

УДК 534.222

РАЗВИТИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ДВУМЕРНОГО
АКУСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В ПОЛЕ СИЛЬНОЗАТУХАЮЩЕГО
ЗВУКОВОГО ПУЧКА

Гусев Б.Э., Руденко О.В.

Выведена новая упрощенная система уравнений, описывающая акустические течения, возникающие в звуковом поле, которое быстро затухает в направлении нормали к излучателю. Методом фазовой плоскости проведено исследование нелинейной нестационарной задачи. Выявлена возможность немонотонного установления продольной составляющей скорости звукового ветра.

В работе [1] исследовались акустические течения, возникающие при распространении в жидкости звукового пучка, который незначительно поглощается и дифрагирует на расстояниях порядка характерного размера излучателя r_1 :

$$(1) \quad \alpha r_1 \ll 1, r_1/L \ll 1,$$

здесь α — коэффициент затухания, L — длина дифракции. При выполнении неравенств (1) поток жидкости является квазиодномерным в том смысле, что продольная составляющая скорости звукового ветра значительно превосходит поперечную. В работе [1] получены упрощенные уравнения, описывающие процесс установления такого «квазиэкартовского» течения. Однако при значительной частоте звука ω первое из неравенств (1) может нарушаться. В связи с этим представляет интерес рассмотрение другого предельного случая, когда поток формируется в звуковом поле слабодифрагирующего пучка, который незначительно проникает в глубь среды:

$$(2) \quad \alpha r_1 \gg 1, r_1/L \ll 1.$$

Отметим, что второе из неравенств (2) является следствием первого при условии волнового распространения звуковых колебаний. Условия (2) для излучателей с радиусом порядка 0,1 м выполняются при частотах выше 30 МГц в воде и выше 1 МГц в воздухе.

Будем исходить из уравнений двухмерного движения несжимаемой жидкости в неоднородном силовом поле F [2]:

$$(3) \quad \frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} = F_x - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta_0}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} \right),$$

$$(4) \quad \frac{\partial U_y}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial y} = F_y - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\eta_0}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} \right),$$

$$(5) \quad \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} = 0,$$

здесь U_x и U_y — продольная и поперечная компоненты скорости акустического течения, p — давление, ρ_0 — равновесная плотность среды, η_0 — сдви-

говая вязкость. При сильном затухании звука (2) поле \mathbf{F} , которое определяется усредненными по времени акустическими характеристиками звукового пучка [2], будет изменяться в поперечном направлении значительно медленнее, чем в продольном. Эти предположения

$$(6) \quad F_x = F_x(x, \mu y), \quad U_y = U_y(x, \mu y, \mu t), \quad U_x = U_x(x, \mu y, \mu t)$$

аналогичны принятым в работе [1] с точностью до изменения роли продольного и поперечного направлений. В случае малой сдвиговой вязкости они позволяют определить из уравнения (3) поле давлений. Тогда уравнение (4) с точностью до членов первого порядка по малому параметру μ может быть представлено в виде

$$(7) \quad \frac{\partial U_y}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial y} = F + \frac{\eta_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2}$$

$$F = \int_{-\infty}^x (\text{rot } \mathbf{F})_z dx'$$

Уравнение (7) вместе с уравнением непрерывности (5) составляют замкнутую систему, достаточную для исследования задачи в приближении (6). Описываемое этой упрощенной системой акустическое течение является квазиодномерным в том смысле, что поперечная компонента скорости потока превышает продольную. Отметим, что вид правой части уравнения (7) указывает на невозможность появления акустического ветра в потенциальном силовом поле \mathbf{F} (ср. работу [1]).

