АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXVIII 1982 Вып. 2

УДК 534.26

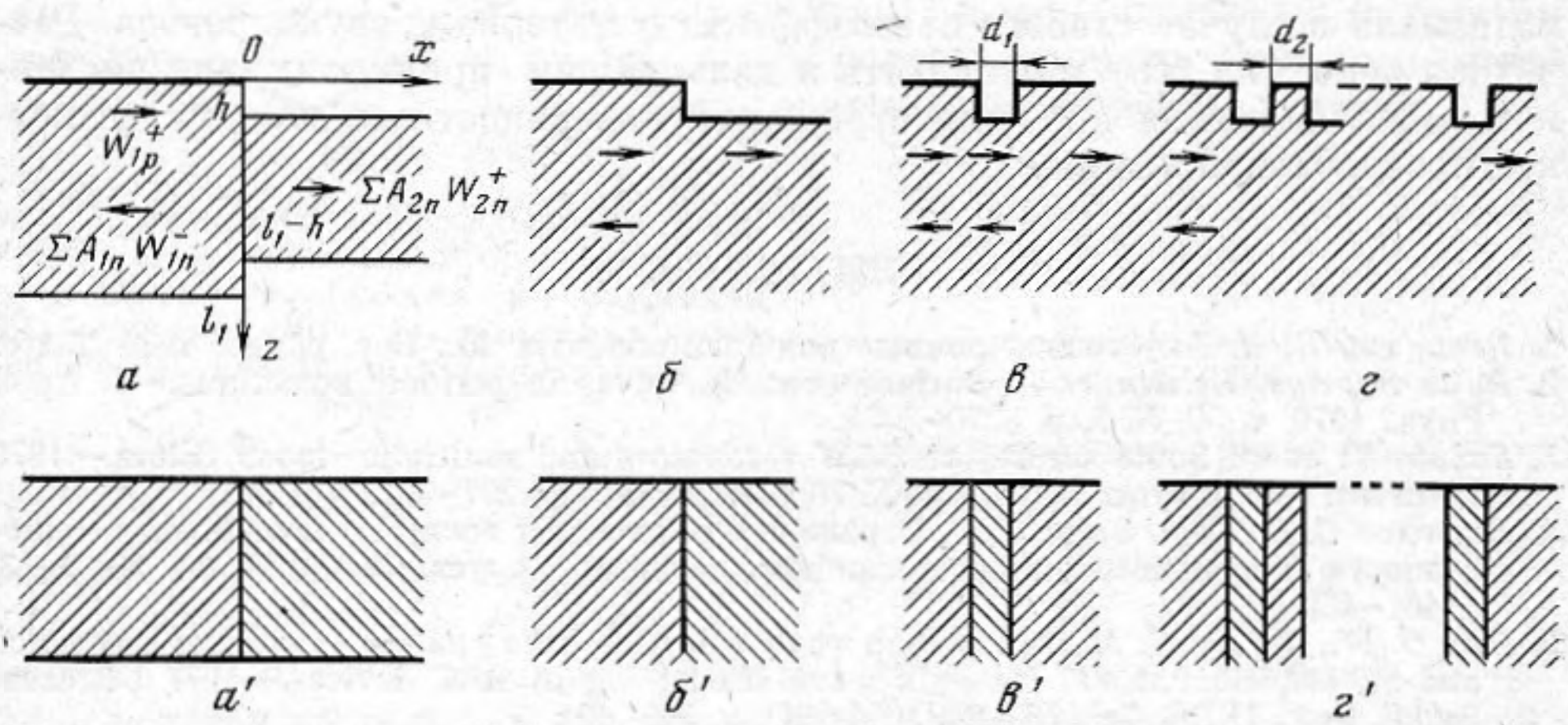
ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДИФРАКЦИОННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НОРМАЛЬНЫХ И ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

Касаткин Б. А.

Решена в общем виде задача о дифракции нормальной волны на границах раздела, ориентированных перпендикулярно направлению распространения волны. Аналитическое решение получено в предельных случаях, допускающих введение некоторого малого параметра, характеризующего дифракцию. Результаты применены для расчета дифракции поверхностных волн на периодических структурах типа гребенки.

При решении дифракционных задач в поле нормальных волн твердого волновода достаточно универсален метод, использующий соотношения обобщенной ортогональности между ними [1], с помощью которых краевая задача сводится к алгебраической. Суть метода поясняется на примере следующей дифракционной задачи.

