

УДК 534.232

О РАБОТЕ ПЛОСКОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО
ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ В ИМПУЛЬСНОМ РЕЖИМЕ*Гитис М. Б., Шенкер А. А.*

Рассмотрен режим излучения и приема импульсных сигналов плоской пьезопластиной. Отыскание оригинала преобразования Лапласа сведено к решению интегрального уравнения Вольтера II рода с разностным ядром на полуоси. Решение записано в виде ряда Неймана по квадрату коэффициента электромеханической связи.

В экспериментальной акустике широкое распространение получил импульсный режим работы пьезопреобразователей. Наиболее точные и простые в реализации методы измерения скорости и коэффициента импульсов. Импульсный режим оказался эффективным и в приложениях — ультразвуковой дефектоскопии, толщинометрии, медицинской диагностике и т. д.

Стремление управлять амплитудой и формой упругих импульсов, используемых в измерениях, привело к введению разнообразных электрических схем, подключаемых параллельно либо последовательно к пьезопреобразователю. Так как в качестве материала, осуществляющего преобразование электрической энергии в упругую и наоборот, наиболее широко используется пьезоэлектрическая керамика с большим коэффициентом электромеханической связи, то анализ работы пьезопреобразователей требует совместного учета и взаимного влияния процессов, происходящих в акустических и электрических цепях. Такая связанность процессов сильно усложняет их теоретический анализ в гармоническом и особенно в импульсном режимах.

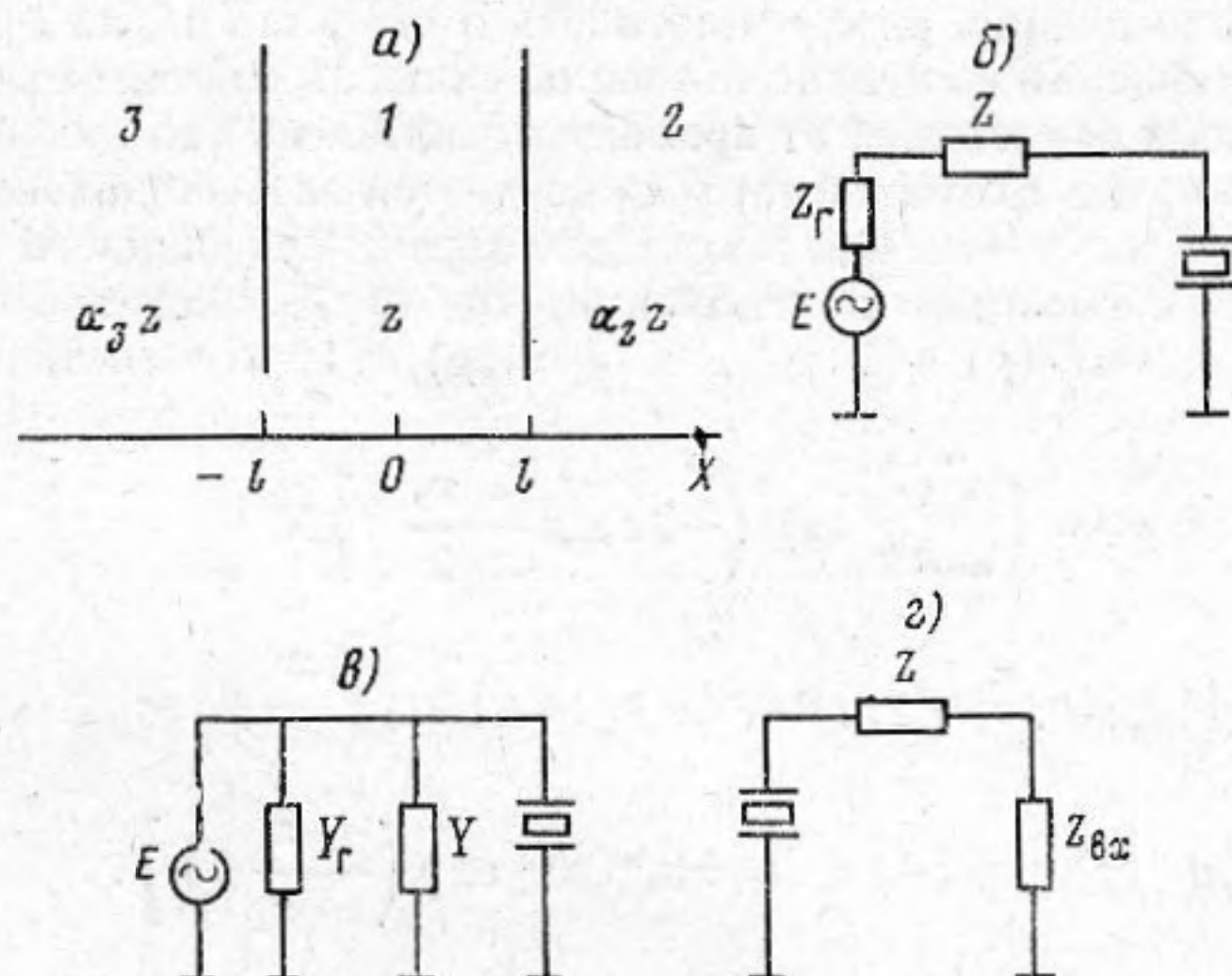
В импульсном режиме даже в случае плоского одномерного пьезопреобразователя удастся получить решения в элементарных функциях только в приближении слабой электромеханической связи [1, 2] либо для бесконечного импеданса электрической нагрузки (холостой ход) [3]. Физически оба приближения означают исключение из рассмотрения влияния электрической нагрузки на процессы многократных отражений упругих волн внутри пьезопластины преобразователя.

