АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXVIII 1982 Вып. 2

УДК 534.26

ОТРАЖЕНИЕ И ПРОХОЖДЕНИЕ ВОЛН В НЕСИММЕТРИЧНО СОСТЫКОВАННЫХ СТЕРЖНЯХ

Живаев В. Я.

Рассмотрено распределение энергии падающей волны по потокам отраженной, прошедшей и трансформированных волн для стержней-полос, жестко и несимметрично состыкованных между собой. Для потоков приводятся частотные зависимости. Показано, что для них существуют соотношения, не зависящие от частоты и направления падающей волны, а также величины сдвига центральных линий полос.

Упругую полосу можно рассматривать как стержень, если распространяющаяся по ней волна имеет длину много большую, чем поперечные размеры полосы. По такой полосе могут распространяться, не взаимодействуя между собой, следующие волны: а) крутильные и изгибные, поляризованные по толщине полосы; б) продольные и изгибные, поляризованные в ее плоскости. Распространение этих волн будет происходить без взаимодействия также и в том случае, если рассматривается составной стержень из двух разных полос, состыкованных так, что совпадают их средние плоскости и средние линии. При этом коэффициенты отражения и прохождения по потокам энергии не зависят от частоты и направления падающей волны.

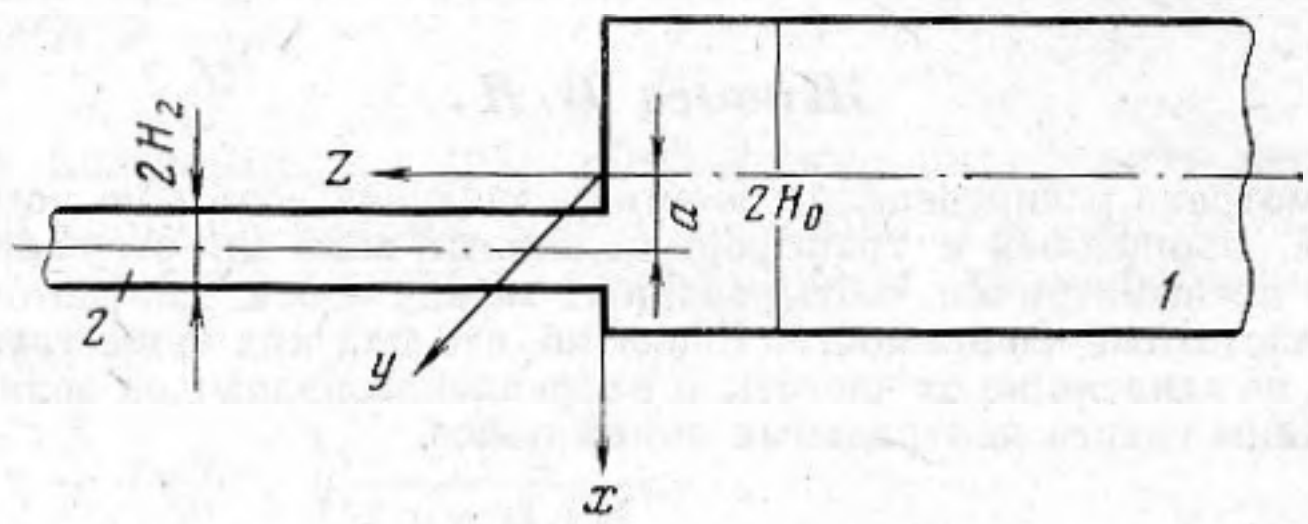
Если же средние линии полос разнесены на некоторое расстояние a, то становится возможным переход одних типов волн в другие, а соответственные коэффициенты становятся функциями частоты, направления падающей волны и расстояния между средними линиями. При этом если сдвиг осуществляется так, что совпадают средние плоскости полос, то взаимодействие носит парный характер внутри каждой группы а) и б) и взаимодействия между группами в линейном приближении не существует. Например, представляется очевидным, что при распространении по одной из полос волны, поляризованной в плоскости полосы, на стыке не возбуждаются волны, поляризованные по толщине, если, конечно, не учитывать нелинейные эффекты. Наоборот, при распространении крутильной волны возникающая изгибная волна с поляризацией по ширине полосы представлена в амплитуде общего смещения середины стыка слагаемым второго порядка малости по углу поворота сечения по сравнению с изгибной волной, поляризованной по толщине.

