АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXVII 1981 Вып. 6

УДК 534.24–26

О МЕТОДАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ОТРАЖЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ ОТ РЯДА ЖИДКИХ И УПРУГИХ СЛОЕВ

Маслов В. П.

Получены выражения метода последовательных приближений для упругих слоев на основе новой формулы для коэффициента отражения.

В монографии [1], § 25 рассмотрены два метода последовательных приближений для определения коэффициента отражения от жидкого слоя с непрерывным изменением параметров по вертикали. Первый метод, который удобно применять для тонких слоев, задает коэффициент отражения в виде отношения рядов по степеням волновой толщины слоя. Коэффициентами рядов являются k-кратные интегралы по толщине слоя. Второй метод дает быстро сходящийся ряд в случае слабоотражающих слоев, где в качестве первого приближения можно применять геометрическую акустику.

В работе [2] получены выражения метода последовательных приближений для тонких упругих неоднородных слоев. Коэффициент отражения представлен в виде отношения матричных рядов. Коэффициентами рядов являются k-кратные интегралы по толщине слоя.

В настоящей работе получены выражения второго метода последовательных приближений для упругих слабоотражающих слоев. Нулевое приближение, для которого коэффициент отражения равен нулю, соответствует приближению геометрической акустики. Первое приближение соответствует учету однократных отражений в неоднородной среде, последующие – двукратным, трехкратным и т. д. отражениям. Далее, приближение геометрической акустики для упругой среды, или нулевое приближение, представлено в виде ряда по степеням малых величин. Первый член ряда определяет изменение амплитуд продольной и поперечной волн в неоднородной среде в зависимости от глубины. Второй член ряда соответствует однократным преобразованиям продольной волны в поперечную и поперечной в продольную. Последующие члены ряда соответствуют двукратным, трехкратным и т. д. преобразованиям волн. Проиллюстрируем метод на примере жидкого неоднородного слоя.

Коэффициент отражения от n жидких однородных слоев выражается формулой [2]:

(1) $$V=(b_{11}+b_{12}-b_{21}-b_{22})/(b_{11}+b_{12}+b_{21}+b_{22}),$$

где

(2) $$|b_{ik}|=\prod_{j=0}^{n} F(-k_{jz}h_j)M_{j+1,j},$$

(3) $$M_{j+1,\,j}=1\oplus q_j/q_{j+1},$$

(4) $$F(x)=\begin{vmatrix} \cos x & i\sin x \\ i\sin x & \cos x \end{vmatrix}$$

Знак $\oplus$ обозначает прямую сумму. Слои пронумерованы в порядке убывания; полупространство, из которого падает волна, имеет номер $(n+1)$, h_j — толщина слоя, k_{jz} — z — компонента волнового вектора $\mathbf{k}_j=k_{jz}\mathbf{e}_z+ +\xi\mathbf{e}_x$ в j-м слое, $q_j/q_{j+1}=\cos\theta_j\rho_{j+1}c_{j+1}(\cos\theta_{j+1}\rho_j c_j)^{-1}$, ρ_j — плотность жидкости, c_j — скорость звука, θ_j — угол падения.

В случае низких частот, полагая

$$\cos k_{jz}h_j=1,\ \sin k_{jz}h_j=k_0 n_j \sin\theta_j dz,$$

получим разложение по степеням волновой толщины слоя. Если толщина каждого слоя мала, но частота велика, волновую толщину слоя нельзя считать малой. В этом случае медленно меняющимися функциями будут параметры среды. Представим матрицу (3) как сумму единичной и близкой к нулю матриц:

$$M_{j+1,\,j}=E+G_{j+1,\,j}=(1\oplus 1)+(0\oplus(q_j-q_{j+1})/q_{j+1}).$$

Нулевым приближением возьмем

$$|b_{ik}^{(0)}|=b^{(0)}(H,0)=\prod_{j=1}^{n}F(-k_{jz}h_j)=F\left(-\sum_{j=1}^{n}k_{jz}h_j\right).$$

