

УДК 534.232

РАСЧЕТ РАДИАЛЬНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ
В НЕЛИНЕЙНОМ РЕЖИМЕ

Казанцев В.Ф.

Проведен расчет радиальной колебательной системы с кольцевым магнитострикционным элементом. Получено выражение для амплитуды радиальных колебательных смещений с учетом величины акустических потерь, нелинейности магнитострикционных характеристик материала и влияния механических напряжений.

В процессах обработки металлов давлением с применением ультразвука чаще всего используется колебательная система радиального типа с кольцевым магнитострикционным элементом (см., например, [1]). Расчету кольцевых магнитострикционных преобразователей в линейном режиме посвящены работы [2, 3]. Высокий уровень ультразвуковых деформаций, при которых работает кольцевой активный элемент, обуславливает необходимость учета нелинейных свойств магнитострикционных материалов. Для стержневых магнитострикционных преобразователей исследования с учетом этих факторов выполнены в работах [4-6]. Особенности расчета радиальных колебательных систем в нелинейном режиме рассматриваются в настоящей работе.

Распределение амплитуды радиальных колебательных смещений ξ_m в однородном диске радиуса r_1 с внешним кольцевым магнитострикционным элементом толщиной $(r_2 - r_1)$ описывается известным уравнением

$$(1) \quad \xi_m''(r) + \frac{1}{r} \xi_m'(r) + \left(\tilde{k}^2 - \frac{1}{r^2} \right) \xi_m(r) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq r \leq r_1 \\ \frac{(\sigma_M)_m (1 - \nu^2)}{Er} & \text{при } r_1 \leq r \leq r_2 \end{cases},$$

где $\tilde{k} = k_0 \left(1 - \frac{i}{2Q_0} \right)$, $k_0 = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{1 - \nu^2}$, $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Здесь $\xi_m(r)$ — амплитуда

радиальных колебательных смещений, зависящая от радиуса r ; ω — круговая частота; c_0 , ρ , E , ν и Q_0^{-1} — стержневая скорость звука, плотность, модуль Юнга при постоянной намагниченности материала, коэффициент Пуассона и коэффициент потерь материала (мы предполагаем, что механические параметры кольца и диска одинаковы); $(\sigma_M)_m$ — амплитуда гармонической составляющей возбуждающего магнитострикционного напряжения на частоте ω , направленного вдоль окружности среднего радиуса кольцевого магнитострикционного элемента. При этом основные уравнения, описывающие состояние магнитострикционного материала, в каж-

дой точке, с учетом нелинейности, имеют вид

$$\sigma = E\varepsilon - \sigma_M(M, \sigma), \quad (2)$$

$$B = H + 4\pi M(H, \sigma).$$

Здесь σ , ε , H , B и M — соответственно мгновенные значения тангенциальных компонент механического напряжения и деформации, напряженности и индукции магнитного поля и намагниченности; $\sigma_M(M(H, \sigma), \sigma)$ — величина магнитоупругого напряжения.

Амплитуду магнитоупругого напряжения на основной частоте будем искать, полагая, что в кольцевом магнитоупругом элементе с помощью тороидальной обмотки создается магнитное поле с напряженностью $H(t) = H_0 + H_m \cos \omega t$. При этом намагниченность $M(H, \sigma)$ и магнитоупругое напряжение $\sigma_M(H, \sigma)$ — существенно нелинейные функции напряженности магнитного поля и сравнительно слабо зависят от механического напряжения. Это позволяет нам при разложении указанных выше функций в ряд по степеням σ ограничиться линейными членами:

$$M(H, \sigma) = M(H, 0) + \frac{\partial M}{\partial \sigma}(H, 0) \cdot \sigma + \dots$$

$$(3) \quad \sigma_M(M(H, \sigma), \sigma) = \sigma_M(M(H, 0), 0) + \left[\frac{\partial \sigma_M}{\partial \sigma}(M(H, 0), 0) + \frac{\partial \sigma_M}{\partial M}(M(H, 0), 0) \cdot \frac{\partial M}{\partial \sigma}(H, 0) \right] \cdot \sigma + \dots$$

Решение ищем путем последовательных приближений по методу, аналогичному описанному в работе [6]. Для этого определяем амплитуду первой гармоники магнитоупругого напряжения на основной частоте ω без учета влияния механического напряжения, находим распределение амплитуды колебательных смещений и напряжений в системе, затем вычисляем амплитуду тангенциальных напряжений в кольце и рассчитываем поправку второго приближения с учетом зависимости намагниченности и магнитоупругого напряжения от величины σ .

