

УДК 534.222.2

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ШУМА ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ИНТЕНСИВНОЙ РЕГУЛЯРНОЙ ВОЛНОЙ

Гурбатов С. Н.

Рассмотрена самосогласованная задача об одномерном взаимодействии высокочастотного шума и интенсивной низкочастотной регулярной волны с учетом обратного влияния слабого шума на интенсивный сигнал. Определен энергетический спектр случайной волны. Исследовано влияние шума на затухание гармоник регулярной волны.

Известно, что при больших интенсивностях нарушается принцип суперпозиции и волны оказывают взаимное влияние друг на друга. Эффективность взаимодействия волн зависит как от их амплитуд, так и от спектрального состава. В акустике, в одномерном случае, из-за отсутствия дисперсии условия синхронизма выполнены для всех взаимодействующих волн, но эффективность генерации новой комбинационной гармоники возрастает с ростом ее частоты. Вследствие этого низкочастотная волна оказывает более сильное влияние на высокочастотную, в то время как обратное влияние менее эффективно. Это отличие качественно меняет картину взаимодействия шума и регулярного сигнала в зависимости от соотношения между их характерными частотами.

К настоящему времени достаточно подробно рассмотрено взаимодействие низкочастотного (НЧ) шума с регулярной высокочастотной (ВЧ) волной [1—3]. Показано, что если в НЧ-шуме нет разрывов, то дополнительное затухание регулярных компонент ВЧ-волны из-за рассеяния на шуме не зависит от спектрального состава шума и определяется его полной энергией. Спектр рассеянной волны в этом случае сосредоточен вблизи гармоник регулярной волны, причем полная энергия ВЧ-поля практически такая же, как и в отсутствие шума.

Ниже проведен статистический анализ взаимодействия интенсивного НЧ-сигнала и ВЧ-шума. Рассмотрение этого процесса проводится с учетом эффектов самовоздействия, приводящих к укрупнению профиля акустических волн, вплоть до образования разрывов, и качественно изменяющих процесс взаимодействия. В силу того что в данном случае более эффективным оказывается влияние НЧ-сигнала на ВЧ-шум, основное внимание уделяется исследованию статистических характеристик высокочастотного шума.

Пусть на слой падает акустическая волна, представляющая собой смесь гармонического НЧ-сигнала и высокочастотного шума $\xi_0(t)$, с дисперсией $\sigma^2 = \langle \xi_0^2 \rangle$ и характерной частотой γ . Тогда при $x=0$ поле можно представить в виде

$$(1) \quad v_0(t) = A \cos(\omega_0 t + \psi) + \xi_0(t), \quad \gamma \gg \omega_0.$$

Распространение акустической волны конечной амплитуды описывается уравнением Бюргерса [4]:

$$(2) \quad v_x' - \beta v v_x' = \mu v_{tt}'' ,$$

где β , μ — параметр нелинейности и коэффициент диссипации.

Будем рассматривать случай бесконечно больших чисел Рейнольдса ($\mu \rightarrow 0$), когда разрывы, образующиеся из первоначально непрерывного профиля, имеют бесконечно малую ширину. Близость сигнала и шума к стадии образования разрывов можно охарактеризовать безразмерными параметрами $d_c = \beta A \omega_0 x$ и $d_m = \beta \sigma \gamma x$. Рассмотрим вначале случай $d_c < 1$, $d_m < 1$, когда в регулярной волне разрывы отсутствуют, а в шумовой их влиянием на статистические характеристики волны можно практически пренебречь. Тогда поле $v(t, x)$ описывается решением Римана [4], и фурье-образ волны представим в виде [5]

$$(3) \quad c(\omega, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} v(t, x) e^{i\omega t} dt = -\frac{1}{2\pi i \omega \beta x} \int_{-\infty}^{+\infty} [\exp\{-i\omega \beta x v_0(t)\} - 1] e^{i\omega t} dt =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i \omega \beta x} \int_{-\infty}^{+\infty} [\exp\{-i\omega \beta x \xi_0(t) - i\omega \beta x A \cos(\omega_0 t - \psi)\} - 1] e^{i\omega t} dt.$$

Проведем на основе формулы (3) качественное рассмотрение взаимного влияния шума и сигнала. Введем k_* и $k_* \omega_0$ — эффективное число гармоник НЧ-сигнала и ширину его спектра при $x > 0$. Пусть сигнал находится достаточно далеко от точки опрокидывания и $k_* \omega_0 \ll \gamma$. Тогда, полагая в показателе экспоненты перед $\xi_0(t)$ частоту $\omega \simeq k_* \omega_0$, получим, что эффективность влияния шума на сигнал определяется параметром $d_{mc} \simeq k_* \omega_0 \beta x \sigma = (\beta \sigma \gamma x) (k_* \omega_0 / \gamma) = d_m (k_* \omega_0 / \gamma) \ll 1$. Следовательно, до образования разрывов влияние ВЧ-шума на НЧ-сигнал мало. Влияние же НЧ-сигнала на ВЧ-шум определяется параметром $d_{cm} \simeq \omega \beta x A \simeq \gamma \beta x A = \omega_0 \beta x A (\gamma / \omega_0) = d_c (\gamma / \omega_0)$, и даже в области, где сигнал еще не сильно искажился ($d_c \ll 1$), оно может быть весьма существенным.