Ниже рассмотрена задача об отражении и прохождении изгибных и крутильных волн в полосах со сдвинутыми осями симметрии при совпадении их срединных плоскостей. Пусть две полосы одинаковой толщины $2h$, с отношением полуширин $r=H_2/H_1$, $r_{\min}\leqslant r\leqslant 1$ и с одинаковыми материальными константами E, G, ρ жестко состыкованы между собой так, как указано на фиг. 1. При этом $r_{\min}$ таково, что не происходит вырождение более узкой полосы в стержень с размерами $h\approx H_2$.

Поскольку перерезывающие силы $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$, направленные по y, разнесены в месте стыка на расстояние a $(0\leqslant a\leqslant H_1)$, при распространении изгибной волны $W_0e^{i(kz-\omega t)}$ дополнительно возникает крутящий момент $Q^{(2)}a$, который в полосе 1 возбудит крутильную волну в направлении $(-z)$. При этом ближайшая и отдаленная от оси z кромки полосы 2, закручиваясь в месте стыка относительно z на угол θ, сместятся в направлении y на различную величину, что вызовет вследствие инерционности сечений распространение в полосе 2 крутильной волны. Таким образом, помимо отраженной и прошедшей изгибных волн от места стыка, будут распространяться две крутильные волны.

Если в полосе 1 на границу падает крутильная волна $\theta_0 e^{i(k_1 z-\omega t)}$, то средняя точка полосы 2 в стыке сместится из плоскости полосы на величину $a\theta_0 e^{-i\omega t}$, что в силу инерционности сечений полосы 2 приведет к возбуждению в ней изгибной волны. Из-за кинематической связи на границе (равенство смещений и углов наклона) изгибное движение во второй полосе передается в первую и приведет к распространению в ней также изгибной волны.

Аналогично дополнительные (трансформированные) волны будут появляться при падении начальной волны из узкой полосы. При этом ясно,



Фиг. 1. Жесткая стыковка полос при сдвиге их средних линий

что эффект трансформации волн будет тем заметнее, чем выше частота и чем больше величина сдвига средних линий полос.

Считаем, что изгибные и крутильные волны в полосах удовлетворяют уравнениям [1]

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
&EI_x^{(j)}\frac{\partial^4 W^{(j)}}{\partial z^4}+\rho S^{(j)}\frac{\partial^2 W^{(j)}}{\partial t^2}=0;\\
&GI_d^{(j)}\frac{\partial^2\theta^{(j)}}{\partial z^2}-\rho I_p^{(j)}\frac{\partial^2\theta^{(j)}}{\partial t^2}=0;\quad j=1,2,
\end{aligned}
$$

где $W^{(j)}$ — смещение из плоскости полосы, $S^{(j)}$ — площадь сечения, $\theta^{(j)}$ — угол кручения относительно средней линии полосы, $I_x^{(j)}$, $I_d^{(j)}$, $I_p^{(j)}$ — моменты инерции при изгибе и кручении; $j=1$ относится к первой полосе, $j=2$ — ко второй.

Граничные условия на стыке полос имеют вид

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
&\theta^{(1)}=\theta^{(2)};\ W^{(2)}=W^{(1)}+a\theta^{(1)};\quad \frac{\partial W^{(1)}}{\partial z}=\frac{\partial W^{(2)}}{\partial z};\\
&Q^{(1)}+Q^{(2)}=0;\quad M^{(1)}+M^{(2)}=0;\\
&H^{(1)}+H^{(2)}+Q^{(2)}a=0;
\end{aligned}
$$

где $Q^{(j)}=-EI_x^{(j)}\dfrac{\partial^3 W^{(j)}}{\partial z^3}$ — перерезывающая сила, $M^{(j)}=-EI_x^{(j)}\dfrac{\partial^2 W^{(j)}}{\partial z^2}$ — изгибающий момент, $H^{(j)}=GI_d^{(j)}\dfrac{\partial\theta^{(j)}}{\partial z}$ — крутящий момент, G — модуль сдвига.