Пусть известны необходимый набор геометрических и акустических параметров и полная система нормальных волн волноводных звеньев, со-



Фиг. 1. Схема дифракции нормальных и поверхностных волн на границах раздела

пряженных между собой через границы раздела, ориентированные перпендикулярно направлению распространения волны. Такими границами могут быть либо геометрические, когда сопряжены однородные по акустическим свойствам волноводные звенья различной геометрии (фиг. 1, *а—г*), либо акустические, когда сопряжены волноводные звенья одинаковой геометрии с различными акустическими характеристиками (фиг. 1, *а—г*), либо их комбинации.

Будем считать, что на границу раздела типа комбинации геометрической (фиг. 1, *а*) и акустической (фиг. 1, *а'*) «ступенек» из области $x<0$ падает нормальная волна индекса «*p*». Полагая звуковое поле не зависящим от координаты y (плоская задача), а боковую поверхность волновода свободной от напряжений, введем для описания звукового поля четырехмерный вектор $\mathbf{w}_i(x, z)=\mathbf{w}_i(z)\exp(ik_i x)$, ($k_i$ — волновое число), первые две компоненты которого есть компоненты вектора смещений $w_{1,i}=u_{x,i}/l_1$, $w_{2,i}=u_{z,i}/l_1$, l_1 — волноводный размер в области $i=1$, а остальные — компоненты тензора напряжений ($w_{3,i}=\sigma_{xx,i}/\mu_1$, $w_{4,i}=\sigma_{xz,i}/\mu_1$, μ_1 — модуль сдвига для области $i=1$), действующих в поперечном сечении волновода.

Полагая известными собственные числа k_{in} и собственные функции $\mathbf{w}_{in}$ соответствующих дисперсионных задач, сформулируем граничные условия дифракционной задачи для сопряженных волноводов, изображенных на фиг. 1, $a-a'$, в виде

$$(1)\qquad x=0\qquad \mathbf{w}_{1p}^{+}+\sum A_{1n}^{-}\mathbf{w}_{1n}^{-}=\begin{cases}\begin{pmatrix} w_{1,1p}+\sum A_{1n}^{-}w_{1,1n}^{-} \\ w_{2,1p}^{+}+\sum A_{1n}^{-}w_{2,1n}^{-} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & z\in(0,h)\,U\,(l_1-h,l_1) \\ \sum A_{2n}^{+}\mathbf{w}_{2n}^{+} & z\in(h,\,l_1-h),\end{cases}$$

где $\mathbf{w}_{in}^{\pm}$ — собственные вектор-функции волновода $x<0$, $(i=1)$, соответствующие волновым числам $\pm k_{in}$ из полного набора, удовлетворяющих условиям излучения и предельного поглощения

$$\operatorname{Im} k_{in}\geqslant 0,\qquad \frac{dk_{in}}{d\omega}\geqslant 0\quad (\operatorname{Im} k_{in}=0),$$

w_{2n}, k_{2n} — аналогичные величины для волновода $x>0$, $(i=2)$.

Соотношения обобщенной ортогональности нормальных волн рассматриваемых волноводов имеют вид

$$(2)\qquad (k_{in}-k_{im})\,(\mathbf{w}_{in},\ N\overline{\mathbf{w}}_{im})=0,$$

N — матрица, у которой отличны от нуля элементы

$$N_{13}=N_{31}=N_{24}=N_{42}=1,$$

$\overline{\mathbf{w}}_i$ — вектор, сопряженный с $\mathbf{w}_i$, причем $\overline{w}_{p,i}=w_{p,i}(k_i^*)$, $p=1,\ 2$, $\overline{w}_{p,i}=-w_{p,i}(k_i^*)$, $p=3,\ 4$, $(\mathbf{x},\mathbf{y})_i=\int\limits_{s_i}\left(\sum x_n y_n^*\right)dz$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, определенное в поперечном сечении s_i i-го волноводного звена, y, y^* — комплексно-сопряженные величины.

Применяя к равенству (1) операцию скалярного произведения на векторы $N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^{-}$, $N\overline{\mathbf{w}}_{2m}^{+}$, получаем систему уравнений для определения коэффициентов A_{1n}^{-}, A_{2n}^{+}

$$(3)\qquad \sum A_{1n}^{-}(\delta_{mn}-a_{mn})+\sum A_{2n}^{+}b_{mn}=\frac{(\mathbf{u}_{1p}^{+},\overline{\sigma}_{1m}^{-})_{\Delta}}{(\mathbf{w}_{1m}^{-},N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^{-})_1},$$