Рассмотрим случай, когда самовоздействием ВЧ-шума можно пренебречь, т. е. $d_m \ll 1$. Из формулы (3) имеем при этом

$$(4) \quad c(\omega, x) = -\frac{1}{2\pi i \omega \beta x} \int_{-\infty}^{+\infty} [\exp\{-i\omega \beta x A \cos(\omega_0 t' + \psi)\} - 1] e^{i\omega t'} dt' +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_0(t') \exp\{-i\omega \beta x A \cos(\omega_0 t' + \psi) + i\omega t'\} dt',$$

где первое слагаемое описывает спектр НЧ-волны и соответствует известному ряду Бесселя — Фубини [4], а второе — спектр ВЧ-шума, искаженный из-за взаимодействия с НЧ-волной. Переходя от выражения (4) к обратному фурье-преобразованию, для ВЧ-шума имеем

$$(5) \quad \xi(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_0(t') \delta(t - t' + \beta A x \cos(\omega_0 t' + \psi)) dt'.$$

Производя замену переменных

$$(6) \quad \tau = t' - \beta A x \cos(\omega_0 t' + \psi)$$

и используя фильтрующее свойство δ -функции, получим из формулы (5)

$$(7) \quad \xi(t, x) = \frac{\xi_0(t'(t, x))}{1 + \beta A \omega_0 x \sin(\omega_0 t'(t, x) + \psi)}$$

где $t'(t, x)$ — решение уравнения (6) при $\tau = t$, т. е. тот момент времени при $x = 0$, из которого вышла точка волны, прошедшая сечение x при $t' = t$. Из

формулы (7) видно, что ВЧ-шум в результате взаимодействия испытывает периодическую фазовую и амплитудную модуляцию. При $d_c \ll 1$, когда искажения НЧ-волны малы, решая (6) методом возмущений, получим из формулы (7)

$$(8) \quad \xi(t, x) = \frac{\xi_0(t + \beta A x \cos(\omega_0 t + \psi))}{1 + \beta A \omega_0 x \sin(\omega_0 t + \psi)}.$$

Таким образом, ВЧ-шум, смещаясь из-за взаимодействия с НЧ-волной, испытывает сжатие временного масштаба в $\{1 - \beta A \omega_0 x \sin(\omega_0 t + \psi)\}$ раз, а его амплитуда уменьшается в $\{1 + \beta A \omega_0 x \sin(\omega_0 t + \psi)\}$ раз. Следовательно, на расширяющихся участках профиля волны происходит увеличение временных масштабов поля и уменьшение его амплитуды, а на укручающихся — уменьшение временных масштабов сопровождается увеличением амплитуды шума (фиг. 1).

Эти эффекты приводят к уширению спектра шума как в сторону высоких, так и в сторону низких частот.

Дальнейшее увеличение крутизны волны приводит к образованию разрывов. В отсутствие шума амплитуда разрыва регулярной волны возрастает при $1 < d_c < \pi/2$, а при $d_c > \pi/2$ убывает, причем при $d_c \gg \pi/2$ волна преобразуется в последовательность треугольных импульсов. При наличии шума в интервале $1 < d_c < \pi/2$ происходит диссипация на разрыве шумового поля, находящегося при $x=0$ на участках профиля регулярной волны с увеличивающейся крутизной. При $d_c > \pi/2$ эта часть шума полностью диссипирует на разрыве и на разрыве поглощается шум с расширяющихся участков регулярной волны. Так как при $d_c \gg \pi/2$ весь шум сосредоточен на линейном участке регулярной волны, можно рассматривать взаимодействие сигнал — шум на каждом из периодов, ограничиваясь линейным участком начального профиля. Линеаризуя начальные условия для регулярной волны относительно точек $\omega_0 t_k^* + \psi = 2\pi k + \pi/2$

$$(9) \quad v_0^p(t) = -A \omega_0 (t - t^*),$$

из решения Римана

$$(10) \quad v = v_0(t + \beta v x)$$

имеем для регулярной волны

$$(11) \quad v^p(t, x) = -A \omega_0 (t - t^*) / (1 + \beta A \omega_0 x).$$

Для смеси сигнал — шум решение Римана имеет вид

$$(12) \quad v = -A \omega_0 (t + \beta v x - t^*) + \xi_0(t + \beta v x).$$

Подставляя решение (12) в виде $v = v^p + \xi$, для $\xi(t, x)$ получим

$$(13) \quad \xi(1 + \beta A \omega_0 x) = \xi_0(t + \beta x v^p(t, x) + \beta x \xi).$$