Пусть в полосе 1 и месту стыка падает крутильная волна $\theta_0 e^{i(k_1 z-\omega t)}$. Решение системы (1)—(2) можно искать в виде

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
&\theta^{(j)}=\delta_{j1}\theta_0 e^{ik_1 z}+\theta_j e^{\mp ik_j z};\\
&W^{(j)}=W_1^{(j)}e^{\mp ikz}+W_2^{(j)}e^{\pm kz},
\end{aligned}
$$

где $\delta_{j1}=\begin{cases}1, & j=1.\\ 0, & j=2,\end{cases}$ k_j и k — волновые числа для крутильных и изгибных волн. Верхний знак в формулах (3) относится к полосе 1 ($j=1$). Множитель $e^{-i\omega t}$ в формуле (3) и всюду ниже опущен.

Все амплитуды возникающих волн определяются после подстановки выражения (3) в граничные условия (2). Однако, поскольку нас интересуют коэффициенты отражения и прохождения по энергии, приведем здесь сразу выражения для потоков энергии всех распространяющихся от места стыка волн, отнесенных к потоку падающей волны.

$$\Phi_{uk}{}^{R}=\frac{4A(r^2+2r+5)}{a^2(k_tH_1)^{0,5}\Delta};\quad \Phi_{uk}{}^{T}=\frac{4A(1+2r+5r^2)}{a^2(k_tH_1)^{0,5}r\Delta}; \tag{4}$$

$$\Phi_{kk}{}^{R}= \tag{5}$$

$$=\frac{2(1+r)^2+\dfrac{2A}{a^2(k_tH_1)^{0,5}}\left(r-\dfrac{1}{r}\right)(1+6r+r^2)+A^2\left(r-\dfrac{1}{r}\right)^2(1+6r+r^2)^2}{\Delta};$$

$$\Phi_{kk}{}^{T}=\frac{4A^2(1+6r+r^2)^2}{a^4k_tH_1\Delta}, \tag{6}$$

где $\Phi_{uk}{}^{R}$ и $\Phi_{uk}{}^{T}$ — потоки энергии отраженной и прошедшей изгибных волн, возникающих при падении крутильной волны; $\Phi_{kk}{}^{R}$ и $\Phi_{kk}{}^{T}$ — соответственные потоки крутильных волн;

$$\Delta=2(1+r)^2+\frac{2A}{a^2(k_tH_1)^{0,5}}\left(r+\frac{1}{r}\right)(1+r)(1+6r+r^2)+$$

$$+\frac{A^2\left(r+\dfrac{1}{r}\right)^2(1+6r+r^2)^2}{a^4k_tH_1},$$

$$A=\left(\frac{2}{3}\right)^{0,75}\frac{1}{(1+\sigma)^{0,25}}h^{0,5}H_1^{1,5},$$

k_t — сдвиговое волновое число в пластине, σ — коэффициент Пуассона.

Непосредственным сложением выражений (4), (5), (6) проверяется, что

$$\Phi_{uk}{}^{R}+\Phi_{uk}{}^{T}+\Phi_{kk}{}^{R}+\Phi_{kk}{}^{T}=1. \tag{7}$$

Если падающая к месту стыка волна является изгибной, то для потоков распространяющихся волн получатся выражения

$$\Phi_{uu}{}^{R}= \tag{8}$$

$$=\frac{2(1+r^2)+2\dfrac{A}{a^2(k_tH_1)^{0,5}}\left(r+\dfrac{1}{r}\right)(1-r)^3+\dfrac{A^2\left(r+\dfrac{1}{r}\right)^2(1+6r+r^2)^2}{a^4k_tH_1}}{\Delta};$$

$$\Phi_{uu}{}^{T}=\frac{4r^{r}\,1+\dfrac{4A^2}{a^4k_tH_1}\left(r+\dfrac{1}{r}\right)^2(1+r)^2\Big]}{\Delta}; \tag{9}$$