Если на излучателе (или на свободной поверхности жидкости) колебания скорости распределены по закону

$$v_x(0, y, t) = v_0 \varphi(y/r_1) \sin \omega t, \quad \varphi(0) = 1,$$

то звуковое поле в приближении (2) описывается выражением:

$$v_x(x, y, t) = v_0 \varphi(y/r_1) e^{-\alpha x} \sin \omega(t - x/c_0), \quad v_y = 0,$$

где c_0 — равновесная скорость звука. Вычисление силы [1] в рассматриваемом случае приводит к результату:

$$(8) \quad F = v_0^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\varphi^2}{2} \right) e^{-2\alpha x}.$$

Исходя из вида внешнего воздействия (8), удобно перейти в уравнениях (5), (7) к безразмерным переменным:

$$\xi = \alpha x, \quad \eta = y/r_1, \quad \theta = v_0 t/r_1,$$

$$U_\eta = U_y/v_0, \quad U_\xi = \alpha r_1 U_x/v_0.$$

Тогда упрощенная система уравнений принимает вид

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial U_\eta}{\partial \theta} + U_\xi \frac{\partial U_\eta}{\partial \xi} + U_\eta \frac{\partial U_\eta}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\varphi^2}{2} \right) e^{-2\xi} + \frac{1}{\text{Re}_1} \frac{\partial^2 U_\eta}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\eta}{\partial \eta} &= 0, \end{aligned}$$

где $\text{Re}_1 = \rho_0 v_0 / \eta_0 \alpha^2 r_1$ — число Рейнольдса — отношение времени вязкой диффузии на расстояния порядка длины затухания звука к характерному времени установления течения ($t_1 = r_1/v_0$). При граничных условиях непроницаемости и проскальзывания на излучающей поверхности ($\xi = 0$) система

нелинейных уравнений (9) имеет точное решение:

$$(10) \quad U_{\xi} = \left(\frac{e^{-2\xi} - 1}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} V(\eta, \theta), \quad U_{\eta} = e^{-2\xi} V(\eta, \theta).$$

Здесь функция $V(\eta, \theta)$ удовлетворяет неоднородному квазилинейному управлению в частных производных первого порядка:

$$(11) \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} + V \frac{\partial V}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\varphi^2}{2} \right) + \frac{4}{\text{Re}_1} V.$$

Она должна обращаться в нуль в начальный момент времени и на боковой поверхности ($y = \pm r_2$).

Решение линеаризованного уравнения (11) неограниченно возрастает с течением времени

$$(12) \quad V = \frac{\text{Re}_1}{4} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\varphi^2}{2} \right) \left[\exp \left(\frac{4\theta}{\text{Re}_1} \right) - 1 \right]$$

поэтому, начиная с момента

$$(13) \quad \theta \sim \frac{\text{Re}_1}{4} \ln \left(1 + \frac{2}{\text{Re}_1^2} \right)$$

инерционный член в уравнении движения начинает превосходить вязкостный, и учет гидродинамической нелинейности становится принципиально необходимым (ср. [1]). Из оценки (13) следует, что при $\text{Re}_1 \gg 1$ решение (12) справедливо лишь на начальном этапе установления звукового ветра ($\theta \ll 1$).

Эволюцию профиля V поперечной составляющей скорости акустического ветра с учетом гидродинамической нелинейности удобно анализировать методом фазовой плоскости [3]. Изображающие точки двигаются по интегральным кривым стационарного (при $\partial V / \partial \theta = 0$) уравнения (11). При гауссовском распределении поля на излучателе ($\varphi(\eta) = \exp(-\eta^2)$) особая точка ($\eta = 0, V = 0$) является неустойчивым узлом при $\text{Re}_1 \leq \sqrt{2}$, неустойчивым фокусом при $\text{Re}_1 > \sqrt{2}$ и центром при $\text{Re}_1 \rightarrow \infty$. Фазовый портрет системы можно построить при произвольном числе Рейнольдса Re_1 известными графическими методами [4]. Однако основные закономерности развития течения проще выявить, исследуя предельный случай больших чисел Рейнольдса. Отметим, что $\text{Re}_1 \gg 1$ при малой сдвиговой вязкости, и это хорошо согласуется с принятым для нахождения решения (10) условием проскальзывания на поверхности жидкости. В рассматриваемых асимптотических ($\eta_0 \rightarrow 0$) условиях фазовый портрет системы описывается аналитически:

$$V = \pm \sqrt{\varphi^2 - c},$$

где c — параметр траектории движения. Стационарное (при $\theta \rightarrow \infty$) решение имеет вид

$$V_{\infty} = -\text{sgn}(\eta) \sqrt{\varphi^2(\eta) - \varphi^2(\eta_1)}.$$

Здесь $\eta_1 = \pm r_2 / r_1$ — безразмерная координата боковой поверхности. Фазовый портрет течения в неограниченном $\eta_1 \rightarrow \infty$ объеме представлен на фиг. 1, а, где построены траектории с параметрами $c \cdot 10^2 = 0, 9, 36, 64, 91$. Стрелками указано направление движения изображающих точек.

Каждая точка произвольного профиля перемещается вдоль траектории проходящей через нее в начальный момент времени. Поэтому для определения ее положения через время $d\theta$ достаточно вычислить смещение $d\eta$, используя характеристическое уравнение $d\eta = V d\theta$ [3]. Отметим, что, так

как V является ординатой точки на фазовой плоскости, то последняя содержит всю информацию, необходимую для построения профиля в любой последующий момент времени. Исключение составляет случай, когда изображающая точка попадает на ось абсцисс ($V=0$). Тогда для определения ее смещения надо использовать другое характеристическое уравнение $dV = \frac{d}{d\eta}(\varphi^2/2)d\theta$ [3]. На фиг. 1, б отражено развитие профиля поперечной составляющей скорости потока с течением времени. Фронт проводится по правилу равенства площадей. Отметим, что для описания эволюции акустического ветра в ограниченном с боков объеме достаточно использовать лишь траектории, лежащие в области $|\eta| \leq |\eta_1|$.

Конечно, для некоторых частных профилей $\varphi(\eta)$ распределения звукового поля на излучателе возможно аналитическое решение неоднородного уравнения простых волн (11). Например, для $\varphi(\eta) = \text{ch}^{-1} \eta$ при $\text{Re}_1 \gg 1$ получаем следующее соотношение, определяющее $V(\eta, \theta)$ неявным образом:

$$\theta = -\frac{1}{\sqrt{V_\infty^2 - V^2}} \arccos \times \\ \times \left(V \sqrt{\frac{V_\infty^2 - V^2}{V_\infty^2 - V^2 \text{sh}^{-2} \eta}} \right),$$

где

$$V_\infty^2 = \text{ch}^{-2} \eta.$$

Однако анализ течения с помощью фазовой плоскости представляется более наглядным и не ограничен специальным выбором профиля распределения интенсивности в звуковом пучке.