Решая уравнение (1), получим следующее выражение для распределения амплитуды радиальных колебательных смещений:

$$(4) \quad \xi_m(r) = \begin{cases} AJ_1(\tilde{k}r) & \text{при } 0 \leq r \leq r_1 \\ \frac{(r_2 - r_1)(\tilde{k}r)(1 - \nu^2)}{2E} (\sigma_M)_m + AJ_1(\tilde{k}r) & \text{при } r_1 \leq r \leq r_2 \end{cases},$$

где $J_1(\tilde{k}r)$ — функция Бесселя первого порядка, постоянная A определяется из условия равенства нулю радиальных напряжений на внешней цилиндрической поверхности магнитоупругого элемента, что эквивалентно условию $\xi_m'(r_2) + \frac{\nu}{r_2} \xi_m(r_2) = 0$. Величина тангенциальных на-

пряжений в кольцевом элементе может быть вычислена по формуле

$$\sigma = E(1 - \nu^2)^{-1} [\nu \xi_m'(r) + \xi_m(r)/r].$$

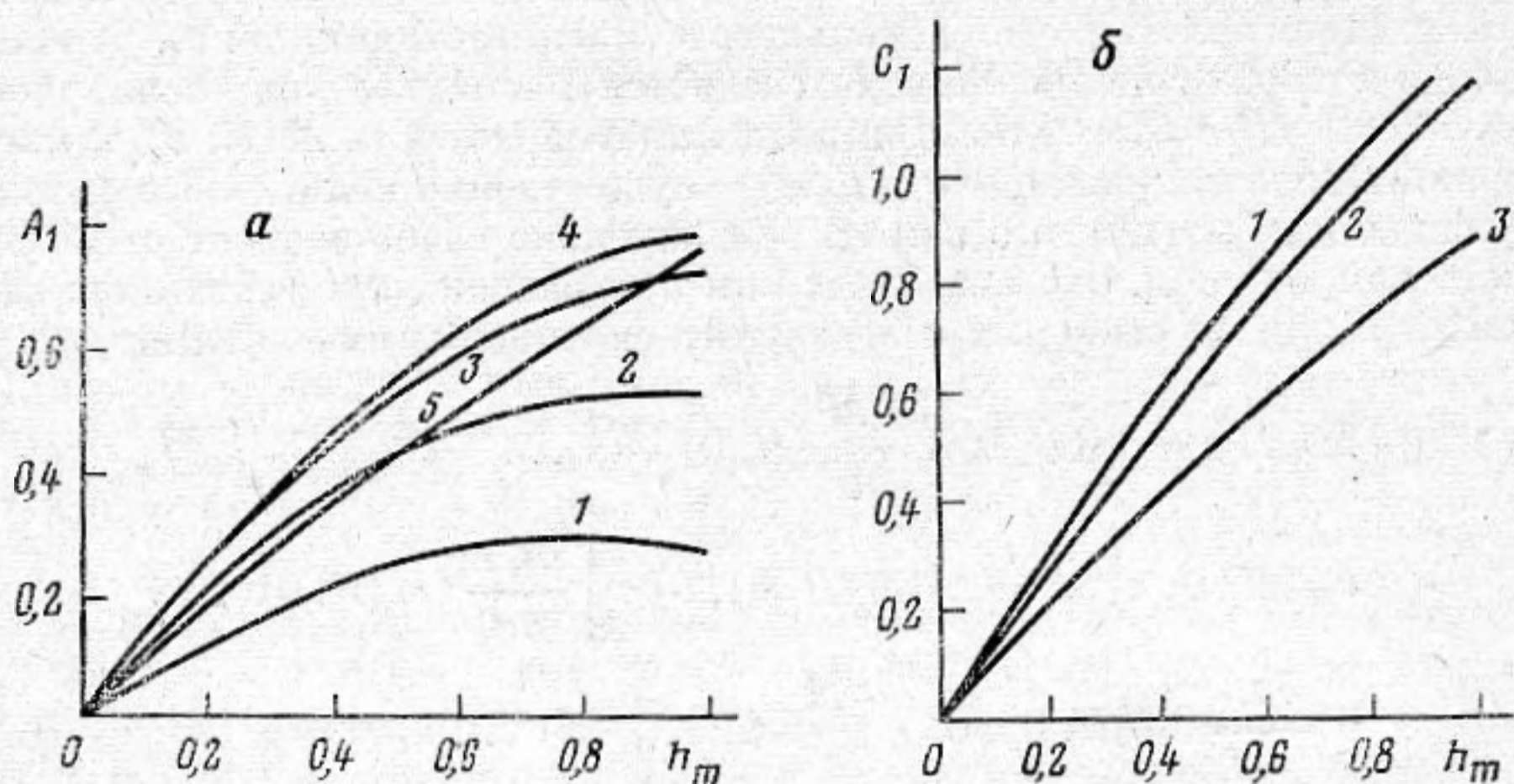
Нами предлагается следующий конкретный вид функций $\sigma_M(M, \sigma)$ и $M(H, \sigma)$, полученный на основе аппроксимации результатов исследований [3, 7], позволяющих вычислить амплитуду магнитоупругих напряжений $(\sigma_M)_m$ в нулевом и первом приближениях по σ :