$$\Phi_{ku}{}^{R}=\frac{4A(r^2+2r+5)}{a^2(k_tH_1)^{0,5}\Delta};\quad \Phi_{ku}{}^{T}=\frac{4Ar^2(r^2+2r+5)}{a^2(k_tH_1)^{0,5}\Delta}. \tag{10}$$

$$\Phi_{uu}{}^{R}+\Phi_{uu}{}^{T}+\Phi_{ku}{}^{R}+\Phi_{ku}{}^{T}=1. \tag{11}$$

По верхнему индексу величины $\Phi_{kk}{}^{R}$, $\Phi_{kk}{}^{T}$ и $\Phi_{uu}{}^{R}$, $\Phi_{uu}{}^{T}$ будем называть ниже коэффициентами отражения и прохождения по потокам энергии крутильных и изгибных волн. Остальные величины типа $\Phi_{ku}{}^{R}$ являются потоками трансформированных волн.

Из формул (4)—(6) и (8)—(10) можно получить выражения для коэффициентов отражения и прохождения по энергии для двух предельных случаев: $r\to1$, $a\to0$ — сплошной стержень; $a\to0$ — симмметричная стыков-

ка полос. При $a \to 0$ энергетический эффект трансформации волн уменьшается и стремится к нулю как $O(a^2)$. Формулы (4)–(9) справедливы также при замене r на $r'=1/r$, что соответствует падению волн к месту стыка из узкой полосы. Из рассмотрения выражений для потоков для параметров r и r' с учетом перехода $A=A'(r')^{1/2}$, $k_t H_1 = k_t H_2 r'$ можно получить соотношения, не зависящие от частоты и направления падающей на стык волны, а также параметра a. Для падающей крутильной волны:

$$\frac{\Phi_{uk}^R(r')}{\Phi_{uk}^T(r')} = \frac{\Phi_{uk}^T(r)}{\Phi_{uk}^R(r)} = \frac{1+2r+5r^2}{r(r^2+2r+5)}; \tag{12}$$

$$\frac{\Phi_{uk}^R(r')}{\Phi_{uk}^T(r)} = \frac{\Phi_{uk}^T(r')}{\Phi_{uk}^R(r)} = r^2;$$

$$\frac{\Phi_{kk}^T(r')}{\Phi_{kk}^T(r)} = 1. \tag{13}$$

Из последнего соотношения и из формулы (7) следует, что $\Phi_{kk}^R + \Phi_{uk}^T + \Phi_{uk}^T$ также является величиной инвариантной относительно изменения направления падения волны. При этом выполняется равенство

$$\Delta_{kk}^R(r', r) = \Delta_1 + \Delta_2, \tag{14}$$

где

$$\Delta_{kk}^R(r', r) = \Phi_{kk}^R(r') - \Phi_{kk}^R(r);$$

$$\Delta_1 = \Phi_{uk}^R(r) - \Phi_{uk}^R(r') = -\frac{4A(1-r)(5+6r+r^2)}{a^2(k_t H_1)^{0,5}\Delta};$$

$$\Delta_2 = \Phi_{uk}^T(r) - \Phi_{uk}^T(r') = \frac{4A(1-r)(1+3r+8r^2+3R^3+r^4)}{a^2(k_t H_1)^{0,5}\Delta}.$$

Таким образом, при переходе от падения волны из полосы 1 к падению из полосы 2 поток отраженной крутильной волны возрастает вследствие убывания потоков трансформированных волн.

Для падающей изгибной волны аналогичными соотношениями будут

$$\frac{\Phi_{ku}^R(r')}{\Phi_{ku}^T(r')} = \frac{\Phi_{ku}^T(r)}{\Phi_{ku}^R} = r^2; \tag{15}$$

$$\frac{\Phi_{ku}^R(r')}{\Phi_{ku}^T(r)} = \frac{\Phi_{ku}^T(r')}{\Phi_{ku}^R(r)} = \frac{1+2r+5r^2}{r(r^2+2r+5)};$$

$$\frac{\Phi_{uu}^T(r')}{\Phi_{uu}^T(r)} = 1. \tag{16}$$

Помимо коэффициента прохождения $\Phi_{uu}^T(r)$ инвариантной величиной в этом случае является $\Phi_{uu}^R + \Phi_{ku}^R + \Phi_{ku}^T$.