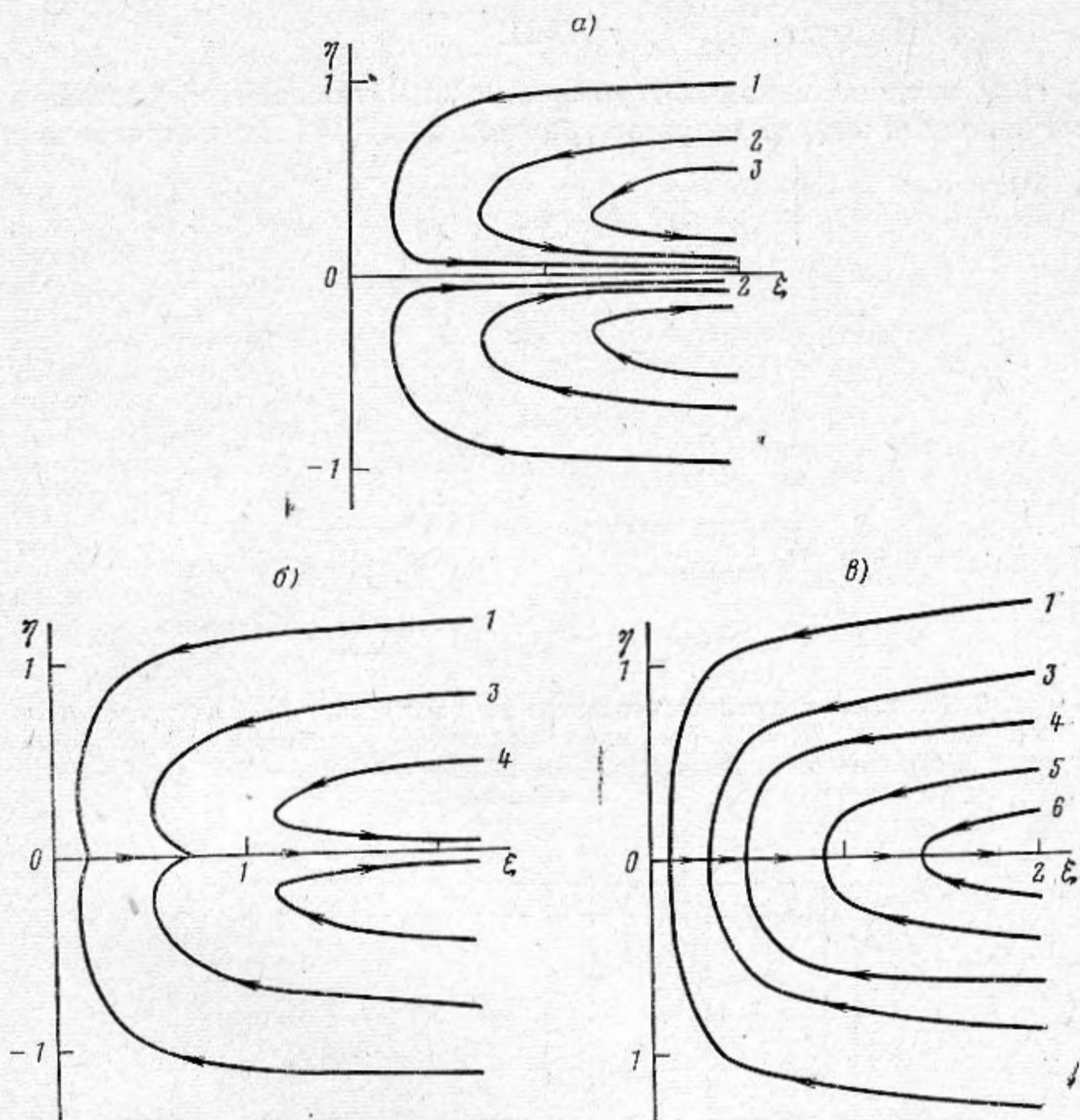
Фиг. 1. Анализ эволюции акустического течения на фазовой плоскости. Профиль поперечной составляющей скорости потока в последовательные моменты времени: $\theta=0,2; 0,4; 0,8; 1,2; \infty$

На фиг. 2 представлена картина линий тока в моменты времени $\theta=0,8; 1,2; \infty$. Функции $\xi(\eta, \theta)$ построены по формуле

$$\xi = -\frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{C}{|V(\eta, \theta)|} \right),$$

следующей из решения (10). Кривым 1-6 на фиг. 2 соответствуют значения константы $C \cdot 10^2$, равные 18, 37, 45, 63, 83, 94 соответственно. Анализ полученных решений показывает, что по мере развития акустического течения поперечный размер потока направленного от излучателя вдоль оси ξ неограниченно уменьшается (фиг. 3). На расстоянии порядка длины затухания звука ($\xi \sim 1$) подток жидкости к оси в силу решения (10) практически отсутствует и реализуется линейная струя — источник [5]. Таким образом, в сильнозатухающем звуковом поле на оси z формируется струя-источник, характеризующаяся потоком импульса $J_x = \rho_0 v_0^2 / 2\alpha$ и потоком

массы $M = \rho_0 v_0 / \alpha$. Отметим, однако, что суммарный поток массы через любое поперечное сечение среды равен нулю. Приведем следующие оценки для акустических чисел Маха порядка 10^{-5} : в воде при частотах звука в области десятков МГц поток массы $M \sim 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$, в воздухе при $\omega \sim 1 \text{ МГц}$ $M \sim 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$.