Анализ пьезопреобразователей, работающих в импульсном режиме с произвольными коэффициентами связи и электрическими нагрузками, требует применения машинных методов расчета.

К настоящему времени разработано два подхода к решению этой задачи. Один из них [4, 5] базируется на нахождении нормальных мод колебаний по толщине пьезоэлектрической пластины, нагруженной электрически и акустически. Реакция преобразователя на импульсное воздействие ищется затем в виде суммы по этим модам колебаний, что требует использования ЭВМ.

Другой подход, предложенный в работе [6], основан на использовании временного преобразования Лапласа исходной системы уравнений для пьезоэлектрической среды с учетом электрической нагрузки. Затем изобра-

жения для коэффициентов преобразования электрической энергии в упругую, и наоборот, представляются в виде суммы m слагаемых, получаемых почленным делением числителя на знаменатель. Каждое слагаемое суммы содержит множитель $\exp(-m\tau)$, т. е. их включение сдвинуто относительно момента начала возбуждения на $m\tau$ ($\tau=2l/c_1$, где $2l$ — толщина пьезопластины, c_1 — скорость звука в пьезопластине). Такое представление является точным в интервале времен $0 \leq t \leq m\tau$, однако, поскольку эта процедура не разложение в ряд, ничего определенного о поведении $(m+1)$ -го



Фиг. 1. а — Акустическая схема включения пьезопластины; б и в — электрические схемы включения пьезопластины в режиме излучения; г — электрическая схема включения пьезопластины в режиме приема

члена сказать нельзя и неизвестно, где суммирование может быть прекращено. С ростом m вычислительные трудности резко возрастают и уже для $m > 2$ необходимо использование ЭВМ.

С идейной точки зрения оба подхода равноценны и предпочтительность одного из них определяется условиями использования пьезопреобразователя, сложностями программирования и машинным временем.

Представляется целесообразным рассмотреть другой способ описания одномерного плоского пьезопреобразователя, позволяющий свести задачу излучения и приема импульсных сигналов к решению хорошо исследованного интегрального уравнения Вольтерра II рода с разностным ядром, встречающегося во многих приложениях и относящегося к классу задач, обладающих свойствами устойчивости [7]. Это дает возможность использовать численные методы решения, основанные на замене интеграла конечной суммой с помощью квадратурной формулы, с оцениваемой точностью аппроксимации. Последняя определяется шагом разбиения.

