АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXVII 1981 Вып. 6

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534.222

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ГАЗОВЗВЕСЯХ

Борисов А. А., Вахгельт А. Ф., Накоряков В. Е.

По мере распространения волны давления в газовзвеси каждая частица попадает в поле переменного давления. Температура газа в каждом элементе волны устанавливается одновременно с изменением давления и соответствует его текущему значению в данном элементе. Если в этот элемент попадает частица, то температура на ее поверхности меняется в соответствии с температурой окружающего газа и является функцией времени. Следовательно, тепловой поток в частицу из газа также будет некоторой функцией времени. Вычисляя этот поток и подставляя его в уравнение энергии для газа, получим замкнутую систему уравнений для описания волновых процессов в газовзвеси.

В данной работе основное внимание уделяется получению и анализу одного уравнения для эволюции возмущений конечной амплитуды, когда в системе протекает один релаксационный процесс, обусловленный нестационарным теплообменом между твердыми частицами и газом.

Объемная доля твердых частиц предполагается настолько малой, что взаимодействием между отдельными частицами пренебрегается. Это ограничение позволяет рассматривать задачу о детальных процессах теплообмена независимо от общей динамической задачи. Будем считать, что на длине волны содержится достаточное количество частиц, так что выполняется условие сплошности смеси. Возмущения рассматриваются плоские. В рассмотренных предположениях распространение возмущений можно изучать в рамках гомогенной модели [1].

Газовзвесь содержит твердые частицы одинакового радиуса δ с плотностью ρ_p и температурой θ и рассматривается в приближении односкоростной модели. Число частиц m считаем постоянным в единице объема, а их объем таким малым, что им в уравнениях сохранения можно пренебречь по сравнению с объемом, занятым газом [1].

Пренебрегая вязкостью и теплопроводностью в уравнениях сохранения и оставляя только тепловое взаимодействие между фазами, имеем для описания процесса следующую систему для газа:

$$\rho_t+(\rho U)_x=0; \tag{1}$$

$$\rho U_t+\rho U U_x+R(\rho\vartheta)_x=0; \tag{2}$$

$$\rho c_v\vartheta_t+\rho c_v U\vartheta_x+R\rho\vartheta U_x=Q \tag{3}$$

и уравнение теплопроводности для частицы в сферических координатах

$$\theta_t+a\theta_{rr}-\frac{2a}{r}\theta_r=0. \tag{4}$$

В этих уравнениях ρ, U, ϑ – плотность, скорость и температура газа, Q – суммарный тепловой поток от газа к облаку частиц, R – универсальная газовая постоянная, a – коэффициент температуропроводности, r – текущий радиус частицы.

Уравнение (4) служит для определения теплового взаимодействия между частицей и газом. Оно решается при следующих граничных условиях:

$$\begin{gathered} t=0,\quad \theta=\theta_0=0,\\ r=\delta,\ \text{при}\ t>0,\quad \theta=\theta_\delta=\vartheta(t).\\ \partial\theta/\partial r|_{r=0}=0. \end{gathered} \tag{5}$$

Исследование уравнения (4) не представляет трудностей и при граничных условиях III рода.

Решение уравнения (4) при граничных условиях (5) имеет вид [2]

$$\theta=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\delta}{rn\pi}(-1)^{n+1}\sin\left(n\pi\frac{r}{\delta}\right)\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\vartheta(y)\exp[-n^2\pi^2a(t-y)/\delta^2]\,dy.$$

Величина теплового потока к частице запишется как

$$q_p=\lambda_p\left(\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)_{r=\delta}=-\frac{2\lambda_p}{\delta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\vartheta(y)\exp[-n^2\pi^2a(t-y)/\delta^2]\,dy,$$

где λ_p – коэффициент теплопроводности материала частицы.

С учетом последнего выражения уравнение энергии для газа примет следующий вид:

$$\rho c_v\vartheta_t+\rho c_vU\vartheta_x+R\rho\vartheta U_x=-\frac{\rho_p}{\tau_p}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\vartheta(y)\left\{\vartheta_3\left[0,\ e^{-\frac{\pi^2a(t-y)}{\delta^2}}\right]-1\right\}dy, \tag{6}$$

где c_p – удельная теплоемкость материала частицы, ϑ_3 – тэта-функции [3], $1/\tau_p=8\pi\delta^3ma/\delta^2c_p/c_v$.

