$(16) \quad a_l = \frac{D \sin(2\pi P/D)}{\pi [M\omega^2 - U_l(l, \omega)]},$$

$$(17) \quad a_l = \left[ \frac{a_0 \cdot V_{\pi}(\omega)}{K} - \frac{D}{\pi} \left( 1 - \cos \frac{2\pi P}{D} \right) \right] \left[ V_l(l, \omega) + \frac{V_{\pi}(\omega)}{K^2} \right]^{-1},$$

решение которой определяет параметры и амплитуду колебаний концентратора, согласованного под нагрузкой.

Ниже даны примеры расчета наиболее распространенных типов ультразвуковых концентраторов. Динамическая податливость концентратора определяется путем нахождения решения вида  $u_x(t) = u(x, t) = L_l(x, j\omega) e^{j\omega t}$  уравнения продольных колебаний стержня переменного сечения

$$\rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \bar{E} \left[ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{S_x'}{S_x} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] = 0$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \bar{E} S_l \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = e^{j\omega t},$$

где  $\bar{E} = E(1 + j\psi/2\pi)$ ,  $E$ ,  $\rho$  — модуль упругости и плотность материала,  $\psi$  — коэффициент поглощения звука,  $S_x = S(x)$  — площадь стержня в сечении  $x$ ,  $S_x' = dS(x)/dx$ .

Рассматривая экспоненциальный концентратор  $S_x = S_0 \exp(2\gamma x/l)$ , где  $\gamma = 1/2 \ln(S_l/S_0)$ , получим

$$(18) \quad L_l(x, j\omega) = - \frac{\lambda l (e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}) + \gamma (e^{\lambda x} - e^{-\lambda x})}{\rho l S_0 \omega^2 (e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}) \exp[\gamma(1+x/l)]}$$

Здесь  $\lambda = j \frac{\omega}{c} \left[ 1 - \left( \frac{\gamma c}{l\omega} \right)^2 - j \frac{\psi}{2\pi} \right]^{1/2}$ ;  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  — скорость звука в

стержне. Полагая коэффициент поглощения  $\psi$  малым и ограничиваясь в формуле (18) линейными членами по малому параметру, найдем выражение для составляющих динамической жесткости (8)

$$(19) \quad U_l(x, \omega) = - \frac{E S_0 (\zeta^2 + \gamma^2) \exp[\gamma(1+x/l)]}{l \zeta \cos \zeta x/l + \gamma \sin \zeta x/l} \sin \zeta,$$



$$(20) \quad V_i(x, \omega) = \frac{\psi E S_0 (\zeta^2 + \gamma^2)^2 \exp[\gamma(1+x/l)]}{4\pi l \zeta \zeta \cos \zeta x/l + \gamma \sin \zeta x/l} \left[ \cos \zeta - \frac{(1+\gamma x/l) \cos \zeta x/l - (\zeta x/l) \sin \zeta x/l}{\zeta \cos \zeta x/l + \gamma \sin \zeta x/l} \cdot \sin \zeta \right],$$

где  $\zeta = \omega/c_\phi$ ;  $c_\phi = c[1 - (\gamma c/l\omega)^2]^{-1/2}$  — фазовая скорость звука в экспоненциальном волноводе.

С учетом формулы (19) соотношение (10) принимает вид

$$(21) \quad K = \left| \cos \zeta + \frac{\gamma}{\zeta} \sin \zeta \right| \sqrt{S_0/S_i}$$