Рассмотрим режим излучения плоской пьезопластины, нагруженной на две полубесконечные среды, одна из которых (3) — демпфер, а другая (2) — акустическая нагрузка (фиг. 1, а). Электрическая схема включения изображена на фиг. 1, б и в. Электрическая нагрузка Z представляет собой электрические корректирующие цепи, а Z_r — выходной импеданс генератора. Для определенности ниже будем рассматривать схему включения, изображенную на фиг. 1, б. Кроме того, ограничимся случаем, когда поперечные размеры пьезопластины значительно превышают ее толщину и все границы — плоские, т. е. ограничимся одномерным случаем. Решение задачи на излучение (прием) в общем случае сводится к совместному решению уравнений движения и пьезоэффекта с учетом граничных условий и электрической нагрузки. Однако мы не будем производить этих громоздких вычис-

лений, а воспользуемся результатами работы [8], в которой механическое напряжение σ , развиваемое одной из граней пьезопластины, выражено через вектор электрической индукции D

$$(1) \quad \sigma_i^n = eD(t)/\varepsilon(1+\alpha_i), \quad \sigma_i^n = -e\alpha_i D(t)/\varepsilon(1+\alpha_i),$$

где σ_i^n и σ_i^n — механические напряжения, развиваемые гранью пьезопластины внутри пластины и вне ее соответственно; e , ε — пьезоконстанта и диэлектрическая проницаемость пьезопластины, $\alpha_i = z_i/z_1$ ($i=2, 3$), $z_i = \rho_i v_i$ — акустический импеданс, ρ_i , v_i — плотность и скорость звука i -й среды, $z_1 = \rho_1 v_1$ — акустический импеданс пьезопластины. Применим преобразование Лапласа ко всем зависящим от времени величинам. Так как механическое напряжение внутри пьезопластины σ_1 создается за счет колебаний каждой грани при $x=l$ и $x=-l$ и многократных отражений каждого из сигналов, а изображениями исходных сигналов внутри пьезопластины являются, согласно (1), $\sigma_2^n = eD(p)/\varepsilon(1+\alpha_2)$, $\sigma_3^n = eD(p)/\varepsilon(1+\alpha_3)$ соответственно, то

$$(2) \quad \sigma_1(x, p) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} q^n \exp\left(-2\tau n p - \frac{\tau p}{2}\right) \right\} \times \\ \times \left\{ [\sigma_2^n(p) + \sigma_3^n(p) \exp(-p\tau) R_{12}] \exp\left(\frac{x}{v_1} p\right) + \right. \\ \left. + [\sigma_2^n(p) \exp(-p\tau) R_{13} + \sigma_3^n(p)] \exp\left(-\frac{x}{v_1} p\right) \right\},$$

где R_{12} и R_{13} — коэффициенты отражения на границах пьезопластины со средами 2 и 3, $q = R_{12}R_{13}$, $\tau = 2l/v_1$.

Изображение по Лапласу электрического напряжения на пьезопластине $U(p)$ находится интегрированием по координате уравнения пьезоэффекта

$$(3) \quad U(p) = \frac{2lD(p)}{\varepsilon^\sigma} - \frac{e}{\varepsilon^\sigma c} \int_{-l}^l \sigma_1(x, p) dx,$$

а также из электрической схемы на фиг. 1, б

$$(4) \quad U(p) = E(p) - I(p)Z(p) = E(p) - pD(p)Z(p)F.$$

Здесь ε^σ , c — диэлектрическая проницаемость при постоянном механическом напряжении и упругий модуль соответственно, F — площадь пьезопластины, $E(p)$, $I(p)$ — изображение э.д.с. и тока в цепи возбуждения пьезопластины.