Таким образом, эволюция возмущений в данной среде будет описываться уравнениями (1), (2), (6).

Будем считать, что отклонения от равновесных значений плотности, скорости и температуры $(\rho-\rho_0)/\rho_0$, U/c_0, $(\vartheta-\vartheta_0)/\vartheta_0$ (где $c_0^2=R\vartheta_0$, а ρ_0, ϑ_0 – невозмущенные значения плотности и температуры, ρ, ϑ – соответственно их актуальные значения и ρ', U', ϑ' – величины акустических возмущений плотности, скорости и температуры газа) являются величинами первого порядка малости. Подставим $\rho=\rho_0+\rho'$, $U=U'$ и $\vartheta=\vartheta_0+\vartheta'$ в систему уравнений (1), (2) и (6). Рассмотрим теперь волны малой, но конечной амплитуды, бегущие в положительном направлении. Для этого перейдем к сопровождающей системе координат $\tau=t-x/c_0$. Так как амплитуды волн малы, то искажения профиля волны, вызванные как диссипацией, так и нелинейностью, будут также малы на расстояниях порядка длины волны и процесс должен описываться функцией вида $\Phi(\mu x,\tau)$, где μ – величина первого порядка малости.

В соответствии с заменой

$$\frac{\partial}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial t};\qquad\frac{\partial}{\partial x}=-\frac{1}{c_0}\frac{\partial}{\partial\tau}+\mu\frac{\partial}{\partial x}$$

система уравнений (1), (2), (6) с точностью до членов второго порядка малости запишется в переменных τ, x в следующем виде:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\rho'}{\partial\tau}-\frac{\rho_0}{c_0}\frac{\partial U'}{\partial\tau}-\frac{\rho'}{c_0}\frac{\partial u}{\partial\tau}-\frac{U'}{c_0}\frac{\partial\rho'}{\partial\tau}+\mu\rho_0\frac{\partial U'}{\partial x}=0;\\
\rho_0\frac{\partial U'}{\partial\tau}+\rho'\frac{\partial U'}{\partial\tau}-\frac{\rho_0U'}{c_0}\frac{\partial U'}{\partial\tau}-\frac{R\rho_0}{c_0}\frac{\partial\vartheta'}{\partial\tau}-\frac{R\rho'}{c_0}\frac{\partial\vartheta'}{\partial\tau}-\frac{R\vartheta_0}{c_0}\frac{\partial\rho}{\partial\tau}-\\
-\frac{R\vartheta'}{c_0}\frac{\partial\rho'}{\partial\tau}+\mu R\rho_0\frac{\partial\vartheta'}{\partial x}+\mu R\vartheta_0\frac{\partial\rho'}{\partial x}=0;\\
\rho_0\frac{\partial\vartheta'}{\partial\tau}+\rho'\frac{\partial\vartheta'}{\partial\tau}-\frac{\rho_0u'}{c_0}\frac{\partial\vartheta'}{\partial\tau}-\frac{\rho_0(\varkappa-1)\vartheta_0}{c_0}\frac{\partial U'}{\partial\tau}-\frac{\rho_0(\varkappa-1)\vartheta'}{c_0}\frac{\partial U'}{\partial\tau}-\\
-\frac{\rho'(\varkappa-1)\vartheta_0}{c_0}\frac{\partial U'}{\partial\tau}+\mu\rho_0(\varkappa-1)\vartheta_0\frac{\partial U'}{\partial x}+\\
+\frac{\rho_p}{\tau_p}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^\tau\vartheta'(y)\left\{\vartheta_3\left[0,\ e^{-\frac{\pi^2a(\tau-y)}{\delta^2}}\right]-1\right\}dy.\end{gathered}\tag{7}$$

Известно [4], что одно уравнение в частных производных k-порядка можно свести к системе k-уравнений первого порядка. Аналогично систему k-уравнений первого порядка в частных производных иногда с помощью дифференцирования удается свести к одному уравнению k-порядка. Одно уравнение, естественно, проще поддается физическому анализу, и часто только получение одного уравнения является целью многих работ. Замечательным при таком подходе является тот факт, что полученное уравнение оказывается иногда уже известным и подробно проанализированным.