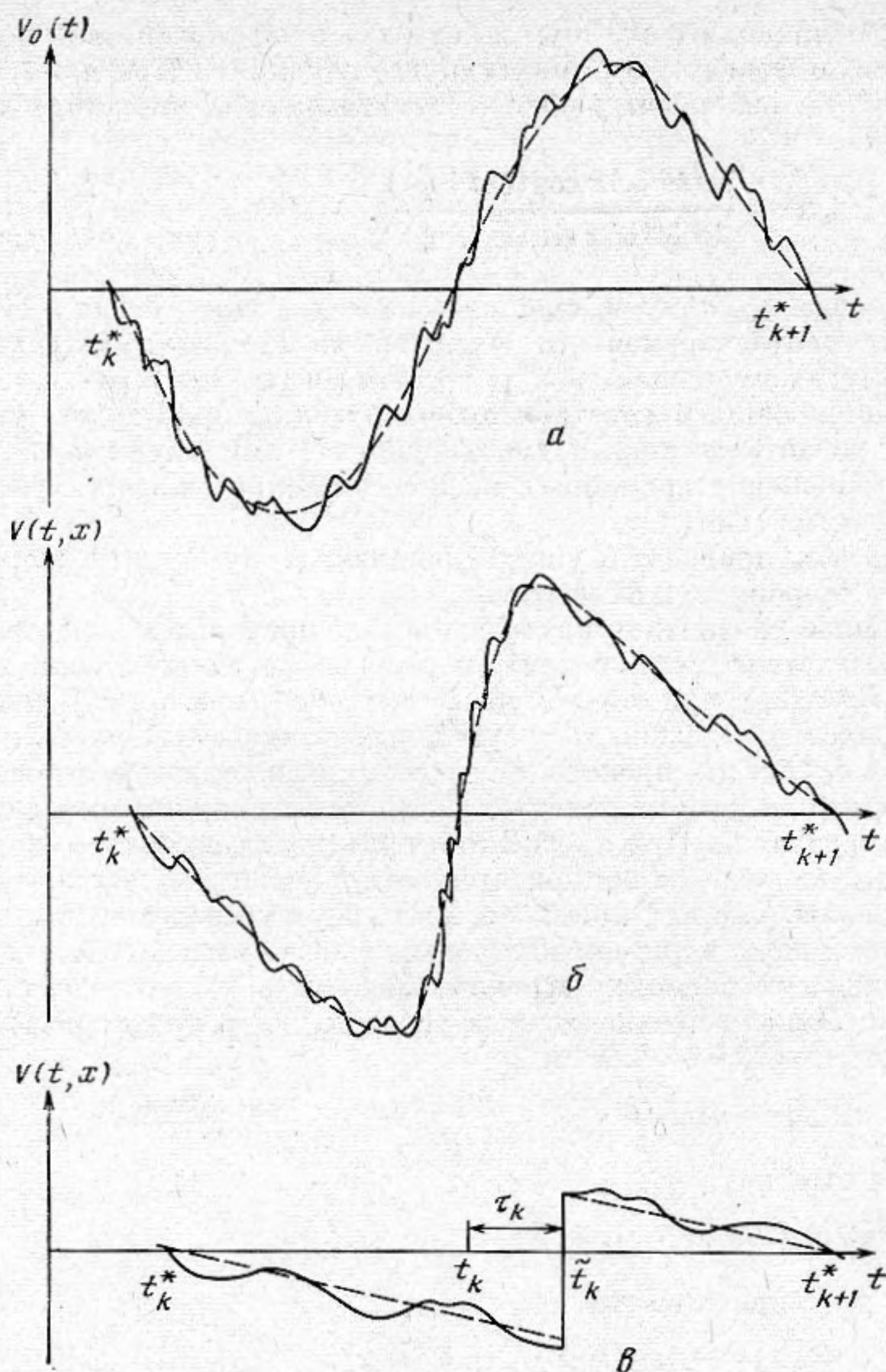
Если в отсутствие регулярной волны решение уравнения Римана (10) для шума есть $V(t, x)$:

$$(14) \quad V = \xi_0(t + \beta x V), \quad V = V(t, x),$$

то для $\xi(t, x)$, исходя из формул (13), (14), имеем

$$(15) \quad \xi(t, x) = V\left(\frac{t + d_c t}{1 + d_c}; \frac{x}{1 + d_c}\right) / (1 + d_c); \quad d_c = \beta A \omega_0 x.$$

Отсюда видно, что в результате взаимодействия шума с линейным участком регулярной волны амплитуда шума уменьшается в $(1 + d_c)$ раз, пропорционально $(1 + d_c)$ происходит увеличение временных масштабов поля и, кроме того, происходит уменьшение нелинейных эффектов. В соответст-



Фиг. 1. Эволюция профиля акустической волны. Штриховой линией изображена регулярная волна, сплошной — сигнал плюс шум. *a* — начальный профиль, $d_c=0$, *b* — $0 < d_c < 1$, *c* — разрывная стадия, $d_c > \pi/2$

вии с формулой (15) на расстоянии x нелинейные искажения ξ такие же, как у шума V в отсутствие регулярной волны на расстоянии $z_0 = x/(1+d_c)$. При $d_c \gg 1$ форма волны стабилизируется и $z_0 = 1/\beta A \omega_0$. Нелинейные искажения шума при этом характеризуются параметром $\beta \sigma \gamma z_0 = \sigma \gamma / A \omega_0$, и при $\sigma \gamma / A \omega_0 \ll 1$ ими можно пренебречь на всей стадии распространения.