Выражая $D(p)$ из уравнений (2) — (4), находим:

$$(5) \quad D(p) = \frac{\varepsilon^\sigma}{2l} E(p) \left\{ 1 + pC^\sigma Z(p) - (K\beta^2/p\tau) \times \right. \\ \left. \times [1 - \exp(-p\tau)] [1 + \gamma \exp(-p\tau)] \sum_{n=0}^{\infty} q^n \exp(-2p\tau n) \right\}^{-1}.$$

Здесь введены следующие обозначения: $C^\sigma = \varepsilon^\sigma F/2l$ — емкость пьезопластины, $\beta = \sqrt{e^2/\varepsilon^\sigma c}$ — коэффициент электромеханической связи,

$$K = \frac{2 + \alpha_2 + \alpha_3}{(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_3)}, \quad \gamma = \frac{R_{12}(1 + \alpha_2) + R_{13}(1 + \alpha_3)}{2 + \alpha_2 + \alpha_3}$$

Из выражений (5) и (1) может быть найдено механическое напряжение, развиваемое пьезопластиной в демпфере σ_d и акустической нагрузке σ_n :

$$(6) \quad \sigma_n = -\frac{e\alpha_2 D(p)}{\varepsilon^\sigma (1+\alpha_2)} + \frac{eR_{13}\theta_{12} D(p) \exp(-2p\tau)}{\varepsilon^\sigma (1+\alpha_2)} \sum_{n=0}^{\infty} q^n \exp(-2pn\tau) + \\ + \frac{e\theta_{12} D(p) \exp(-p\tau)}{\varepsilon^\sigma (1+\alpha_3)} \sum_{n=0}^{\infty} q^n \exp(-2pn\tau).$$

Здесь θ_{11} — коэффициент прозрачности соответствующей границы раздела. Таким образом, как обычно, задача свелась к отысканию обратного преобразования Лапласа. Решение этой задачи может быть сведено к решению интегрального уравнения. Для этого преобразуем (5) к виду

$$(7) \quad D(p) - K\beta^2 \frac{[1 - \exp(-p\tau)][1 + \gamma \exp(-\tau p)] D(p)}{p\tau [1 + pC^\sigma Z(p)]} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} q^n \exp(-2pn\tau) = \frac{\varepsilon^\sigma E(p)}{2l [1 + pC^\sigma Z(p)]}$$

и перейдем к оригиналам, воспользовавшись теоремой о свертке двух функций

$$(8) \quad D(t) - K\beta^2 \int_0^t \varphi(t-u) D(u) du = f(t),$$

где $f(t)] \frac{\varepsilon^\sigma E(p)}{2l [1 + pC^\sigma Z(p)]}$;

$$\varphi(t)] \frac{[1 - \exp(-p\tau)][1 + \gamma \exp(-p\tau)]}{p\tau [1 + pC^\sigma Z(p)]} \sum_{n=0}^{\infty} q^n \exp(-2pn\tau),$$

символ $]$ обозначает преобразование Лапласа. Уравнение (8) представляет собой интегральное уравнение Вольтера II рода с разностным ядром.

Легко показать, что при использовании для возбуждения пьезопластины электрической схемы вида 1, ε все приведенные соотношения сохраняются, но в них необходимо заменить $E(p)$ на $E(p) Y_r(p) / (Y_r(p) + Y(p))$ и $Z(p)$ на $1 / (Y(p) + Y_r(p))$, где $Y_r(p)$ и $Y(p)$ — изображения проводимостей источника напряжения и корректирующих цепей.

При использовании пьезопластины в режиме приема (фиг. 1, z) необходимо учесть, что в качестве вынуждающей силы выступает падающая из акустической нагрузки упругая волна $g_0(p)$, а развиваемое пьезопластиной электрическое напряжение имеет изображение

$$(9) \quad U(p) = pD(p)Z(p)F.$$

Иными словами, как и в режиме излучения, задача сводится к отысканию явного вида $D(p)$ и совершению обратного преобразования Лапласа. Механическое напряжение внутри пьезопластины в этом случае создается падающей волной, прошедшей в пьезопластину и многократными отражениями. Поэтому в (2) необходимо добавить слагаемое

$$(10) \quad \sigma'(x, p) = g_0(p) \theta_{21} \sum_{n=0}^{\infty} q^n \exp(-2pn\tau) \exp(-p\tau/2) \times \\ \times \{ \exp(xp/v_1) + R_{13} \exp(-xp/v_1) \}.$$