Фиг. 2. Линии тока для гладкого (а), разрывного (б) и стационарного разрывного (в) течений. Стрелки указывают направление движения элементов жидкости

Для описания структуры потока вблизи плоскости $\eta = 0$ можно использовать уравнение

$$(14) \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} + V \frac{\partial V}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\varphi^2}{2} \right) + \frac{4}{\text{Re}_1} V + \frac{2}{\text{Re}_2} \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2},$$

которое можно получить, сохраняя при переходе от системы (3)–(5) к упрощенной системе (5), (7) вязкостные слагаемые, существенно возрастающие вблизи разрыва профиля $V(\eta, \theta)$. В уравнении (14) число Рейнольдса $\text{Re}_2 = \rho_0 v_0 r_1 / \eta_0$ включает время вязкой диффузии на расстояния порядка характерного поперечного размера звукового пучка r_1 . В силу предположения (2) $\text{Re}_2 / \text{Re}_1 = (\alpha r_1)^2 \gg 1$ и, следовательно, последнее уравнение отличается от уравнения (11) только вблизи фронтов, где наблюдаются значительные поперечные градиенты и сильный отток импульса в продольном направлении. Используя уравнение (14), оценим поперечный размер установившегося приосевого течения:

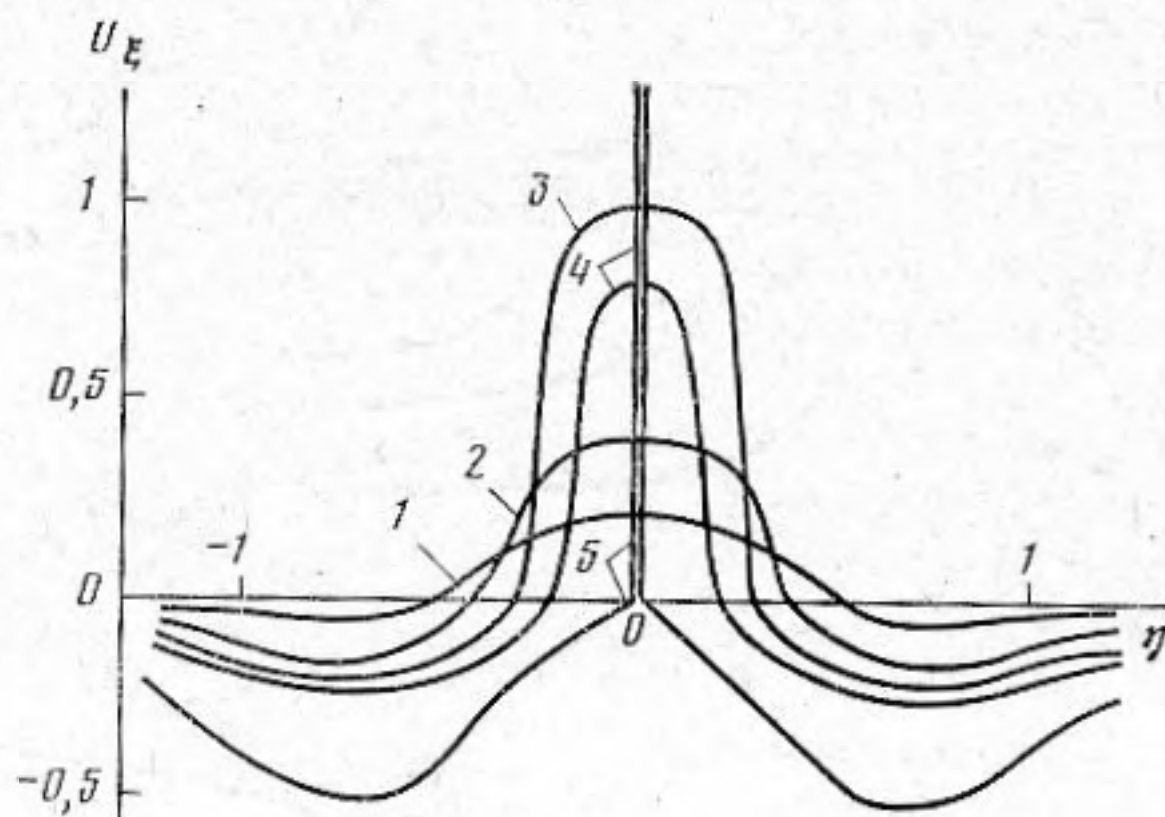
$$(15) \quad r_3 \sim 8 \eta_0 / \rho_0 v_0.$$