$$(5) \quad \sigma_M(M, \sigma) = \frac{3}{2} \frac{\lambda_s E}{1 + 0,5 \exp \sigma/\sigma_0} \cdot \left(\frac{M}{M_s} \right)^2,$$

$$(5) \quad M(H, \sigma) = M_s \operatorname{th} \frac{\kappa_0(1+p_0)H}{[1+p_0 \exp(-\sigma/p_0\sigma_0)]M_s}.$$

Здесь λ_s — магнитоотрицательная намагниченность насыщения в отсутствие внешних напряжений, M_s — намагниченность насыщения, κ_0 — начальная магнитная восприимчивость, σ_0 и p_0 — параметры, постоянные для данного материала. В частности, для никеля, по данным работы [3, с. 125], $\sigma_0 = 5,2 \cdot 10^7$ Па; $p_0 \approx 0,6$.

В конечном итоге, с учетом сделанных предположений получим следующее выражение для амплитуды колебательных смещений на ξ_{m0} внеш-



Фиг. 1. Зависимость коэффициентов A_1 (а) и C_1 (б) от относительной амплитуды напряженности магнитного поля $h_m = \kappa_0 H_m / M_s$ при разных значениях $h_0 = \kappa_0 H_0 / M_s$:
1 — $h_0 = 0,2$; 2 — $0,4$; 3 — $0,6$; 4 — $0,8$; 5 — $1,2$

ней боковой поверхности радиальной колебательной системы:

$$(6) \quad \xi_{m0} = \frac{2}{\pi} \frac{c_0 \lambda_s \sqrt{1-\nu^2}}{\omega} \cdot |F_1| \cdot A_1 (1 + |b|).$$

Сомножитель F_1 зависит от волновых размеров колебательной системы $k_0 r_1$ и $k_0 r_2$ и величины коэффициента потерь в ней согласно выражению

$$(7) \quad F_1 = \frac{(\tilde{\kappa} r_1)^2 \tilde{\kappa} (r_2 - r_1)}{(\tilde{\kappa} r_2) J_0(\tilde{\kappa} r_2) + (\nu - 1) J_1(\tilde{\kappa} r_2)}.$$

Сомножитель A_1 характеризует относительную амплитуду магнитоотрицательного напряжения в зависимости от относительной амплитуды напряженности переменного магнитного поля $h_m = \frac{\kappa_0 H_m}{M_s}$ и относительного постоянного поля $h_0 = \frac{\kappa_0 H_0}{M_s}$. С учетом ранее предложенной аппроксимации (5)

$$(8) \quad A_1(h_m, h_0) = \int_0^\pi \operatorname{th}^2(h_0 + h_m \cos \omega t) \cdot \cos \omega t d(\omega t).$$

График зависимости A_1 от h_m при разных значениях h_0 , рассчитанный по формуле (8), приведен на фиг. 1, а.