Для свободного ненагруженного концентратора ( $M=0$ ,  $P=0$ ), согласно формуле (16), имеем  $U_i(l, \omega) = 0$ , что достигается при  $\zeta = \pi n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) и выражение (21) дает величину коэффициента усиления  $K_0 = \sqrt{S_0/S_i}$ , совпадающую с найденной в работе [1]. При этом, как видно из формулы (17), амплитуда колебаний на выходном конце концентратора определяется соотношением диссипативных потерь в преобразователе и концентраторе. Примем, что преобразователь представляет собой однородный стержень длины  $l_\Pi$  с сечением  $S_\Pi$ . Его динамическую жесткость при резонансной настройке найдем из формулы (20), положив  $\gamma=0$ ,  $x=l_\Pi$ ,  $\zeta=\pi$ :

$$(22) \quad V_\Pi = \omega \psi_\Pi w_\Pi / 4,$$

где  $w_\Pi = S_\Pi \sqrt{E_\Pi \rho_\Pi}$  — волновое сопротивление,  $E_\Pi$ ,  $\rho_\Pi$ ,  $\psi_\Pi$  — модуль упругости, плотность и

коэффициент поглощения материала преобразователя соответственно. В результате амплитуда колебаний ненагруженного концентратора, определяемая из формул (17), (20), (22), будет

$$(23) \quad a_i^* = a_0 \cdot K_0 \left[ 1 + \frac{\psi w_i K_0^2 (1 + \gamma^2/\pi^2 n^2)^{1/2}}{\psi_\Pi w_\Pi} \right]^{-1},$$

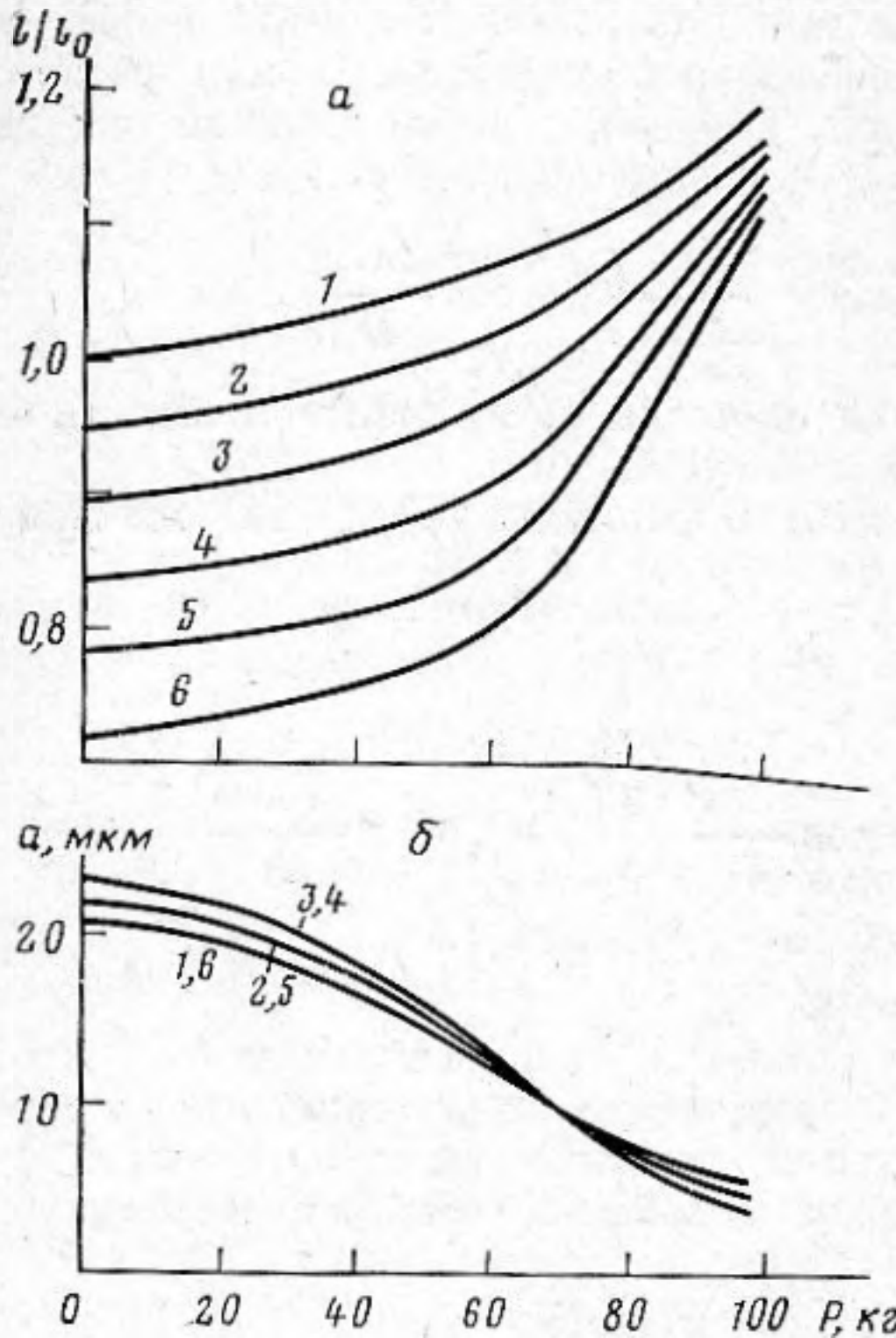
где  $w_i = S_i \sqrt{E \rho}$  — волновое сопротивление на выходном конце концентратора.