Система уравнений (7) сводится к одному уравнению аналогично тому, как это сделано в книге [5]. Для этого доумножаем первое уравнение системы на $1/\rho_0$, второе на $1/(\rho_0 c_0)$ и третье на $1/(\rho_0\vartheta_0)$. Складываем полученные уравнения между собой и заменяем во всех членах второго порядка малости ρ'/ρ_0 на U'/c_0 и ϑ'/ϑ_0 на $(\varkappa-1)U'/c_0$. Таким образом, приходим к уравнению для возмущений скорости, записанному в безразмерном виде:

$$\frac{\partial U}{\partial x}-U\frac{\partial U}{\partial\tau}\frac{\varkappa^2+2}{\varkappa}-\frac{\partial U}{\partial\tau}\frac{\varkappa-1}{\varkappa}+\frac{T}{\tau_p}\frac{\rho_p}{\rho_0}\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_0^\tau U(y)\left\{\vartheta_3\left[0, e^{-\frac{\pi^2 a(\tau-y)}{\delta^2}}\right]-1\right\}dy, \tag{8}$$

где T – период возмущения. Это уравнение справедливо для произвольных соотношений между характерным временем прогрева частиц τ_p и периодом внешнего возмущения T. В предельном случае $\tau_p \ll T$ авторами [6] получено уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial U}{\partial x}-U\frac{\partial U}{\partial\tau}\frac{\varkappa^2+2}{\varkappa}-\frac{\partial U}{\partial\tau}\frac{\varkappa-1}{\varkappa}(1-A)-\frac{\tau_p'}{T}\frac{\rho_p}{\rho_0}\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2}=0, \tag{9}$$

где $A=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8\pi\delta^3 m}{n^2\pi^2}\frac{c_p}{c_v}\frac{\rho_p}{\rho_0}$; $\tau_p'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8\pi\delta^3 m}{n^4\pi^4}\frac{c_p}{c_v}\frac{\delta^2}{a}$. В противоположном случае $\tau_p \gg T$ из уравнения [8] получается высокочастотное предельное уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial x}-U\frac{\partial U}{\partial\tau}\frac{\varkappa^2+2}{\varkappa}-\frac{\partial U}{\partial\tau}\frac{\varkappa-1}{\varkappa}+\frac{T}{\varkappa\tau_p}\frac{\rho_p}{\rho_0}[1+(\varkappa-1)U]=0. \tag{10}$$

Обратная подстановка $U/c_0=\rho'/\rho_0$ и $\vartheta'/\vartheta_0=(\varkappa-1)\rho'/\rho_0$ или $U'/c_0=\vartheta'/[(\varkappa-1)\vartheta_0]$ и $\rho'/\rho_0=\vartheta'/[(\varkappa-1)\vartheta_0]$ приводит к тем же уравнениям для приращений плотности ρ' или температуры ϑ'.

Распространение в одну сторону звуковых волн с произвольной частотой описывается линеаризованным уравнением (8), низко- и высокочастотных волн – линеаризованными уравнениями (9) и (10) соответственно.

Таким образом, распространение возмущений конечной амплитуды в газовзвесях описывается уравнением (8) с коэффициентами, в которые входит информация об индивидуальных характеристиках частиц. Эффекты тепловой релаксации в волне будут велики, так как перед интегральным членом стоит достаточно большая величина ρ_p/ρ_0. Анализ нелинейного уравнения (8) в частных производных с интегралом, в котором ядро зависит от времени, удобнее всего проводить именно в переменных τ, x. Уравнение (8) дает сильно затухающие решения, так что каждая точка волнового профиля затухает пропорционально своей амплитуде.

Анализ решения уравнений (9) и (10) проведен во многих работах и подробно изложен в работе [5], поэтому нецелесообразно останавливаться на нем в данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Marble F. E.* Dynamics of dusty gases.— Ann. Rev. Fluid Mech. 1970, v. 2, p. 397–446.
2. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964.
3. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов сумм, рядов, произведений. М.: Наука, 1972, с. 935.
4. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
5. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
6. *Борисов А. А., Вахгельт А. Ф., Накоряков В. Е.* Распространение длинноволновых возмущений конечной амплитуды в газовзвесях.– ПМТФ, 1980, № 5, с. 33–38.

Институт теплофизики
Сибирского отделения
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
12.V.1980