На разрывной стадии ($d_c > 1$) ВЧ-шум приводит к движению ударных фронтов. Положение ударных фронтов в этом случае может быть найдено из условия сохранения импульса акустической волны. Считая, что амплитуда шума много меньше амплитуды регулярной волны, и пренебрегая смещением нулей пилообразной волны, на входе имеем

$$(16) \quad P_0 = \int_{t^*}^{t^*+2\pi/\omega_0} v_0(t) dt = \int_{t^*}^{t^*+2\pi/\omega_0} \xi_0(t) dt.$$

Для импульса акустической волны на разрывной стадии в соответствии с (11), (15)

$$(17) \quad P(x) = \int_{t^*}^{t^*+2\pi/\omega_0} v(t, x) dt = \int_{t^*}^{t^*+2\pi/\omega_0} (v^p + \xi) dt.$$

Вводя τ_k — смещение ударного фронта относительно $t_k = t_k^* + \pi/\omega_0$ — положения ударного фронта регулярной волны в отсутствие шума, учитывая, что $V(t, x)$ удовлетворяет уравнению (14), и пренебрегая относительным смещением $\tau_k/(1+d_c)$ по сравнению с периодом волны, получим из формул (11), (15), (17) после замены $t' = [t + d_c t^* + \beta x \xi_0(t')] / (1 + d_c)$:

$$(18) \quad P(x) = -\frac{2A\pi\tau_k}{1+d_c} + \int_{t_k^*}^{t_k^* + \pi/\omega_0(1+d_c)} \xi_0(t') dt' + \int_{t_{k+1}^* - \pi/\omega_0(1+d_c)}^{t_{k+1}^*} \xi_0(t') dt'.$$

Исходя из условия сохранения импульса: $P(x) = P_0$, из формул (16), (18) для координаты разрыва получим выражение

$$(19) \quad \tilde{t}_k = t_k + \tau_k = [2\pi(k + 3/2) - \psi] / \omega_0 - \frac{(1+d_c)}{2A\pi} \int_{t_k - \frac{\pi}{\omega_0} \left(\frac{d_c}{1+d_c} \right)}^{t_k + \frac{\pi}{\omega_0} \left(\frac{d_c}{1+d_c} \right)} \xi_0(t') dtt'.$$

Отсюда видно, что при $d_c = \beta A \omega_0 x \gg 1$ разрыв движется с постоянной скоростью, пропорциональной полному импульсу шума на периоде регулярной НЧ-волны.

Выше мы рассмотрели динамику взаимодействия регулярной НЧ-волны и ВЧ-шума. Рассмотрим теперь статистические характеристики акустической волны. На стадии до образования разрывов для анализа спектрального состава поля удобно воспользоваться выражением (3). Разлагая

в нем экспоненту по функциям Бесселя $\exp(iz \cos \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^k J_k(z) \exp(ik\varphi)$

[6] и учитывая $\langle c(\omega) c^*(\omega') \rangle = S(\omega) \delta(\omega - \omega')$, для энергетического спектра поля получим

$$(20) \quad S(\omega, x) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{J_k^2(k\omega_0 \beta A x)}{k^2 \omega_0^2 \beta^2 x^2} \exp\{-k^2 \omega_0^2 \beta^2 x^2 \sigma^2\} \times \\ \times \delta(\omega - k\omega_0) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{J_k^2(\omega \beta A x)}{2\pi \omega^2 \beta^2 x^2} \exp\{-\omega^2 \beta^2 \sigma^2 x^2\} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} [\exp\{B_0(\tau) \omega^2 \beta^2 x^2\} - 1] e^{i(\omega - k\omega_0)\tau} d\tau, \\ B_0(\tau) = \langle \xi_0(t+\tau) \xi_0(t) \rangle.$$

Здесь мы предположили, что фаза ψ регулярной волны равномерно распределена в интервале $[-\pi, \pi]$ [1]. Первая сумма в выражении (20) описывает регулярные компоненты НЧ-волны, ослабленные из-за затухания, связанного со взаимодействием сигнал — шум. Как видно из формулы (20), декремент затухания гармоник пропорционален полной энергии шума σ^2 , причем на стадии до образования разрывов показатель экспоненты равен

$\gamma^2 \beta^2 \sigma^2 x^2 (k^2 \omega_0^2 / \gamma^2) = d_{\text{ш}}^2 (k^2 \omega_0^2 / \gamma^2) \ll 1$ и, следовательно, дополнительным затуханием из-за взаимодействия с ВЧ-шумом можно пренебречь. Вторая сумма в формуле (20) описывает спектр шума, искаженный из-за взаимодействия с НЧ-волной. Вводя вспомогательный спектр $\tilde{S}(u, \omega, x)$

$$(21) \quad \tilde{S}(u, \omega, x) = \frac{\exp\{-\omega^2 \beta^2 \sigma^2 x^2\}}{2\pi \omega^2 \beta^2 x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} [\exp\{B_0(\tau) \omega^2 \beta^2 x^2\} - 1] e^{i u \tau} d\tau,$$

спектр шума можно представить в виде

$$(22) \quad S_{\xi}(\omega, x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k^2(\omega \beta A x) \tilde{S}(\omega - k \omega_0, \omega, x).$$

При $d_{\text{ш}} \ll 1$, когда нелинейным искажением шума можно пренебречь, из формул (21), (22) имеем

$$(23) \quad S_{\xi}(\omega, x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k^2(\omega \beta A x) S_0(\omega - k \omega_0),$$

$$S_0(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B_0(\tau) e^{-i \omega \tau} d\tau.$$