Параметры концентратора под нагрузкой находятся совместным решением уравнений (16) и (17); в результате определяются величины  $\zeta$  и  $a_i$  согласованного под нагрузкой концентратора. Его длина определяется затем по формуле

$$(24) \quad l = c\omega^{-1} \sqrt{\zeta^2 + \gamma^2},$$

которая при отсутствии нагрузки ( $\zeta = \pi n$ ) совпадает с полученной в [6].

На фиг. 1, а, б построены зависимости длины и амплитуды колебаний согласованного под нагрузкой концентратора от силы прижима при раз-



Фиг. 1. Зависимость длины (а) и амплитуды колебаний (б) экспоненциального концентратора от усилия прижима и массы инструмента: 1 —  $\mu=0$ , 2 —  $\mu=0,2$ , 3 —  $\mu=0,4$ , 4 —  $\mu=0,6$ , 5 —  $\mu=0,8$ , 6 —  $\mu=1$



личных значениях массы присоединенного инструмента ( $\mu = M\omega/w_1$ ). На фиг. 1, а величина  $l_0$  — длина свободного ненагруженного концентратора, определяемая по формуле (24) при  $\zeta = \pi$ . При расчете приняты следующие параметры системы:

$$f = \omega/2\pi = 20 \text{ кГц}, a_0^* = 7 \text{ мкм}, K_0 = 4, w_1 = 3,14 \text{ кг·с/см}, \\ w_n = 40,84 \text{ кг·с/см}, \psi = 0,01; \psi_n = 0,05; D = 5 \cdot 10^3 \text{ кг}.$$

Расчет концентраторов других типов выполняется аналогично. Однако в случае составного концентратора [2] его динамическую податливость целесообразно выразить через динамические податливости составляющих элементов. Рассмотрим, например, концентратор, составленный из двух ступеней длиной  $l_1$  и  $l_2$ . Расчленим концентратор по месту стыка ступеней, вводя координаты  $x_1 = x$  ( $x_1 \in [0, l_1]$ ) и  $x_2 = x - l_1$  ( $x_2 \in [0, l_2]$ ) и представляя взаимодействие частей реакцией  $f_{12}$ , напишем выражения для смещения под действием силы  $f_1(t)$ , действующей на выходном конце концентратора:

$$u_{1x_1} = f_{12} L_{1l_1}(x_1, j\omega), \\ u_{2x_2} = f_1 L_{2l_2}(x_2, j\omega) - f_{12} L_{20}(x_2, j\omega).$$