Если это выражение подставить в формулу (1), получим коэффициент отражения равным нулю, что соответствует приближению геометрической акустики. Первым приближением возьмем произведения, где сомножитель $G_{j+1,\,j}$ встречается один раз

$$b^{(1)}=\sum_{j=0}^{n}b^{(0)}(H,Z_{j+1})G_{j+1,j}b^{(0)}(z_j,0).$$

Подставив в формулу (1) выражение $|b_{ik}|=b^{(0)}+b^{(1)}$, получим

$$V^{(1)}=-\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{q_j-q_{j+1}}{q_{j+1}}\exp\left[-2i\sum_{l=j}^{n}k_{lz}h_l\right]\right\}\left(2+\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j-q_{j+1}}{q_{j+1}}\right)^{-1}.$$

Чтобы уяснить физический смысл этого приближения, возьмем по одному слагаемому из сумм в числителе и знаменателе. Тогда

$$V_j^{(1)}=(q_{j+1}-q_j)(q_{j+1}+q_j)^{-1}\exp\left[-2i\sum_{l=j}^{n}k_{lz}h_l\right],$$

что, учитывая обратный порядок нумерации слоев, совпадает с выражением (25. 36) работы [1] и представляет собой волну, отраженную от слоя. Перейдем к интегральной форме, заменяя q_j-q_{j+1} на $q'(z)dz$.

$$V=\frac{-\int_0^H\gamma(z)\exp\left[2i\int_0^z\beta(z_0)dz_0\right]dz}{1+\ln[q(H)]-\ln[q(0)]},$$

где $\gamma(z)=q'/(2q)$, $\beta(z_0)=k_z(z_0)$. Если знаменатель положить равным единице, то это выражение совпадает с выражением (25. 34) работы [1].

Приближением порядка k возьмем слагаемые, в которых сомножитель $G_{j+1,\,j}$ встречается k раз. Это приближение соответствует k-кратным отражениям. Применим теперь изложенный метод к ряду упругих слоев.

Рассмотрим одновременное падение продольной и поперечной волн на m упругих слоев, лежащих на однородном упругом полупространстве. Введем матрицу коэффициентов отражения V по смещению равенством $\mathbf{u}_{\text{отр}}=V\mathbf{u}_{\text{пад}}$, где смещения $\mathbf{u}_{\text{отр}}$ и $\mathbf{u}_{\text{пад}}$ представляют собой сумму смещений продольной и поперечной волн на границе. При этом, например, коэффициент отражения продольной волны при падении продольной волны будет выражаться равенством

$$V_{ll}=\mathbf{k}_{l\,\text{отр}}\cdot V\cdot\mathbf{k}_{l\,\text{пад}},$$

где $\mathbf{k}_l$ — волновой вектор продольной волны. Коэффициент отражения по смещению от m слоев записывается в виде [2]

$$V=(-1\oplus 1)\,(B_{11}+B_{12}-B_{21}-B_{22})\,(B_{11}+B_{12}+B_{21}+B_{22})^{-1}, \tag{5}$$

где B_{ik} являются матрицами второго порядка и блоками матрицы четвертого порядка

$$B=|B_{ik}|=\prod_{j=0}^{m}(E_{j+1}M_{j+1,j}), \tag{6}$$

слои пронумерованы в порядке убывания, полупространство, из которого падают волны, имеет номер $(m+1)$;

$$E_j=F(-\alpha_j h_j)\otimes\frac{\mathbf{k}_j\boldsymbol{\varkappa}_j}{\mathbf{k}_j\cdot\boldsymbol{\varkappa}_j}+F(-\beta_j h_j)\otimes\frac{\boldsymbol{\varkappa}^j\mathbf{k}^j}{\boldsymbol{\varkappa}^j\cdot\mathbf{k}^j},$$