Коэффициент b , который входит в выражение (6), представляет собой поправку, связанную с учетом влияния механического напряжения на амплитуду вынуждающего магнитоотрицательного напряжения. Она

имеет такой вид

$$b = \frac{\lambda_s E}{6\pi\sigma_0} \cdot F_1 \left[\frac{\nu J_0(\tilde{k}r_2)}{\tilde{k}r_2} + (1-\nu)J_1(\tilde{k}r_2) \right] (A_2 \cos \psi + iA_3 \sin \psi).$$

Здесь

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} F_1}{\operatorname{Re} F_1},$$

$$A_2 = \int_0^{2\pi} \varphi(h_0 + h_m \cos \omega t) (1 + \cos 2\omega t) d(\omega t),$$

$$A_3 = \int_0^{2\pi} \varphi(h_0 + h_m \cos \omega t) (1 - \cos 2\omega t) d(\omega t),$$

где

$$\varphi(z) = \frac{\operatorname{th} z (\operatorname{sh} 2z + 3p_0 z)}{1 + \operatorname{ch} 2z}.$$

Проведенные нами оценки для радиальной кольцевой системы с пермендуровым или никелевым преобразователем и при добротности материала $Q \approx 10^3 - 10^2$ показали, что поправкой b можно пренебречь.

Таким образом, приближенное выражение для определения максимальной резонансной амплитуды ξ_{\max} колебательных смещений на внешней поверхности радиальной колебательной системы имеет вид

$$(9) \quad \xi_{\max} = \frac{4Q_0 \lambda_s \sqrt{1-\nu^2} \cdot (k_0 r_1) (r_2 - r_1)}{\pi [\nu J_0(k_0 r_2) + k_0 r_2 - (1-\nu)J_1(k_0 r_2)/k_0 r_2]} \cdot A_1(h_m, h_0).$$

Учитывая связь между амплитудами индукции и намагниченности материала (см. формулы (2) и (5)), получим следующее выражение для амплитуды электрического напряжения U_m на входе преобразователя:

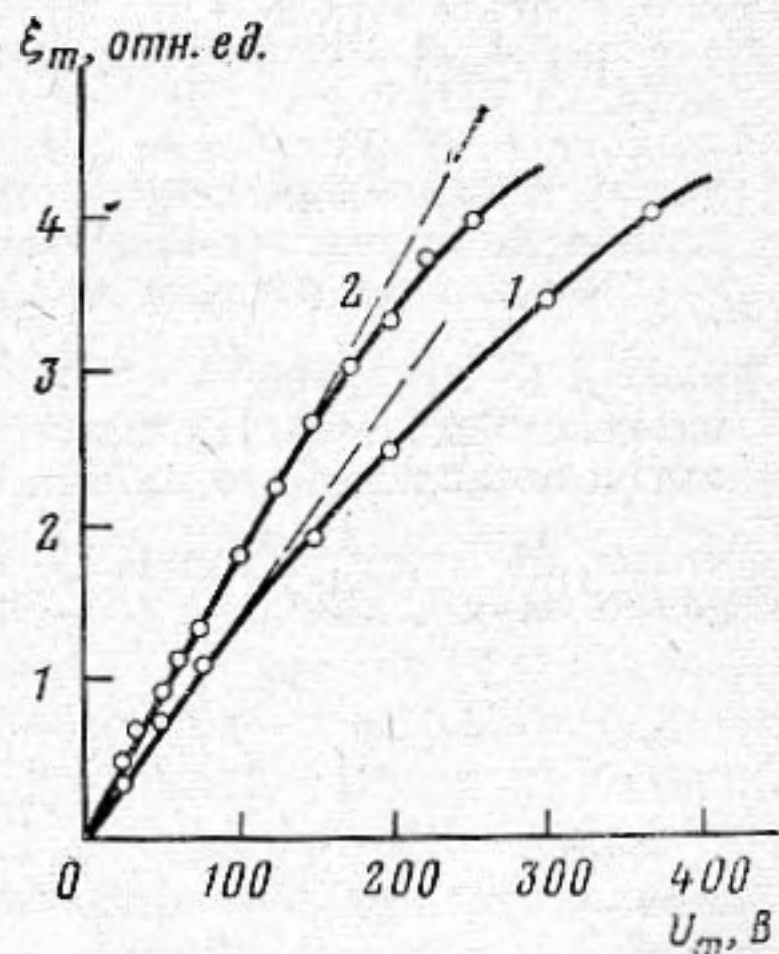
$$(10) \quad |U_m| \approx NS \frac{dM}{dt} = 8N\omega SM_s C_1(h_m, h_0),$$

$$(11) \quad C_1(h_m, h_0) = \int_0^{\pi} \operatorname{th}(h_0 + h_m \cos \omega t) \cos \omega t d(\omega t).$$