Отсюда с помощью соотношений  $u_x = f_1 L_l(x, j\omega)$ ,  $u_{1l_1} = u_{20}$  находим

$$(25) \quad L_l(0, j\omega) = \frac{L_{1l_1}(0, j\omega) L_{2l_2}(0, j\omega)}{L_{1l_1}(l_1, j\omega) + L_{20}(0, j\omega)}, \\ L_l(l, j\omega) = L_{2l_2}(l_2, j\omega) + \frac{L_{2l_2}^2(0, j\omega)}{L_{1l_1}(l_1, j\omega) + L_{20}(0, j\omega)}.$$

Для примера рассмотрим ступенчатый концентратор, составленный из двух цилиндрических стержней площадью  $S_1$  и  $S_2$ . Входящие сюда величины найдем из формул (19), (20) при  $\gamma = 0$ . В результате получим

$$(26) \quad L_l(0, j\omega) = -\frac{l_2}{ES_2 \zeta_2 \sin \zeta_1 \sin \zeta_2} \left( A_1 + j \frac{\psi}{4\pi} \Phi_1 \right)^{-1}, \\ L_l(l, j\omega) = -\frac{l_2}{ES_2 \zeta_2} A_2^2 \left( A_1 A_2 + j \frac{\psi}{4\pi} \Phi_2 \right)^{-1},$$

где  $A_1 = \text{ctg} \zeta_1 + (S_1/S_2) \text{ctg} \zeta_2$ ,  $A_2 = \text{ctg} \zeta_1 \text{ctg} \zeta_2 - S_1/S_2$ ,

$$\Phi_1 = \zeta_1 + \text{ctg} \zeta_1 (1 - \zeta_2 \text{ctg} \zeta_2) + (S_1/S_2) [\zeta_2 + \text{ctg} \zeta_2 (1 - \zeta_1 \text{ctg} \zeta_1)], \\ \Phi_2 = A_1 A_2 - \frac{S_1}{S_2} \frac{\zeta_1}{\sin^2 \zeta_1 \sin^2 \zeta_2} - \frac{\zeta_2}{\sin^2 \zeta_2} \left( \text{ctg}^2 \zeta_1 + \frac{S_1^2}{S_2^2} \right),$$

$$\zeta_i = \frac{\omega l_i}{c} \quad (i=1, 2),$$

и выражение для коэффициента усиления (10) принимает вид

$$(27) \quad K = |\cos \zeta_1 \cos \zeta_2 - (S_1/S_2) \sin \zeta_1 \sin \zeta_2|.$$

Для свободного ненагруженного концентратора ( $M=0$ ,  $P=0$ ) из формул (16), (26) мы получаем условия, определяющие собственные частоты ступенчатого концентратора  $S_2 \text{ctg} \zeta_1 = -S_1 \text{ctg} \zeta_2$ , и выражение (27) приводится к известному [2, 6]

$$K = \frac{S_1}{S_2} \left| \frac{\sin \zeta_1}{\sin \zeta_2} \right| = \frac{S_1}{S_2} \sqrt{\frac{1 + \text{ctg}^2 \zeta_2}{1 + (S_1/S_2)^2 \text{ctg}^2 \zeta_2}}.$$

Отсюда следует, что максимальным усилением  $K_0 = S_1/S_2$  обладает концентратор при  $\zeta_1 = \zeta_2 = \pi/2$ , т. е. имеющий ступени  $l_1 = l_2 = \pi c/2\omega$ .