Отсюда видно, что нелинейным взаимодействием шума и сигнала можно пренебречь при $d_{\text{сш}} = \gamma \beta A x \ll 1$, когда спектр ВЧ-шума практически не искажается. При $d_{\text{сш}} \gg 1$ для оценки спектра шума можно воспользоваться следующим приближением для функций Бесселя [6]:

$$(24) \quad J_k^2(z) \simeq \begin{cases} \frac{1}{\pi z} (1 + \cos(2z - \pi k - \pi/2)), & |z| > |k|, \\ 0 & |z| < |k|. \end{cases}$$

Будем считать, что высокочастотный шум расположен в пределах $\omega \in [\omega_{\text{н}}, \omega_{\text{в}}]$, причем его ширина $\Delta \omega \simeq \omega_{\text{в}} - \omega_{\text{н}}$ много больше частоты НЧ-волны ω_0 . Из формул (23), (24) видно, что при $d_{\text{сш}} \gg 1$ верхняя и нижняя границы спектра шума при этом соответственно равны

$$(25) \quad \omega_{\text{н}}' = \omega_{\text{н}} / (1 + d_{\text{с}}), \quad \omega_{\text{в}}' = \omega_{\text{в}} / (1 - d_{\text{с}}).$$

В области $\omega \in [\omega_{\text{н}}'' = \omega_{\text{в}} / (1 + d_{\text{с}}), \omega_{\text{в}}'' = \omega_{\text{н}} / (1 - d_{\text{с}})]$ для энергетического спектра шума можно написать следующее выражение:

$$(26) \quad S_{\xi}(\omega, x) \simeq \frac{1}{\pi \omega \beta A x} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_0(\omega - k \omega_0) (1 + \cos(2\omega \beta A x - \pi k - \pi/2)) \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{\pi \omega \beta A x} \frac{1}{\omega_0} \int_{-\infty}^{+\infty} S_0(\omega) d\omega = \frac{\sigma^2}{\pi \omega \beta A \omega_0 x}; \quad \omega \in [\omega_{\text{н}}'', \omega_{\text{в}}''].$$

При выводе этой формулы мы учли, что $\Delta \omega \gg \omega_0$, и пренебрегли осцилляциями J_k^2 , которые усредняются в результате суммирования. Таким образом, в этом интервале энергетический спектр ВЧ-шума принимает универсальный степенной характер, а его параметры определяются полной энергией шума σ^2 , амплитудой и частотой регулярного сигнала. Существенное расширение спектра ВЧ-шума из-за взаимодействия с интенсивной НЧ-волной обусловлено тем, что НЧ-сигнал в соответствии с формулами (7), (8) приводит к амплитудно-фазовой модуляции ВЧ-шума, а именно к увеличению временных масштабов шума на расширяющихся участках

регулярной волны и к уменьшению их на участках с увеличивающейся крутизной. Более быстрое расширение спектра ВЧ-шума в сторону высоких частот обусловлено тем, что при $d_c \rightarrow 1$ волна «опрокидывается» и временной масштаб шума на этом участке стремится к нулю.

Образование разрывов в регулярной волне качественно изменяет спектр шума. На разрывной стадии акустическое поле представимо в виде

$$(27) \quad v(t, x) = v^p(t, x) + \xi(t, x),$$

где v^p представляет последовательность треугольных импульсов (11) с координатами разрывов \tilde{t}_k (19), а $\xi(t, x)$ — последовательность отрезков шума и в соответствии с формулой (15) может быть написано в форме

$$(28) \quad \xi(t, x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \xi_k(t, x) \Pi(t - t_k^*);$$

$$\xi_k(t, x) = V((t + d_c t_k^*) / (1 + d_c); x / (1 + d_c)) / (1 + d_c);$$

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \pi / \omega_0, \\ 0, & |t| > \pi / \omega_0. \end{cases}$$

При условии, что $\Delta \omega \gg \omega_0$, т. е. время корреляции шума $\rho_0 \sim 1 / \Delta \omega$ много меньше периода НЧ-волны $2\pi / \omega_0$, шумы ξ_k на соседних участках не коррелированы, и для корреляционной функции шума, усредненной по периоду НЧ-волны, имеем из формулы (28)

$$(29) \quad B(\tau, x) = \langle \xi(t + \tau, x) \xi(t, x) \rangle = \frac{1}{(1 + d_c)^2} B_V\left(\frac{\tau}{1 + d_c}; \frac{x}{1 + d_c}\right) \Delta\left(\frac{\tau \omega_0}{2\pi}\right),$$

где $\Delta(z)$ — нормированная треугольная функция ($\Delta(0) = 1$, $\Delta(|z| > 1) \equiv 0$), $B_V(\tau, x)$ — корреляционная функция римановой волны $V(t, x)$ (10) [7]. Из формулы (29) следует, что в результате взаимодействия с НЧ-волной, при $d_c > \pi/2$, т. е. на разрывной стадии регулярной волны, дисперсия шума уменьшается как $(1 + d_c)^2$, а его время корреляции возрастает $\rho(x) = \rho_0(1 + d_c)$. При $\rho(x) \ll 2\pi / \omega_0$ треугольная функция в формуле (29) не оказывает существенного влияния на вид спектра шума, и из (29) имеем

$$(30) \quad S(\omega, x) \simeq \frac{1}{1 + d_c} S_V(\omega(1 + d_c), x / (1 + d_c)),$$