Вычисления, аналогичные выполненным для режима излучения, сводят задачу к решению уравнения (8), в котором роль $f(t)$ играет функция $f_1(t)$, равная

$$f_1(t) = \frac{e}{c} g_0(p) \frac{[1 - \exp(-p\tau)][1 + R_{13} \exp(-p\tau)] \theta_{21}}{p\tau[1 + pC^0 Z(p)]} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} q^n \exp(-2pn\tau).$$

Нахождение явных выражений для $f(t)$, $f_1(t)$ и $\varphi(t)$ не вызывает затруднений и может быть выполнено с помощью теоремы о вычетах. Уравнение (8) в общем случае решается численно [9].

В некоторых частных случаях удобен аналитический метод решения, основанный на разложении искомой функции в ряд Неймана по итерированным ядрам. В теории интегральных уравнений показано, что метод итераций для уравнений типа (8) сходится для любых значений параметра $\lambda = K\beta^2$, кроме $\lambda \rightarrow \infty$ [10].

Общее решение записывается в виде

$$(11) \quad D(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \int_0^t \varphi_k(t-u) f(u) du,$$

где $\varphi_1(t-u) = \varphi(t-u)$,

$$\varphi_k(t-u) = \int_0^t \varphi_{k-1}(t-w) \varphi(w-u) dw.$$

Иными словами, решение в виде (11) дает разложение реакции пьезопластины в режимах излучения и приема в ряд по степеням квадрата коэффициента электромеханической связи. Поскольку для наиболее широко применяемых пьезокерамических материалов (типа ЦТС) коэффициент связи не превышает $0,4 \div 0,5$, то в приложениях бывает достаточно учесть только линейные по λ слагаемые.

Проиллюстрируем возможности полученных соотношений на частном случае, представляющем большой практический интерес. В последние годы для формирования коротких акустических импульсов используют толстые пьезоэлектрические пластины (стержни), длина которых значительно превышает пространственную протяженность импульса [11].

Это позволяет наблюдать сигналы от каждой грани отдельно, а процесс излучения является полностью апериодическим. Апериодичность процесса породила мнение о том, что такое возбуждение позволяет добиться идентичности акустических и возбуждающих электрических сигналов и формировать импульсы наносекундной длительности. Однако учет конечности электрического сопротивления генератора и коэффициента электромеханической связи показывает, что такая идентичность отсутствует, даже при использовании полностью согласованного демпфера ($\alpha_3 = 1$). Вычислим импульс механического напряжения, создаваемый в акустической нагрузке такой пьезопластиной при возбуждении электрическим генератором с сопротивлением R_r (электрические корректирующие цепи отсутствуют).

Примем возбуждающий электрический сигнал в виде $E(t) = E_0 vt \exp(-vt)$. Ограничиваясь для простоты только линейными по коэффициенту электромеханической связи членами, с учетом $\alpha_3 = 1$ имеем

уравнение для электрической индукции

$$(12) \quad D(p) = K\beta^2 \frac{[1 - \exp(-p\tau)][1 + \gamma \exp(-p\tau)]D(p)}{p^2[1 + pT]} =$$