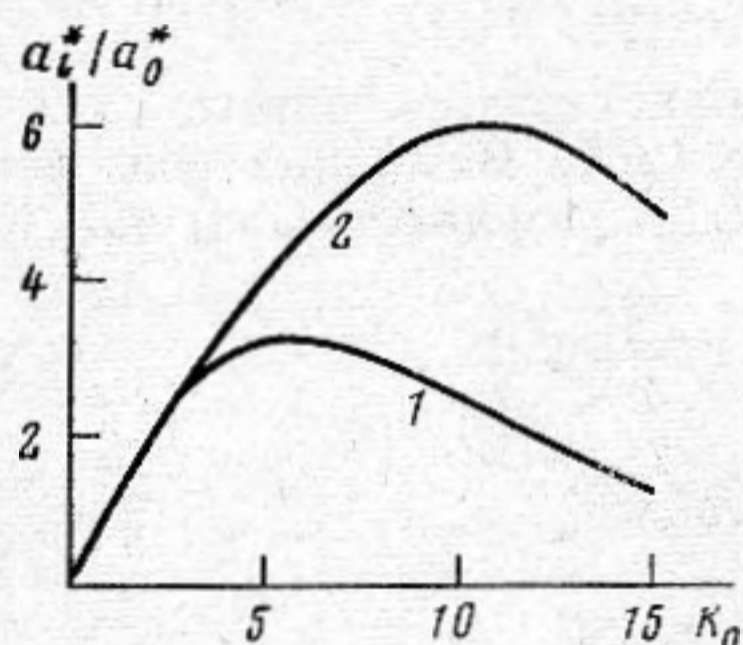


Из формул (14), (22), (27) определяется амплитуда колебаний ненагруженного концентратора

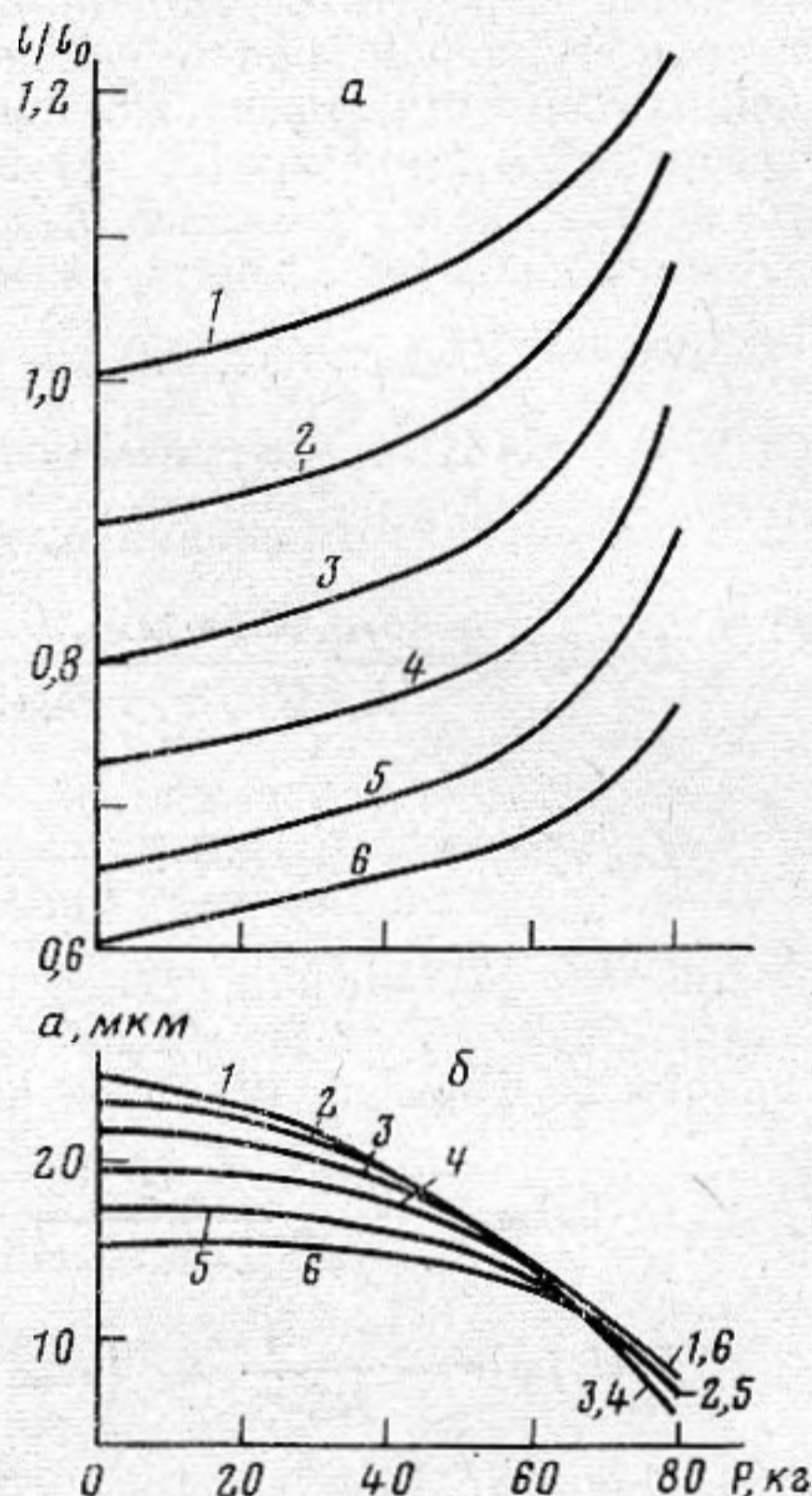
$$(28) \quad a_i^* = a_0^* K_0 \left[ 1 + \frac{\psi w_l K_0 (1 + K_0)}{2\psi_n w_n} \right]^{-1}.$$

