

УДК 534.14

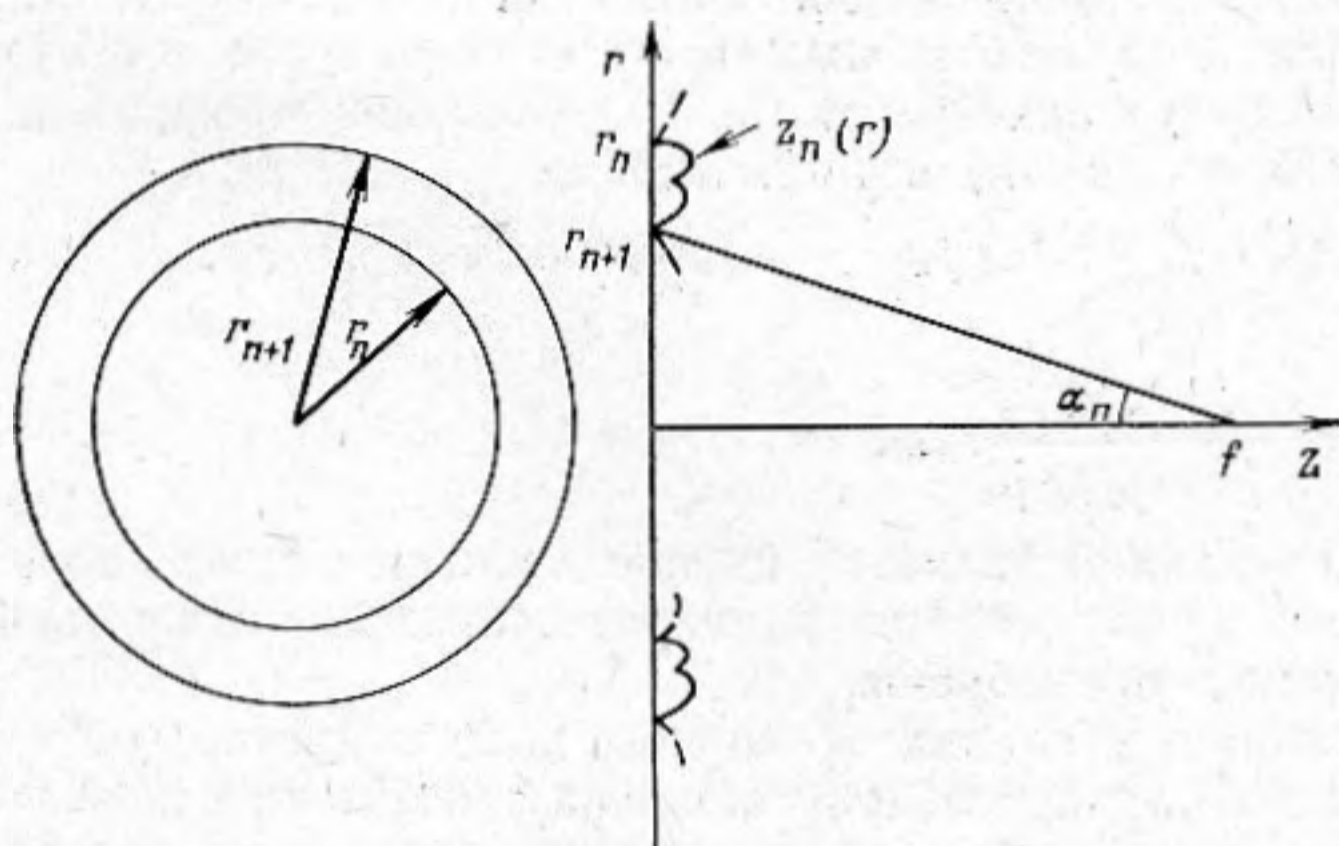
ТЕОРИЯ ПРОФИЛИРОВАННОЙ ЗОННОЙ ПЛАСТИНКИ

Верещагин В. В., Лопатин А. И.

На основании расчета поля акустической волны вблизи фокуса профилированной отражательной зонной пластинки показано, что она может быть использована в качестве концентратора звука, собирающего в фокальном пятне до 90% энергии падающей волны.