При этом выполняется равенство

$$\Delta_{uu}^R(r', r) = \Delta_1 - \Delta_2, \tag{17}$$

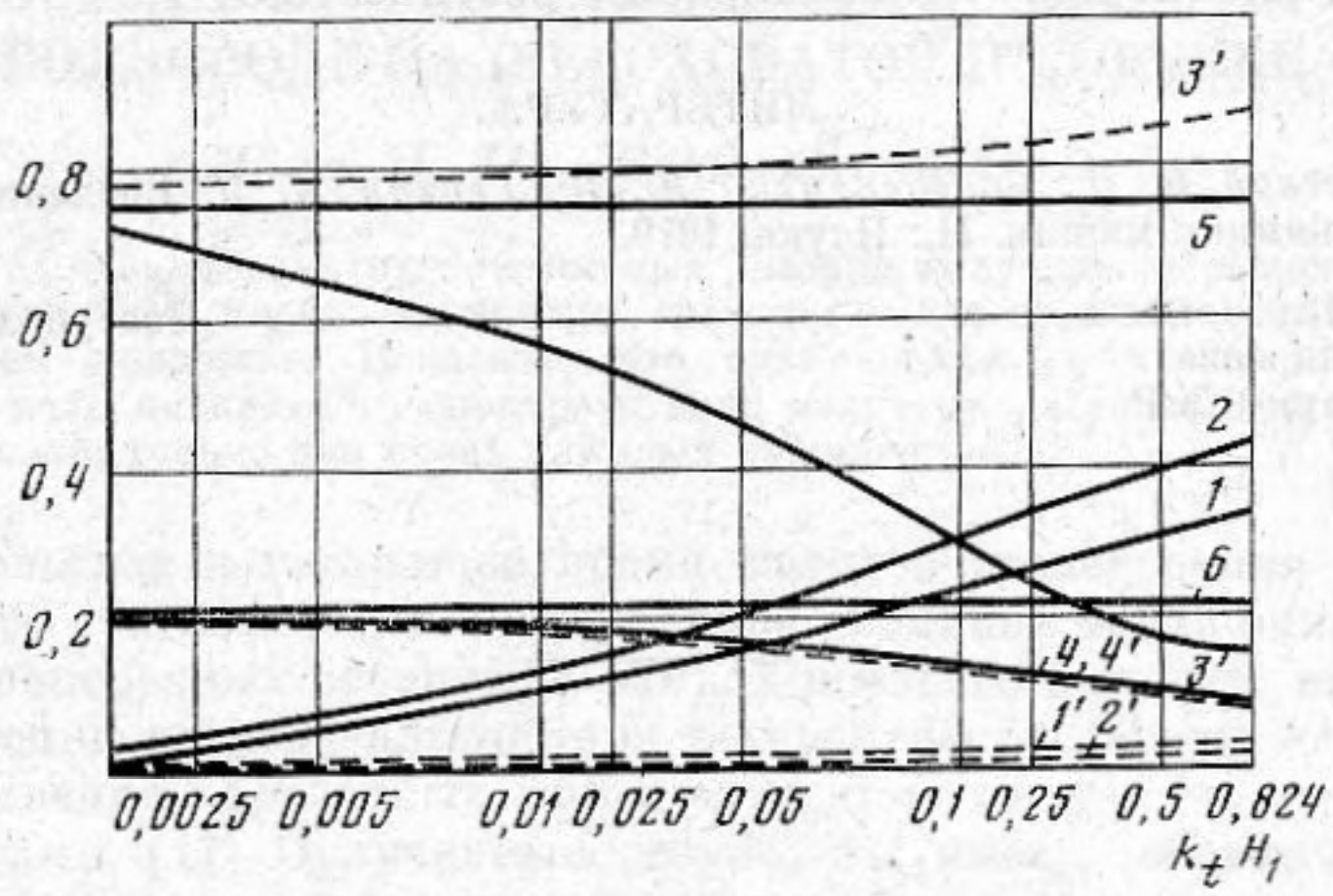
где $\Delta_{uu}^R = \Phi_{uu}^R(r') - \Phi_{uu}^R(r)$.