где $S_V(\omega, x)$ — энергетический спектр римановой волны [7, 8]. Отсюда следует, в частности, что в том случае, когда нелинейными искажениями шума можно пренебречь, т. е. $S_V(\omega, x) = S_0(\omega)$, нелинейное взаимодействие с НЧ-волной на разрывной стадии приводит к переносу спектра шума в низкочастотную область, с уменьшением центральной частоты спектра как $1 / (1 + d_c)$ и таким же сжатием спектра и с одновременным уменьшением амплитуды спектра как $1 / (1 + d_c)$.

Рассмотрим теперь спектр пилообразной волны v^p (27). В силу того что координаты разрывов $\tilde{t}_k = t_k + \tau_k$ (19) флуктуируют, спектр v^p имеет как непрерывную, так и дискретную части. Для анализа v^p удобно рассмотреть вспомогательный процесс $z = \partial v^p / \partial t$, для которого из формулы (11) имеем

$$(31) \quad z = \frac{\partial v^p}{\partial t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\Delta v_p) \delta(t - \tilde{t}_k) - \Delta v_p \frac{\omega_0}{2\pi},$$

$$\Delta v_p = \frac{A \omega_0}{1 + \beta A \omega_0 x} \frac{2\pi}{\omega_0} \simeq \frac{2\pi}{\beta \omega_0 x}.$$

Здесь Δv_p — амплитуда разрыва пилообразной волны, $\tilde{t}_k = t_k + \tau_k$ — координаты разрывов (19). Так как $z(t)$ представляет собой импульсный процесс с импульсами постоянной амплитуды и длительности и со случайными моментами появления импульсов, то для него нетрудно написать выражение для энергетического спектра $S_z(\omega)$ [9]. Учитывая очевидное соотношение $S_z = \omega^2 S_v$ для энергетического спектра v^p , получим

$$(32) \quad S_v(\omega, x) = \frac{(\Delta v_p)^2 \omega_0}{\omega^2 4\pi^2} \left\{ (1 - e^{-\omega^2 \langle \tau^2 \rangle}) + \omega_0 \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} e^{-k^2 \omega_0^2 \langle \tau^2 \rangle} \delta(\omega - k\omega_0) \right\}.$$

Здесь мы предположили, что $\xi_0(t)$, а следовательно, и τ_k является гауссовым процессом. Заметим, что требование гауссовости $\xi_0(t)$ не является здесь обязательным, так как τ_k (19) стремится к нормальному закону в силу центральной предельной теоремы [10]. При выводе формулы (32) мы учли также, что при $\rho_0 \ll 2\pi/\omega_0(1+d_c)$ флуктуации τ_k , определяемые интегралом (19), от $\xi_0(t)$ статистически независимы, т. е.

$$\langle \tau_k \tau_{k+p} \rangle = 0, \quad p \geq 1.$$

Из формулы (32) видно, что спектр $S_v(\omega, x)$ определяется величиной дисперсии флуктуаций координат разрывов $\langle \tau^2 \rangle$, для которой в зависимости от значения спектра шума $S_0(\omega)$ при $\omega=0$ имеем из формулы (19)