Заметим, что он не зависит ни от длины затухания звука, ни от размеров излучателя и определяется только кинематической вязкостью среды

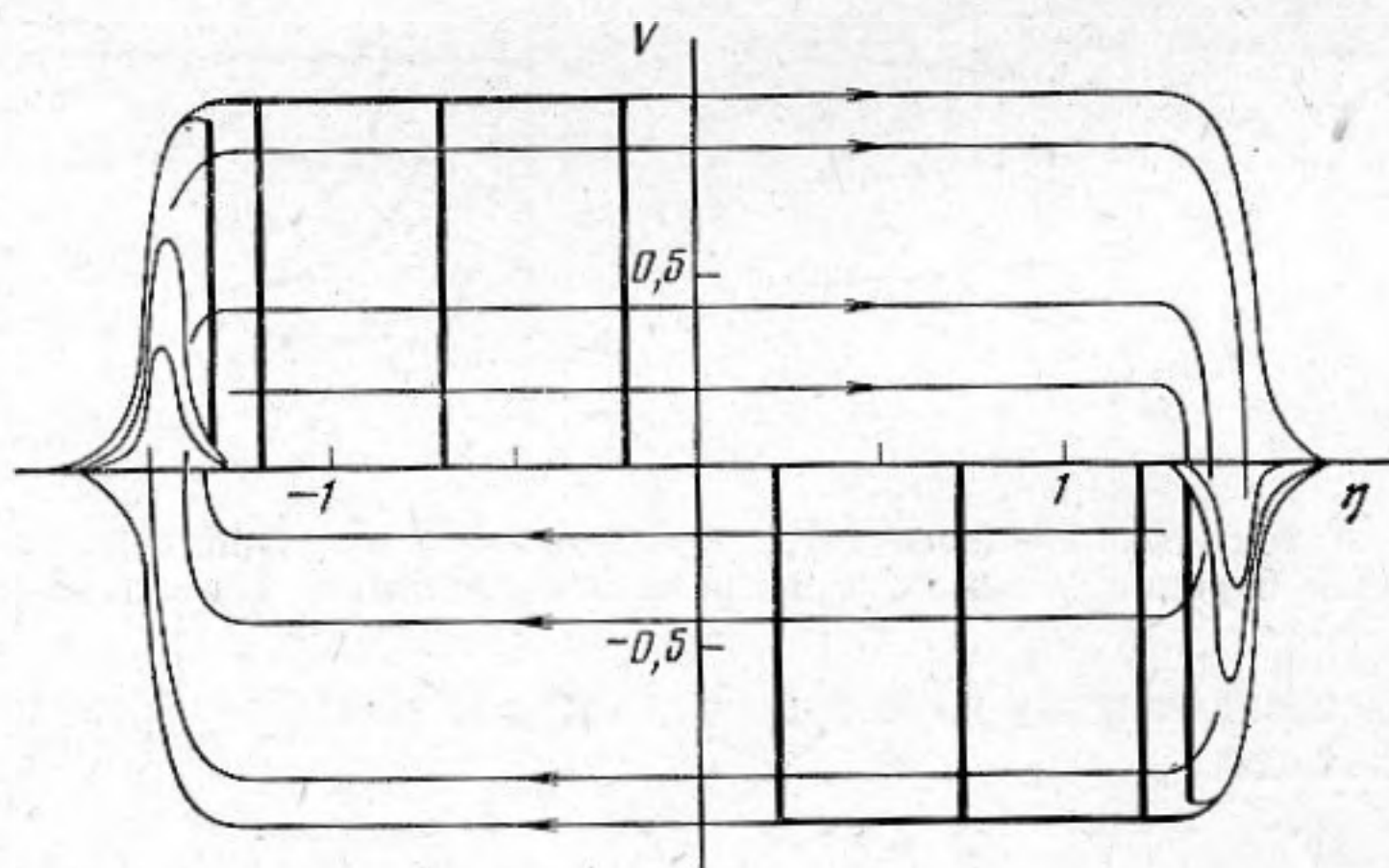
и амплитудой звуковой волны. Оценки по формуле (15) для акустических чисел Маха порядка 10^{-5} дают значения $r_3 \sim 10^{-3}$ м в воде и $3 \cdot 10^{-2}$ м в воздухе. Условие (2) применимости упрощенных уравнений с учетом формулы (15) и возможности существования боковых границ нужно переписать в виде