Здесь N — число витков обмотки преобразователя, S — площадь поперечного сечения кольцевого магнитострикционного элемента. График зависимости C_1 от величины h_m при нескольких значениях h_0 приведен на фиг. 1, б. Как видно из приводимых графиков, при малых значениях h_m коэффициенты A_1 и C_1 пропорциональны h_m . Отсюда следует, что в линейном режиме амплитуда колебательных смещений при резонансе пропорциональна амплитуде электрического напряжения на входе.

Характер зависимости $\xi_{\max}(U_m)$ при любом U_m можно рассчитать, если сопоставить значения коэффициентов A_1 и C_1 при одинаковых h_m и h_0 .

Полученная зависимость сопоставлялась с результатами эксперимента¹. Исследуемая конструкция состояла из кольцевого магнитострикцион-



Фиг. 2. Зависимость амплитуды радиального смещения ξ_m от амплитуды электрического напряжения U_m при двух значениях тока подмагничивания I_0 . 1 — $I_0 = 15$ А; 2 — $I_0 = 35$ А

¹ Экспериментальные исследования проводились с участием В. Е. Сумкина и Л. К. Васина.

ного элемента, собранного из пермендюрных пластин с внешним диаметром 205 мм, внутренним 62, толщиной 50 мм, внутрь которого запрессовывалась титановая втулка с фильерой. В процессе экспериментов с помощью предварительно калиброванного кольцевого пьезоэлемента, приклеенного к втулке, определялась амплитуда радиальных колебательных смещений (деформаций) при резонансе в зависимости от величины электрического напряжения на входе при разных значениях тока подмагничивания. Результаты измерения приведены на фиг. 2. Теоретическая зависимость, построенная по формулам (8—11), изображена сплошной линией.

Как уже указывалось, при малых U_m $\xi_{\max} \sim U_m$, т. е. чувствительность преобразователя постоянна. При построении графика масштаб теоретической кривой подбирался так, чтобы расчетная чувствительность при малых U_m соответствовала экспериментально измеренной. В дальнейшем при увеличении U_m экспериментально полученные значения ξ_m ложатся на расчетную кривую $\xi_m(U_m)$, которая искривляется тем больше, чем выше U_m .

В заключение автор выражает глубокую благодарность И. П. Голяминой за помощь при подготовке этой работы к печати.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамов О. В., Васин Л. К., Казанцев В. Ф., Мицкевич А. М., Сумкин В. Е.* Экспериментальное исследование ультразвуковых колебательных систем радиального типа: Тез. докл. Всес. науч.-техн. семинара «Создание и применение аппаратуры для ультразвуковых технологических процессов в машиностроении». М.: ЦИ НТО Машпром, 1978, ч. I, с. 59—64.
2. *Гутин Л. Я.* Избранные труды. Л.: Судостроение, 1978, с. 164.
3. *Ультразвуковые преобразователи / Под ред. Кикучи Е. М.:* Мир, 1972.
4. *Ганева Л. И., Голямина И. П.* Амплитудная зависимость свойств магнитоострикторов и ограничение излучаемой в жидкость мощности.— Акуст. ж., 1974, т. 20, № 3, с. 378—385.
5. *Полякова А. Л.* Нелинейные явления в магнитоострикционных излучателях звука. Докл. на VIII Всес. акуст. конф. М.: 1973, 31В—6.
6. *Казанцев В. Ф.* Колебания стержневого магнитоострикционного преобразователя с учетом нелинейной зависимости магнитоострикции от напряженности магнитного поля и механических напряжений: Тез. докл. на IV Всес. науч.-техн. конф. по ультразвуковым методам интенсификации технологических процессов. МИСиС, 1979.
7. *Бородин В. И., Баранова Н. А., Кулеев В. Г.* Влияние механических напряжений на некоторые свойства магнитоострикционных материалов (эксперимент).— Физ. мет. и металловедение, 1972, т. 33, № 1, с. 94—105.

Акустический институт им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
24.IV.1979