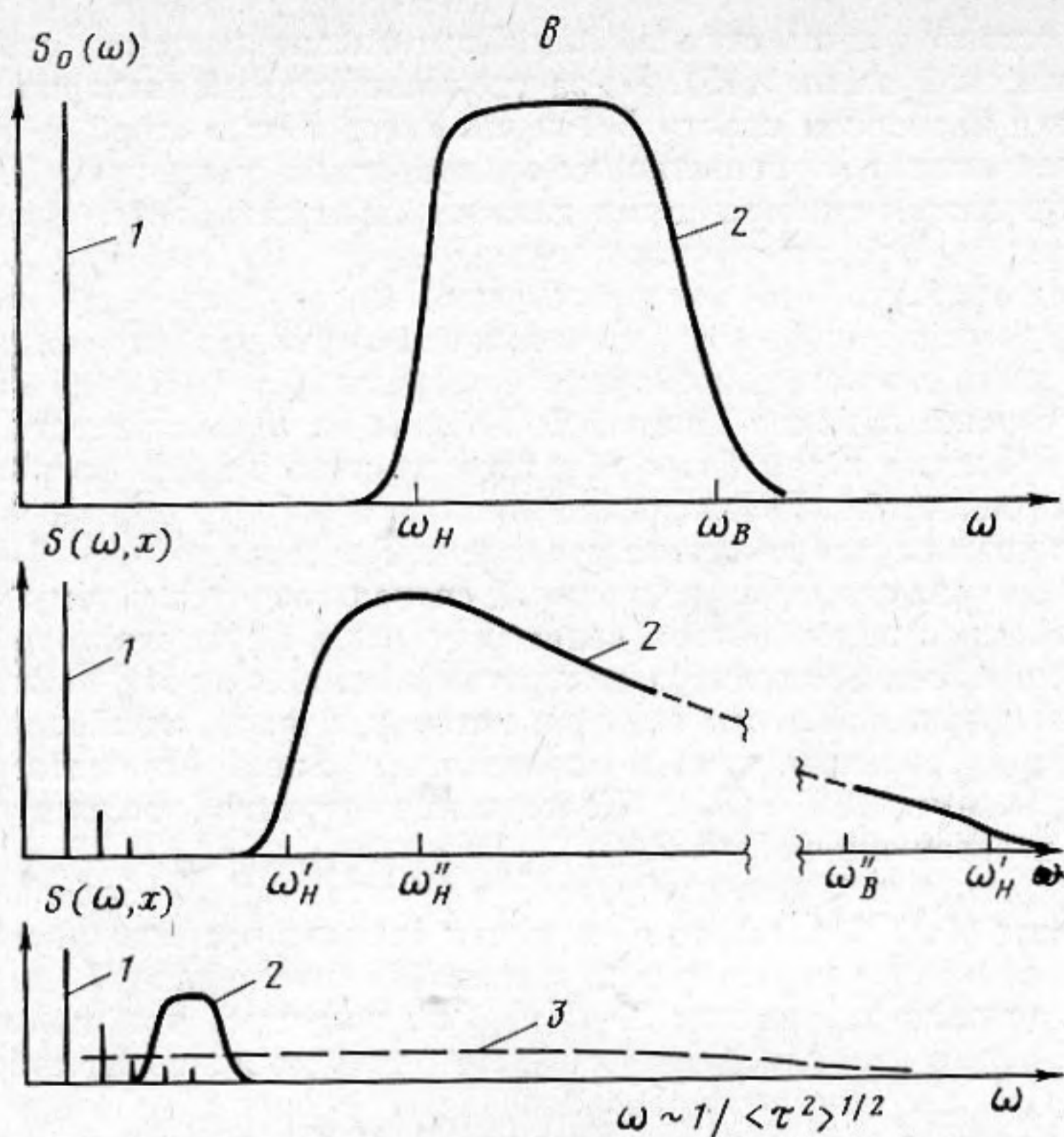
$$(33) \quad \langle \tau^2 \rangle = \frac{(1 + \beta A \omega_0 x)^2}{(2\pi A)^2} D(x) \simeq \frac{\beta^2 \omega_0^2 x^2}{4\pi^2} D,$$

$$(34) \quad D(x) = \int_0^T (T - \tau) B_0(\tau) d\tau \simeq$$

$$\simeq \begin{cases} T \int_0^\infty B_0(\tau) d\tau = T S_0(0)/2, & S_0(0) \neq 0, \\ - \int_0^\infty \tau B_0(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_0(\omega)}{\omega^2} d\omega, & S_0(0) = 0, \end{cases}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \left(\frac{d_c}{1+d_c} \right).$$

Спектр $S_v(\omega, x)$ имеет непрерывную и дискретную части. Дискретная часть в выражении (32) описывает амплитуды гармоник пилообразной волны, ослабленной из-за взаимодействия с шумом. Из формул (32) — (34) видно, что на разрывной стадии затухание гармоник НЧ-волны определяется не полной энергией шума $\sigma^2 = \langle \xi_0^2 \rangle$, как на начальной стадии (20) [1—3, 11], а существенно зависит от вида спектра $S_0(\omega)$ (34). Будем в дальнейшем считать $S_0(0) = 0$. Тогда из формулы (34) следует, что $D = \sigma^2/\lambda^2$, где σ^2 — дисперсия, $\lambda \sim \gamma$ — характерная частота ВЧ-шума. Из формул (32) — (34) получим, что дополнительное затухание гармоник НЧ-волны из-за взаимодействия с ВЧ-шумом определяется множителем $\exp\{-k^2 \omega_0^4 \beta^2 \sigma^2 x^2 / \lambda^2 4\pi^2\}$, и в отличие от начальной стадии (20) показатель экспоненты пропорционален ω_0^4 . Из этого выражения видно, что затухание регулярных компонент существенно в области частот $\omega \geq 1/\langle \tau^2 \rangle^{1/2} \simeq$



Фиг. 2. Энергетический спектр акустической волны. 1 — дискретная составляющая спектра низкочастотной волны, 2 — спектр высокочастотного шума $\xi(t, x)$, 3 — непрерывная часть спектра $v^p(t, x)$. а — $d_c=0$, б — $d_c=3/4$, в — $d_c=3$

$\approx \lambda / \sigma \beta \omega_0 x$ и, следовательно, в области, где был расположен шум при $x=0$, т. е. $\omega \sim \lambda \sim \gamma$, спектр $S_v(\omega, x)$ дискретный при $d_m < \gamma / \omega_0 \gg 1$. С учетом того, что с ростом x спектр $S_\xi(\omega, x)$ (30) смещается в сторону низких частот и характерная частота спектра $\omega_* \sim \gamma / d_c$, получаем, что при $\omega \sim \omega_*$ затухание гармоник НЧ-волны из-за взаимодействия с шумом определяется множителем $\exp\{-\sigma^2/A^2\}$ и пренебрежимо мало, т. е. в области, где расположен спектр $S_\xi(\omega, x)$, спектр $S_v(\omega, x)$ практически дискретный.