Теория акустической зонной пластинки, состоящей из чередующихся прозрачных и непрозрачных колец, построена в работе [1] и экспериментально проверена в работе [2], подтвердившей теоретические расчеты (см. также работы [3, 4]). Оценки параметров фокального пятна и сравнение свойств зонной пластинки со свойствами линзы (в оптической области) были выполнены в работах [5, 6].

Рассмотренные в работах [1-6] зонные пластинки обладают тем недостатком, что доля энергии Q_f , собирающейся в фокальном пятне, составляет лишь около 10% от всей энергии Q , падающей на пластинку.



Фиг. 1. Две проекции фрагмента профилированной зонной пластинки

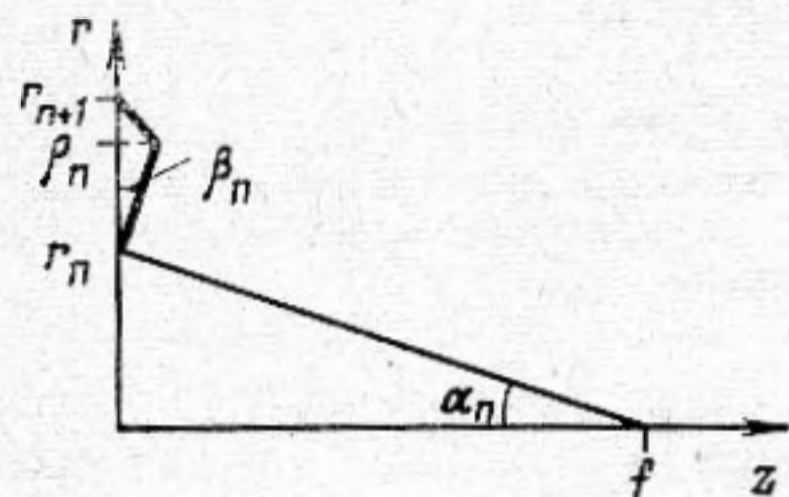
Причины столь малого значения параметра $\kappa = Q_f/Q$ таковы: а) половина энергии падающей на пластинку звуковой волны поглощается закрытыми зонами; б) профиль открытых зон не обеспечивает максимально возможной концентрации энергии в фокусе. Поскольку, как отмечено в работе [4], основным фактором, препятствующим широкому применению зонных пластинок в качестве концентраторов звука, является малое значение параметра κ , то имеет смысл изучить возможности увеличения последнего.

Первая из указанных выше причин малости величины κ устраняется при использовании предложенной Р. Вудом пластинки, у которой непрозрачные участки заменены зонами, обращающими фазу. Для устранения причины второй необходимо придать каждой зоне профиль, обеспечиваю-

щей максимальную концентрацию энергии в фокальном пятне. Кроме того, целесообразно использовать отражающие зонные пластинки. Это позволит избежать свойственных рефракторам дополнительных потерь, связанных как с нагреванием материала рефрактора, весьма значительным, например, в случае плексигласа [7], так и с отражениями на его поверхностях (в особенности на границах с воздухом).

Еще одной причиной, побудившей нас рассмотреть в первую очередь теорию отражательных зонных пластинок, является возможность использования их в качестве излучателей, создающих мощное звуковое поле в фокальной области.

Рассмотрим отражательную зонную пластинку со штрихами произвольного осесимметричного профиля (фиг. 1), на которую параллельно акустической оси падает излучение с длиной волны λ . В нашем случае акустическая ось совпадает с осью z цилиндрической системы координат r, φ, z . Радиус n -го штриха, которому соответствует угол раскрытия α_n , определяется по формуле (здесь и далее все размерные величины приведены в единицах λ)



Фиг. 2. Оптимальная форма профиля штриха

$$r_n^2 = 2fn + n^2,$$

где f — фокусное расстояние ($f \gg 1$), которое, как и λ , является параметром данной зонной пластинки. При этом $R_n = f + n$.

Пусть профиль штриха (зоны) описывается уравнением $z = z_n(r)$ при $r_n \leq r \leq r_{n+1}$.