На фиг. 2 по формулам (23) и (28) построены зависимости амплитуды  $a_i^*$  свободного торца экспоненциального (кривая 1) и ступенчатого (кривая 2) концентраторов от коэффициента усиления  $K_0$ . Отсюда видно существование коэффициента усиления, при котором амплитуда свободного торца максимальна. Максимальная амплитуда ступенчатого концентратора достигается при  $K_0 = (2\psi_n w_n / \psi w_l)^{1/2}$ .

Характеристики ступенчатого концентратора под нагрузкой находятся совместным решением уравнений (16) и (17). На фиг. 3, а, б приведены результаты расчета концентратора, составленного из стержней равной длины  $l_1 = l_2$  при различных значениях массы присоединенного инструмента. На фиг. 3, а



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Зависимость амплитуды экспоненциального (1) и ступенчатого (2) концентраторов от коэффициента усиления  $K_0$  при  $\psi_n w_n / \psi w_l = 65$

Фиг. 3. Зависимость длины (а) и амплитуды (б) ступенчатого концентратора от усилия прижима и массы инструмента: 1 —  $\mu = 0$ , 2 —  $\mu = 0,2$ , 3 —  $\mu = 0,4$ , 4 —  $\mu = 0,6$ , 5 —  $\mu = 0,8$ , 6 —  $\mu = 1$

величина  $l = 2l_1 = 2\xi_1 c / \omega$  — полная длина согласованного под нагрузкой,  $l_0 = \pi c / \omega$  — длина ненагруженного концентратора. Расчет произведен при тех же параметрах, что и на фиг. 1.

В заключение оценим эффективность согласования концентратора с возбудителем колебаний и технологической нагрузкой, используя соотношение, связывающее скорость  $v$  ультразвукового резания с основными параметрами процесса [5].

$$v = a_i f (1 - \cos 2\pi P / D),$$

где  $f = \omega / 2\pi$  — частота колебаний. На фиг. 4 приведены зависимости скорости резания от усилия прижима, построенные с помощью данных фиг. 1, б и 3, б.