$$\alpha \cdot \min(r_1, r_2, r_3) \gg 1, \quad r_1/L \ll 1.$$

В силу экспоненциального убывания (10) поперечной составляющей скорости акустического ветра на расстояниях $\xi \gg 1$ от излучателя нару-



Фиг. 3. Развитие акустического ветра на расстоянии $\xi \sim 1$ от излучателя ($U_{\xi} \approx -0,5 \partial V / \partial \eta$, $U_{\eta} \approx 0$). Профили продольной составляющей скорости течения в моменты времени: 1 — $\theta = 0,2$; 2 — $\theta = 0,4$; 3 — $\theta = 0,6$; 4 — $\theta = 1$; 5 — $\theta = \infty$



Фиг. 4. Эволюция акустического течения в случае близкого к прямоугольному распределения звукового поля на излучателе. Представлены фазовые траектории с параметрами $c \cdot 10^2 = 0,25, 81, 96$ и профиль поперечной составляющей скорости потока в моменты времени $\theta = 0,1; 0,2; 0,4; 0,6; 1,6; 2,6$

шается соотношение масштабов (6), и для описания течения более подходят «квазиэкартовские» уравнения [1], в которых, к тому же, можно не учитывать внешнее воздействие (8). Таким образом, движение жидкости в области $\xi \gg 1$ носит характер нестационарной затопленной струи. Наконец, если на поверхности излучателя или на стенке сосуда имеет место прилипание жидкости, то полученные в настоящей работе решения нелинейной нестационарной задачи необходимо сшивать с решениями линеаризованной системы уравнений (3) — (5), которая будет справедлива в приграничной области (ср. [6]).

В заключение отметим, что при определенной геометрии распределения поля на излучателе разрыв в профиле $V(\eta, \theta)$ поперечной составляющей скорости потока может возникать на расстояниях $|\eta| = |\eta_2| \neq 0$ и лишь с течением времени приближаться к оси (на фиг. 4 $|\eta_2| \simeq 1,33$). В этом случае продольная составляющая скорости ветра в плоскости $|\eta| = |\eta_3| \leq |\eta_2|$ существенно возрастает в момент, когда фронт пересекает эту плоскость, и в целом установление акустического течения происходит немонотонно (ср. [1]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусев В. Э., Руденко О. В. Нестационарные квазиодномерные акустические течения в неограниченных объемах с учетом гидродинамической нелинейности.— Акуст. ж., 1979, т. 25, № 6, с. 875–881.
2. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
3. Гусев В. Э., Карабутов А. А. К вопросу о возбуждении акустических импульсов распределенными источниками, движущимися с трансзвуковой скоростью.— Акуст. ж., 1981, т. 27, № 2, с. 213–219.
4. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. М.: Мир, 1968.
5. Булис Л. А., Кашкаров В. П. Теория струй вязкой жидкости. М.: Наука, 1965.
6. Островский Л. А., Папилова И. А. О нелинейном акустическом ветре.— Акуст. ж., 1974, т. 20, № 1, с. 79–86.

Московский государственный
университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
9.X.1980