Элементарные соображения подсказывают, что для максимальной концентрации энергии в фокусе необходимо придать штрихам форму, изображенную на фиг. 2 (эта возможность отмечалась в работе [8]). При этом, если соблюдается условие $\beta_n = \alpha_n/2$, то уравнение профиля штриха (точнее, «полезной» его части) принимает вид

$$(1) \quad z_n(r) = (r - r_n) \operatorname{tg} \beta_n \quad (r_n \leq r \leq \rho_n),$$

где

$$\rho_n = \frac{f + r_n \operatorname{tg} \beta_n}{f + r_{n+1} \operatorname{tg} \beta_n} r_{n+1}.$$

Разумеется, идеальной является параболическая форма «полезной» части штриха, однако в силу малости размеров последнего отклонением от параболическости можно пренебречь.

При описанных условиях отношение доли энергии, приходящей в фокальную область, к энергии, падающей на зонную пластинку, определяется отношением суммы площадей проекций «полезных» частей зон к площади всей пластинки, т. е.

$$\kappa \approx \frac{1}{\pi r_N^2} \sum_{n=0}^N \pi (\rho_n^2 - r_n^2),$$

где N — общее число штрихов ЗП.

Для оценки величины параметра κ заметим, что, поскольку $\operatorname{tg} \alpha_n = r_n/f$, то $\operatorname{tg} \beta_n = n/r_n$ и, следовательно,

$$\rho_n = r_{n+1} (f + n) / \left(f + \frac{r_{n+1}}{r_n} n \right).$$

Отсюда получаем

$$\rho_n^2 - r_n^2 \approx 2f$$

и, таким образом,

$$\kappa \approx \frac{2}{2+N/f}.$$

Итак, для получения значений $\kappa \geq 0,9$ следует использовать зонные пластинки, обладающие малой величиной параметра $\nu = N/f \leq 0,2$, что соответствует углам раскрытия $\alpha_N \leq 30^\circ$. Пластинки, удовлетворяющие этому условию, мы будем называть длиннофокусными. Заметим, что в теории концентраторов звука возникают аналогичные ограничения на углы раскрытия (см., например, работы [3, 4]). Ниже мы рассматриваем только длиннофокусные зонные пластинки ($\alpha_N \leq 30^\circ$) с достаточно большим числом зон ($N \gg 2$).

Рассмотрим плоскую волну с единичной амплитудой давления

$$(2) \quad P = \exp(ikz),$$

где $k=2\pi/\lambda$, а z , как и все размерные величины, выражена в единицах λ . Пусть эта волна падает на зонную пластинку параллельно акустической оси (временной фактор $\exp(i\omega t)$ в (2) и далее опускаем; форму профиля штриха $z_m(r)$ не фиксируем). В точке наблюдения S_0 с координатами r_0, φ_0, z_0 поле отраженной от m -го штриха волны в приближении Кирхгофа (правомерность использования коего в рассматриваемой задаче показана ниже) представляется в виде

$$(3) \quad P_m(S_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_m} d\sigma \frac{e^{-ikd}}{d} \frac{\partial}{\partial n} e^{ikz},$$

где σ_m — поверхность штриха, n — вектор нормали, а

$$d = \sqrt{[z_0 - z_m(r)]^2 + r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}.$$

Учитывая, что мера на поверхности штриха есть

$$d\sigma_m = \sqrt{1 + [z_m'(r)]^2} r dr d\varphi,$$

и вычисляя нормальную производную, получаем

$$(4) \quad P_m(S_0) = -\frac{i}{\lambda} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_m}^{r_{m+1}} r dr \frac{e^{ik(z-d)}}{d}.$$

Поскольку размеры зон малы, а все рассмотрение проводится в парааксиальной области, то в показателе экспоненты в формуле (4) можно ограничиться линейными членами разложения d в ряд по $z_m, (r-r_m)$ и r_0 , а в знаменателе оставить лишь нулевой член, что дает

$$(5) \quad P_m(S_0) = -ik\psi_m \exp(-ikd_m) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ ikr_0 \frac{r_{m1}}{d_m} \cos(\varphi - \varphi_0) \right\} d\varphi,$$