В случае вырождения ($a \neq 0$, $r=1$) инвариантными величинами являются Φ_{kk}^T, Φ_{kk}^R, Φ_{uu}^T, Φ_{uu}^R. Кроме того, выполняются следующие соотношения:

$$\Phi_{uk}^R = \Phi_{uk}^T = \Phi_{ku}^R = \Phi_{ku}^T.$$

Равенство проходящих и отраженных потоков трансформированных волн при $r=1$, видимо, объясняется тем, что место стыка полос при падении на него волны служит источником излучения дополнительных волн, нагруженным справа и слева на одинаковые импедансы. Менее тривиальным является равенство потоков изгибных волн, возникающих при падении крутильной волны, потокам крутильных волн, возникающих при падении изгибной волны.

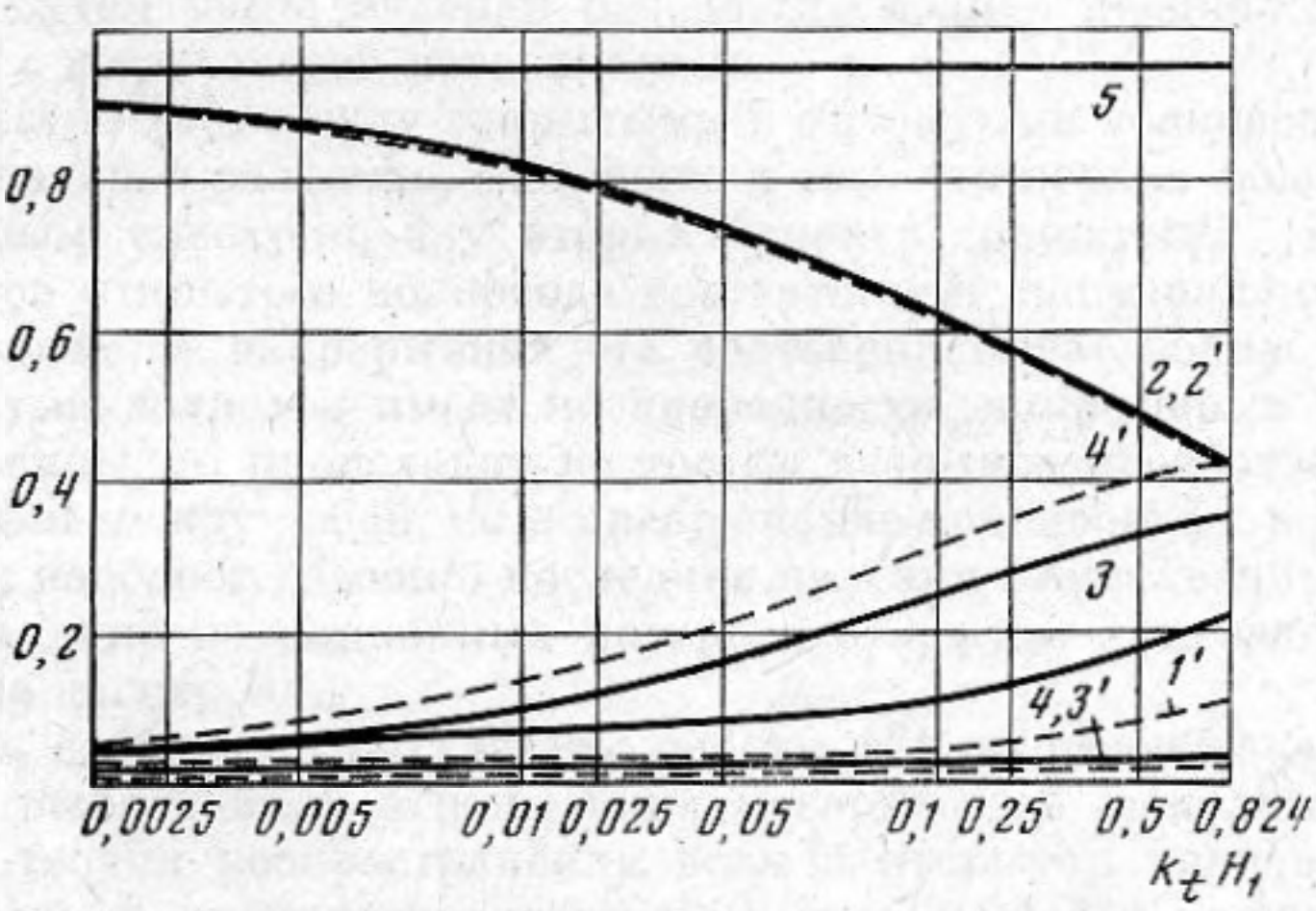
На фиг. 2 и 3 представлены частотные зависимости потоков энергии, вычисленные для параметров $\sigma=0{,}31$, $h=0{,}1$, $H_1=4$, $a=3$, $r=0{,}25$. Верхний предел для безразмерной частоты определялся приблизительно выполнением равенства $H_2/\lambda_u=0{,}33$. Штриховые кривые на фиг. 2 и 3 — потоки для параметра $r'=1/r$, прямые *5*, *6* — потоки отраженной и проходящей волн при симметричной стыковке. Из приведенных графиков видно, что отклонения коэффициентов прохождения и отражения от их значения