Для непрерывной части спектра $S_v(\omega, x)$ из формул (32) — (34) имеем следующее выражение:

$$(35) \quad S_v(\omega, x) \approx \begin{cases} (\Delta v_p)^2 \omega_0 \langle \tau^2 \rangle / 4\pi^2 = \omega_0 D / 4\pi^2 = (\sigma^2 / \lambda) (\omega_0 / \lambda 4\pi^2), & \omega < 1 / \langle \tau^2 \rangle^{1/2}, \\ (\Delta v_p)^2 \omega_0^2 / \omega^2 4\pi^2 = 1 / \omega^2 \omega_0 \beta^2 x^2, & \omega > 1 / \langle \tau^2 \rangle^{1/2}. \end{cases}$$

Оценивая начальный спектр $S_0(\omega)$ как σ^2 / λ , получаем, что непрерывная часть $S_v(\omega, x)$ много меньше амплитуды спектра $S_0(\omega)$. Степенная асимптотика $S_v(\omega, x)$ связана с образованием разрывов и типична для всех акустических волн на разрывной стадии.

Таким образом, трансформацию спектра ВЧ-шума в результате взаимодействия с интенсивной НЧ-волной можно описать следующим образом. На стадии до образования разрывов ($d_c < 1$) из-за амплитудно-фазовой модуляции происходит расширение спектра ВЧ-шума как в сторону низких, так и высоких частот (25), (26), что связано соответственно с увеличением или уменьшением временных масштабов поля на расширяющихся и на становящихся более крутыми участках профиля регулярной волны. После образования разрывов, при $d_c > \pi/2$, часть шума диссипирует на раз-

рывах, и остается лишь шум на линейном расширяющемся участке профиля регулярной волны (15). Из-за увеличения временных масштабов и уменьшения дисперсии спектр ВЧ-шума смещается в сторону низких частот с одновременным уменьшением его ширины и амплитуды (30). Такая же трансформация спектра шума должна наблюдаться при взаимодействии его с задним фронтом звукового удара.

Следует отметить, что все эти эффекты могут быть качественно рассчитаны в рамках метода возмущений, когда считается, что мощная волна приводит лишь к изменению параметров среды для слабой линейной волны [12]. Однако влияние мощной НЧ-волны на эффективность самовоздействия ВЧ-шума и тем более обратное влияние слабой волны на мощный сигнал может быть исследовано лишь в рамках самосогласованной задачи — в нашем случае на основе уравнения Бюргерса.

Обратное влияние шума на мощный сигнал сводится к тому, что координаты разрывов пилообразной волны начинают флуктуировать, что приводит к уменьшению амплитуд дискретных компонент НЧ-волны и к появлению непрерывной части спектра, которая, однако, не зависит от формы начального спектра шума и определяется лишь его интегральными характеристиками (32)–(35). Качественно картина эволюции спектра ВЧ-шума изображена на фиг. 2.

Если характерное смещение ударного фронта становится больше периода НЧ-волны ($\langle \tau^2 \rangle^{1/2} \geq 1/\omega_0$), то начинается слияние разрывов, которое приводит к увеличению характерных масштабов пилообразной волны $l(x)$. Оценивая энергию волны как $E \sim l^2(x)/\beta^2 x^2$, получим, что на достаточно больших трассах взаимодействие сигнала с шумом приводит к более медленному затуханию регулярной волны.

Автор благодарит Л. А. Островского и В. Е. Фридмана за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Руденко О. В., Чиркин А. С. Теория нелинейного взаимодействия монохроматических и шумовых волн в слабодиспергирующих средах. — Ж. exper. и теор. физики, 1974, т. 67, № 5, с. 1903–1912.
2. Гурбатов С. Н., Дубков А. А., Малахов А. Н. О параметрическом взаимодействии случайных волн в недиспергирующих средах. — Ж. exper. и теор. физики, 1977, т. 72, № 2, с. 456–465.
3. Гурбатов С. Н. Параметрическое взаимодействие и усиление случайных волн в недиспергирующей среде. — Акуст. ж., 1980, т. 24, № 4, с. 551–559.
4. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
5. Пелиновский Е. Н. Спектральный анализ простых волн. — Изв. вузов. Радиофизика, 1976, т. 19, № 3, с. 373–381.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
7. Руденко О. В., Чиркин А. С. О нелинейной трансформации спектров случайных волновых полей. — Докл. АН СССР, 1974, т. 214, № 5, с. 1045–1048.
8. Саичев А. И. О спектрах некоторых случайных волн, распространяющихся в нелинейных средах. — Изв. вузов. Радиофизика, 1974, т. 17, № 7, с. 1025–1034.
9. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Сов. радио, 1974, т. 1, с. 460.
10. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, 1978, с. 225.
11. Моисеев С. С., Тур А. В., Яновский В. В. О взаимодействии пакета со случайным шумом в уравнении Бюргерса. — Изв. вузов. Радиофизика, 1980, т. 23, № 1, с. 68–78.
12. Островский Л. А., Степанов Н. С. Нерезонансные параметрические эффекты в распределенных системах. — Изв. вузов. Радиофизика, 1971, т. 14, № 4, с. 489–529.

Горьковский государственный
университет им. Н. И. Лобачевского

Поступила в редакцию
29.IX.1980