$$= \frac{\varepsilon^\sigma}{2l} \frac{v}{(p+v)^2(1+pT)}$$

где $T = R_r C^\sigma$. Соответственно уравнение (8) переписывается как

$$D(t) = K\beta^2 \int_0^t D(u) \varphi(t-u) du -$$

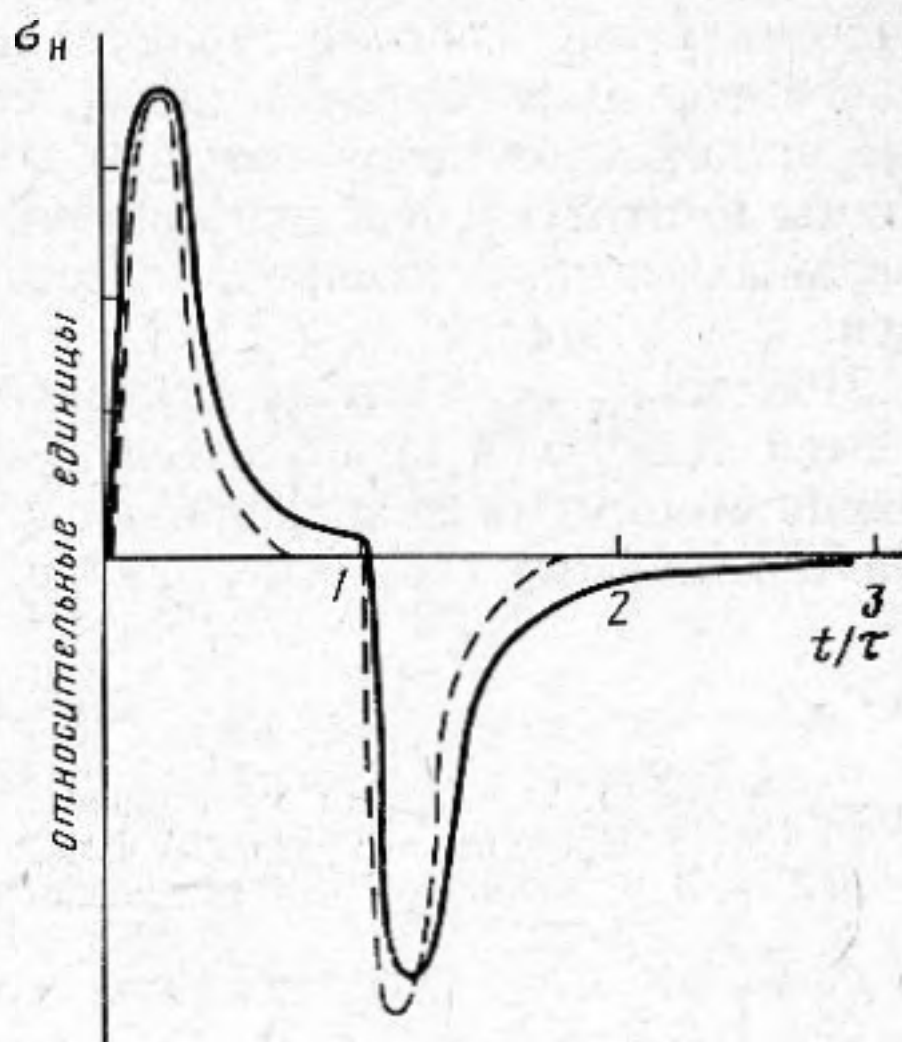
$$- K\beta^2 (\gamma - 1) \int_0^{t-\tau} D(u) \varphi(t-\tau-u) du +$$

$$+ K\beta^2 \gamma \int_0^{t-2\tau} D(u) \varphi(t-2\tau-u) du = f(t),$$

$$(13) \quad f(t) = \frac{\varepsilon^\sigma v}{2l(1-vT)} \{T \exp(-t/T) +$$

$$+ [t(1-vT) - T] \exp(-t/T)\},$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{\tau} [1 - \exp(-t/T)].$$



Фиг. 2. Зависимость механического напряжения в среде от времени (сплошная линия — $\beta=0,4$, пунктир — $\beta=0$)

Согласно (11), в первом приближении индукция равна $D_1(t) = f(t)$. Во втором приближении

$$(14) \quad D_2(t) = D_1(t) + K\beta^2 \int_0^t f(u) \varphi(t-u) du + K\beta^2 (\gamma - 1) \int_0^{t-\tau} f(u) \varphi(t-\tau-u) du -$$

$$- K\beta^2 \gamma \int_0^{t-2\tau} f(u) \varphi(t-2\tau-u) du.$$

Выполняя интегрирование в (14), находим

$$(15) \quad D_2(t) = D_1(t) + \beta^2 \{ \psi(t) + (\gamma - 1) \psi(t - \tau) - \gamma \psi(t - 2\tau) \},$$