Фиг. 2. Частотная зависимость потоков энергии при падении на стык ($h=0{,}1$, $H_1=4$, $a=3$, $r=0{,}25$) крутильной волны $e^{i(h_t z-\omega t)}$: *1* — отраженная изгибная волна ($\Phi_{uk}{}^R$); *2* — прошедшая изгибная ($\Phi_{kk}{}^T$); *3* — отраженная крутильная ($\Phi_{kk}{}^R$); *4* — прошедшая крутильная ($\Phi_{kk}{}^T$); *1'*–*4'* потоки тех же волн для $r'=4$; *5*, *6* — отраженные и прошедшие потоки для $a=0$, $r=0{,}25$

при симметричной стыковке пластин ($a=0$, $r=0{,}25$) тем большее, чем больше частота. При $(k_t H_1)\to 0$ они стремятся к своему значению при $a=0$ как к предельному. В то же время с ростом частоты наблюдается возрастание потоков трансформированных волн.

На основании изложенного можно сделать следующие выводы. При несимметричной стыковке двух полос коэффициент прохождения по по-



Фиг. 3. Частотная зависимость потоков энергии при падении на стык ($h=0{,}1$, $H_1=4$, $a=3$, $r=0{,}25$) изгибной волны *1* — отраженная изгибная волна ($\Phi_{uu}{}^R$); *2* — прошедшая изгибная ($\Phi_{uu}{}^T$); *3* — отраженная крутильная ($\Phi_{ku}{}^R$); *4* — прошедшая крутильная ($\Phi_{ku}{}^T$); *1'*–*4'* — потоки тех же волн для $r'=4$; *5*, *6* — отраженные и прошедшие потоки для $a=0$, $r=0{,}25$

току энергии (6), (9) зависит от частоты и так же, как при симметричной стыковке ($a=0$), не зависит от направления падающей к месту стыка волны (формулы (13), (16)). Коэффициент отражения (5), (8) зависит от

частоты и при смене направления падения волны изменяется вследствие изменения потоков трансформированных волн (14), (16); при этом для потоков трансформированных волн (4), (10) с необходимостью выполняются соотношения (12), (15). Энергетический эффект трансформации тем выше, чем выше частота (фиг. 2, 3) и чем больше величина сдвига средних линий полос.

Автор приносит свою благодарность В. В. Тютекину за постановку задачи и обсуждение полученных в работе результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Артоболевский И. И., Бобровницкий Ю. И., Генкин М. Д.* Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
14.I.1981