где знак $\otimes$ обозначает прямое произведение матриц, $\mathbf{k}_j=\alpha_j\mathbf{e}_z+\xi\mathbf{e}_x$, $\varkappa_j=\beta_j\mathbf{e}_z+\xi\mathbf{e}_x$ — волновые векторы продольной и поперечной волн, $\mathbf{k}^j=-\xi\mathbf{e}_z+\alpha_j\mathbf{e}_x$, $\boldsymbol{\varkappa}^j=-\xi\mathbf{e}_z+\beta_j\mathbf{e}_x$. Точка обозначает скалярное произведение; выражение $\mathbf{ab}$ без точки представляет собой диаду, определяемую формулой:

$$\mathbf{ab}=\begin{vmatrix} a_z b_z & a_z b_x \\ a_x b_z & a_x b_x \end{vmatrix}.$$

Далее

$$M_{j+1,j}=M^{\text{c}}_{j+1,j}\oplus M^{\text{a}}_{j+1,j},$$

$$M^{\text{c}}_{j+1,j}=\begin{vmatrix} \delta_{j+1,j}\beta_j/\beta_{j+1} & -f_{j+1,j}/\beta_{j+1} \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$M^{\text{a}}_{j+1,j}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ f_{j+1,j}/\alpha_{j+1} & \delta_{j+1,j}\alpha_j/\alpha_{j+1} \end{vmatrix},$$

$$\delta_{j+1,j}=\rho_j(\mathbf{k}_{j+1}\cdot\boldsymbol{\varkappa}_{j+1})/(\rho_{j+1}(\mathbf{k}_j\cdot\boldsymbol{\varkappa}_j)),$$

$$f_{j+1,j}=\frac{\xi(\mathbf{k}_{j+1}\cdot\boldsymbol{\varkappa}_{j+1})}{\rho_{j+1}}\left[\left(\frac{\rho_{j+1}}{\mathbf{k}_{j+1}\cdot\boldsymbol{\varkappa}_{j+1}}-\frac{2\mu_{j+1}}{\omega^2}\right)-\left(\frac{\rho_j}{\mathbf{k}_j\cdot\boldsymbol{\varkappa}_j}-\frac{2\mu_j}{\omega^2}\right)\right],$$

где ρ_j — плотность j-го слоя, μ_j — модуль сдвига, ω — круговая частота.

В случае высоких частот волновую толщину каждого слоя нельзя считать малой. Представим матрицу $M_{j+1,j}$ в виде суммы единичной матрицы и матрицы с малыми по модулю элементами $M_{j+1,j}=E+G_{j+1,j}$. Разложим произведение матриц (6) на сумму произведений. Нулевым приближением возьмем:

$$B^{(0)}_{m,1}=\prod_{j=1}^{m}E_j=\begin{vmatrix} (B_1)_{m,1} & (B_2)_{m,1} \\ (B_2)_{m,1} & (B_1)_{m,1} \end{vmatrix}.$$

Подставив это выражение в формулу (5), получим коэффициент отражения равным нулю, что соответствует приближению геометрической акустики.

Первым приближением возьмем произведения, в которых сомножитель $G_{j+1,j}$ встречается один раз.

$$B_{m,0}^{(1)}=\sum_{j=0}^{m} B_{m,j+1}^{(0)} G_{j+1,j} B_{j,0}^{(0)}.$$

Чтобы уяснить физический смысл этого выражения, возьмем одно слагаемое из этой суммы. Тогда

$$B_1^{(1)}=B_{m,1}^{(0)}+B_{m,j+1}^{(0)} G_{j+1,j} B_{j,1}^{(0)}=B_{m,j+1}^{(0)} M_{j+1,j} B_{j,1}^{(0)}.$$

Подставим это выражение в формулу (5), получим $V=(-1\oplus 1)\cdot[(B_1)_{m,j+1}-$

$$-(B_2)_{m,j+1}](M_{j+1,j}^{c}-M_{j+1,j}^{a})(M_{j+1,j}^{c}+M_{j+1,j}^{a})^{-1}[(B_1)_{m,j+1}-(B_2)_{m,j+1}],$$

что представляет собой коэффициент отражения по смещению от j-го слоя, помноженный на множители, определяющие распространение волн до j-го слоя и обратно в рамках геометрической акустики.