где

$$\psi(t - n\tau) = \frac{K\varepsilon^\sigma}{2l} \left\{ \frac{1}{v\tau} - \frac{vT^2(3-vT)}{\tau(1-vT)^3} \exp\left[-\frac{1-n\tau}{T}\right] -$$

$$- \frac{(t-n\tau)Tv}{(1-vT)^2\tau} \exp\left[-\frac{t-n\tau}{T}\right] + \frac{3vT-1}{\gamma\tau(1-vT)} \exp[-v(t-n\tau)] -$$

$$- \frac{(t-n\tau)}{\tau} \exp[-v(t-n\tau)] \right\}, \quad n=0, 1, 2.$$

Следовательно, импульс механического напряжения, излученный пьезопластиной, описывается формулой

$$(16) \quad \sigma_n(t) = -\frac{e\alpha_2 D_2(t)}{\varepsilon^\sigma(1+\alpha_2)} + \frac{e\theta_{12} D_2(t-\tau)}{2\varepsilon^\sigma}.$$

На фиг. 2 приведена зависимость $\sigma_n(t)$ для пьезопластины из ЦТС-19 толщиной 2 мм (слой связующего материала между пьезопластиной и нагруз-

кой не учитывался), нагруженной на сталь при $R_r=5$ Ом, $\nu^{-1}=50$ нс. Сплошная кривая построена по формуле (16), а пунктир в пренебрежении коэффициентом электромеханической связи. Нетрудно видеть, что вблизи основания импульса (на уровне -20 дБ относительно максимального значения) различия в форме сигналов становятся значительными. Последнее обстоятельство особенно существенно при использовании таких пьезопластин в дефектоскопии, так как в этом случае полезные сигналы, отраженные от дефектов, отличаются от излученных на $(30-40)$ дБ. Искажение формы импульсов необходимо также учитывать при использовании спектральных методов измерения коэффициентом поглощения и рассеяния звука.

Поскольку отличия акустического и электрического сигналов определяются величиной коэффициента электромеханической связи, то с точки зрения минимума искажений сигнала более предпочтительны пьезоматериалы с малым β (например, кварц, сульфат кадмия и т. д.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Харкевич А. А. Теория преобразователей. М.—Л.: Госэнергоиздат, 1948; Харкевич А. А. Избранные труды. Т. 1. М.: Наука, 1973.
2. Redwood M. Transient performance of a piezoelectric transducer.— IASA, 1961, v. 33, № 4, p. 527—533.
3. Пономарев П. В. Переходные процессы в пьезовибраторах.— Акуст. ж., 1957, т. 3, № 3, с. 243—253.
4. Касаткин Б. А. Обобщенная ортогональность нормальных мод колебаний по толщине нагруженной пьезопластины.— Акуст. ж., 1978, т. 24, № 3, с. 203—208.
5. Касаткин Б. А. Постановка задачи синтеза в теории пьезопреобразователей.— Дефектоскопия, 1980, № 1, с. 5—11.
6. Мельканович А. Ф. К расчету переходных процессов в плоском пьезоэлектрическом преобразователе.— Акуст. ж., 1978, т. 25, № 5, с. 716—722.
7. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
8. Газарян Ю. М. О создании звукового импульса заданной формы при помощи пьезоэлектрической пластины.— Акуст. ж., 1958, т. 4, № 1, с. 33—36.
9. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, 1949.
10. Мышкис А. Д. Математика для вузов. Специальные курсы. М.: Наука, 1971.
11. Королев М. В. Аперiodический пьезодатчик для ультразвуковых дефектоскопов.— Дефектоскопия, 1973, № 4, с. 12—18.

Всесоюзный научно-исследовательский институт по разработке неразрушающих методов и средств контроля качества материалов

Поступила в редакцию
4.VII.1980