где

$$(6) \quad d_m = \sqrt{z_0^2 + r_m^2},$$

а

$$(7) \quad \psi_m = \frac{1}{d_m} \int_{r_m}^{r_{m+1}} r dr \exp \left\{ ik \left[\frac{r_m}{d_m} (r - r_m) - \left(1 + \frac{r_m}{d_m} \right) z_m(r) \right] \right\}.$$

Используя интегральное представление функций Бесселя, можно написать формулу (5) в виде

$$(8) \quad P_m(S_0) = -ik\psi_m \exp(ikd_m) J_0 \left(kr_0 \frac{r_m}{d_m} \right).$$

Полное поле отраженной волны получается в результате суммирования вкладов всех зон

$$(9) \quad P(S_0) = \sum_{n=0}^N P_n(S_0).$$

Формулы (6)–(9) позволяют рассчитать поле отраженной от профилированной зонной пластины волны в параксиальной области при заданной форме профиля штриха $z_m(r)$. Они справедливы при $r_0 \ll \sqrt{2f}$.

Как и следовало ожидать, выбор профиля зоны в виде (1) обеспечивает максимальный вклад каждой зоны в фокусе ($z_0=f$), так как при этом показатель экспоненты в формуле (7) есть нуль, а $\psi_m \approx 1$. В дальнейшем мы предполагаем, что форма профиля зоны имеет вид (1).

Для описания поля вблизи фокуса ($z_0 \sim f$) удобно ввести новую координату $\xi = z_0 - f$, определяющую отклонение точки наблюдения от фокальной плоскости, и, считая ξ малым параметром, разложить d_m в ряд, по-прежнему ограничившись линейными членами в показателе экспоненты и нулевыми в остальных частях формулы (8). Тогда

$$(10) \quad P_m(S_0) = -ik \exp(-ikf) \exp\left(-ik\xi \frac{f}{R_m}\right) J_0\left(kr_0 \frac{r_m}{R_m}\right).$$

Это представление справедливо при $r_0, |\xi| \ll \sqrt{2f}$; оно позволяет (совместно с формулой (9)) вычислять поле в окрестности фокуса.

Рассмотрим вопрос о применимости приближения Кирхгофа в данной задаче. Нетрудно показать, что ширина крайней зоны описывается формулой

$$\delta = r_N - r_{N-1} \approx \frac{1+v}{\sqrt{2v}}.$$

Поскольку $v \leq 0,2$, то $\delta \geq 2$, следовательно, характеристический параметр $k\delta$ велик: $k\delta \geq 12$. Ограничение же $r_0 \ll \sqrt{2f}$ показывает, что рассматриваемые в задаче углы дифракции ϑ_d (т. е. отклонения лучей от направления, даваемого геометрическими законами отражения) малы: $\vartheta_d \ll \sqrt{2/f}$. Поскольку $N \gg 2$, а $v \leq 0,2$, то $f \gg 10$ и, следовательно, $\vartheta_d \ll 30^\circ$. Таким образом, в соответствии с результатами работ [3, 9–12] можно утверждать, что приближение Кирхгофа в данном случае дает практически точный ответ.

Для иллюстрации результатов приведем полученные с помощью ЭВМ БЭСМ-6 по формулам (9) и (10) распределения интенсивности (плотности потока энергии)

$$(11) \quad U(S_0) = |\sum P_n(S_0)|^2$$

для зонной пластины с числом штрихов $N=10$ и фокусным расстоянием $f=50$, что соответствует ширине крайней зоны $\delta \approx 2$.

На фиг. 3 представлено распределение вдоль акустической оси ($r_0=0$). Распределения интенсивности в плоскостях, ортогональных оси, при различных значениях ξ представлены на фиг. 4.

Кроме того, были рассчитаны распределения в фокальной плоскости для различных значений f , причем одновременно определялась доля энергии, собираемой в пределах главного максимума. Как и следовало ожидать, величина этой доли не зависит от f и составляет приблизительно 71%.

Поскольку время, затрачиваемое ЭВМ на вычисления по формулам (9)–(11), линейно растет с увеличением числа зон, то имеет смысл получение приближенных выражений для поля в фокальной области, справедливых при больших значениях N (для ЭВМ класса М-4030 таковыми