Приближением порядка k возьмем сомножители, в которых $G_{j+1,j}$ встречается k раз; оно соответствует k-кратным отражениям и выражается k-кратной суммой по толщине слоя.

Рассмотрим подробнее нулевое приближение. Представим матрицу E_j в виде суммы $E_j=E_j^l+E_j^t$, где

$$E_j^l=F(-\alpha_j h_j)\otimes\frac{\mathbf{k}_j\varkappa_j}{\mathbf{k}_j\cdot\varkappa_j};\quad E_j^t=F(-\beta_j h_j)\otimes\frac{\varkappa^j\mathbf{k}^j}{\varkappa^j\cdot\mathbf{k}^j}.$$

Разложим произведение $B_{m,1}^{(0)}$ на сумму слагаемых. Первым слагаемым возьмем

$$B_0^{(0)}=\prod_{j=1}^{m} E_j^l+\prod_{j=1}^{m} E_j^t=F(S_{1,m}^l)\otimes A_{1,m}^l+F(S_{1,m}^t)\otimes A_{1,m}^t, \tag{7}$$

где

$$S_{1,m}^l=-\sum_{j=1}^{m}\alpha_j h_j,\quad S_{1,m}^t=-\sum_{j=1}^{m}\beta_j h_j,$$

$$A_{1,m}^l=\prod_{j=1}^{m}\frac{\mathbf{k}_j\varkappa_j}{\mathbf{k}_j\cdot\varkappa_j},\quad A_{1,m}^t=\prod_{j=1}^{m}\frac{\varkappa^j\mathbf{k}^j}{\varkappa^j\cdot\mathbf{k}^j}.$$

Если подставить первое слагаемое (7) нулевого приближения в выражение (5), получим коэффициент отражения, равный нулю. Выражение (7) определяет изменение амплитуд продольной и поперечной волн в зависимости от глубины без учета преобразований типов волн. Учет преобразований типов волн без учета отражений также приводит к коэффициенту отражения, равному нулю, как было показано выше.

Второе слагаемое $B_1^{(0)}$ учитывает однократное преобразование типов волн.

$$B_1^{(0)}=\sum_{k=1}^{m-1}\left(\prod_{j=k+1}^{m} E_j^l\prod_{j=1}^{k} E_j^t+\prod_{j=k+1}^{m} E_j^t\prod_{j=1}^{k} E_j^l\right)=$$

$$
= \sum_{j=1}^{m} [F(S_{j+1,m}^{l}+S_{1,j}^{t}) \otimes (A_{j+1,m}^{l} \cdot A_{1,j}^{t}) + F(S_{j+1,m}^{t}+S_{1,j}^{l}) \otimes
$$

$$
\otimes (A_{j+1,m} \cdot A_{1,j})].
$$

Слагаемые $B_2^{(0)}$, $B_3^{(0)}, \ldots$ учитывают двух, трех и т. д.-кратные преобразования типов волн. Ряд $B_0^{(0)}+B_0^{(1)}+B_0^{(2)} \ldots$ представляет собой разложение по степеням малых величин $\Delta\alpha=\alpha_{j+1}-\alpha_j$ и $\Delta\beta=\beta_{j+1}-\beta_j$. Каждое слагаемое в отдельности при подстановке в выражение (5) дает коэффициент отражения, равный нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
2. *Маслов В. П.* Об отражении плоской звуковой волны от жидкого неоднородного слоя, лежащего на упругом слоисто-неоднородном полупространстве.– Акуст. ж., 1981, т. 27, № 3, с. 428–433.

Институт океанологии
им. П. П. Ширшова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
1.VII.1980