Для сравнения найдем скорости  $V, \text{мм/мин}$  резания для традиционно применяемых концентраторов, рассчитанных на режим холостого хода. В работе [5] показано, что в этом случае максимальная скорость резания

$$(29) \quad v_0 = 0,3 a_i^3 \omega (V_0/D)^2$$

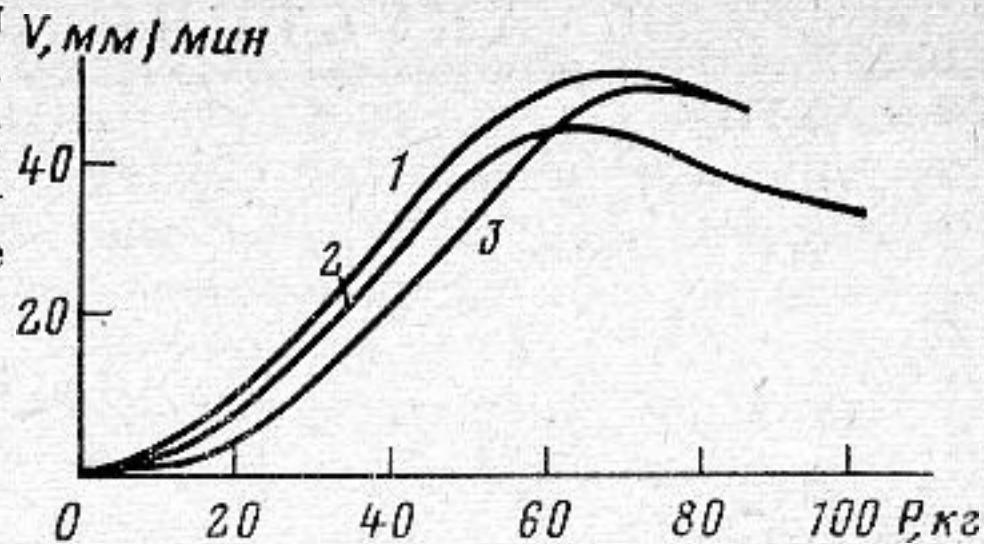
достигается при силе прижима

$$(30) \quad P_0 = a_i V_0 / \sqrt{6},$$

где

$$V_0 = V_l(l, \omega) + V_n(\omega) / K_0^2.$$

Для системы с принятыми ранее параметрами с экспоненциальным концентратором  $V_0 = 5290 \text{ кг/см}$ , а со ступенчатым концентратором  $V_0 = 4630 \text{ кг/см}$ , и расчет по формулам (29), (30) дает соответственно  $P_0 = 4,58 \text{ кг}$ ,  $v_0 = 0,24 \text{ мм/мин}$  и  $P_0 = 4,66 \text{ кг}$ ,  $v_0 = 0,28 \text{ мм/мин}$ . Эти величины, так же как и принятые при расчетах исходные данные, соответствуют серийно выпускаемому ультразвуковому станку 4770.



Фиг. 4. Зависимость скорости ультразвукового резания от усилия прижима для ступенчатого (1, 2) и экспоненциального (3) концентраторов: 1 —  $\mu=0$ , 2 —  $\mu=1$ , 3 —  $\mu=0,2$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Меркулов Л. Г. Расчет ультразвуковых концентраторов.— Акуст. ж., 1957, т. 3, № 3, с. 231—238.
2. Меркулов Л. Г., Харитонов А. В. Теория и расчет составных концентраторов.— Акуст. ж., 1959, т. 5, № 2, с. 183—190.
3. Ганева Л. И., Голямина И. П., Марголин В. С. Механическое сопротивление нагрузки при ультразвуковом резании хрупких материалов.— Акуст. ж., 1973, т. 19, № 4, с. 524—530.
4. Розенберг Л. Д., Казанцев В. Ф., Макаров Л. О., Яхимович Д. Ф. Ультразвуковое резание. М.: Изд-во АН СССР, 1962, с. 251.
5. Асташев В. К. О влиянии ультразвука на процессы механической обработки.— В кн.: Прочность и пластичность материалов в ультразвуковом поле. Тез. докл. III Всес. научно-техн. конф. Алма-Ата, 1980, с. 59—61.
6. Теумин И. И. Ультразвуковые колебательные системы. М.: Машгиз, 1959, с. 331.

Институт машиноведения  
им. А. А. Благонравова  
Академии наук СССР

Поступила в редакцию  
15.IX.1980