$$\sum A_{1n}^{-}c_{mn}+\sum A_{2n}^{+}\delta_{mn}=\frac{(\mathbf{w}_{1p}^{+},N\overline{\mathbf{w}}_{2m}^{+})_2}{(\mathbf{w}_{2m}^{+},N\overline{\mathbf{w}}_{2m}^{+})_2},$$

$$a_{mn}=\frac{(\mathbf{u}_{1n}^{-},\overline{\sigma}_{1m}^{-})_{\Delta}}{(\mathbf{w}_{1m}^{-},N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^{-})_1},\qquad b_{mn}=-\frac{(\mathbf{w}_{2n}^{+},N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^{-})_2}{(\mathbf{w}_{1m}^{-},N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^{-})_1},$$

$$c_{mn}=-\frac{(\mathbf{w}_{1n}^{-},N\overline{\mathbf{w}}_{2m}^{+})_2}{(\mathbf{w}_{2m}^{+},N\overline{\mathbf{w}}_{2m}^{+})_2},\qquad n,m=1,2,\ldots,$$

δ_{mn} — символ Кронекера, $\mathbf{u}_{1n}$ — вектор с компонентами $w_{1,1n}$, $w_{2,1n}$, $\overline{\sigma}_{1m}$ — вектор с компонентами $-w_{3,1m}(k_{1m}^*)$, $-w_{4,1m}(k_{1m}^*)$, причем скалярное произведение, помеченное индексом Δ, определено интегралом по области $z\in(0,h)\cup(l_1-h,l_1)$.

Коэффициентам системы (3) можно дать следующие асимптотические оценки:

$$\frac{(\mathbf{w}_{1n},N\overline{\mathbf{w}}_{2m}^{+})_2}{(\mathbf{w}_{2m}^{+},N\overline{\mathbf{w}}_{2m}^{+})_2}=0(n^{-2+\Delta/2}m^{-1});$$

$$\frac{(\mathbf{w}_{2n}^{+}, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^{-})_2}{(\mathbf{w}_{1m}^{-}, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^{-})_1} = 0(n^{-1}m^{-2+\Delta/2});$$

$$\frac{(\mathbf{u}_{1n}^{-}, \boldsymbol{\sigma}_{1m}^{-})_\Delta}{(\mathbf{w}_{1m}^{-}, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^{-})_1} = 0(n^{-2}m^{-1});$$

$$\frac{(\mathbf{w}_{1p}^{+}, N\overline{\mathbf{w}}_{2m}^{+})_2}{(\mathbf{w}_{2m}^{+}, N\overline{\mathbf{w}}_{2m}^{+})_2} = 0(m^{-1}), \qquad \Delta = 2h/l_1,$$

что обеспечивает регулярность системы (3) и сходимость метода редукции при ее решении.

Введем параметр

$$\delta = \sup\left[\frac{(\mathbf{w}_{1n}, N\overline{\boldsymbol{\delta}}_m^{-})_2}{(\mathbf{w}_{1m}^{+}, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^{+})_1}\right], \qquad \boldsymbol{\delta}_m = \mathbf{w}_{1m} - \mathbf{w}_{2m},$$

определенный на множестве собственных функций $\mathbf{w}_{1m}$, $\mathbf{w}_{2m}$ и характеризующий степень их различия вследствие различия геометрических и акустических параметров соответствующих волноводных звеньев.

В предельном случае $h \to 0$, $\delta \to 0$ система (3) имеет тривиальное решение

$$A_{2p}^{+} = 1, \quad A_{2n}^{+} = 0, \quad n \neq p, \quad A_{1m}^{-} = 0,$$

которое можно использовать для построения диагонального приближения, справедливого в более общем случае малых значений параметров $k_t h$, δ (k_t — волновое число для поперечных волн).

Здесь под диагональным понимается приближение, при котором в системе (3) учитываются только элементы квазидиагональной матрицы ($n=m$), и член A_{2p}^{+}, который в случае малых отражателей является доминирующим.

Система (3) в указанном приближении имеет вид

$$A_{1m}^{-}(1-a_{mm}) + A_{2m}^{+}b_{mm} = \frac{(\mathbf{u}_{1p}^{+}, \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{1m}^{-})_\Delta}{(\mathbf{w}_{1m}^{-}, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^{-})_1} + A_{2p}^{+}b_{pp}(\delta_{mp}-1), \tag{4}$$

$$A_{1m}^{-}c_{mm} + A_{2m}^{+} = \frac{(\mathbf{w}_{1p}^{+}, N\overline{\mathbf{w}}_{2m}^{+})_2}{(\mathbf{w}_{2m}^{+}, N\overline{\mathbf{w}}_{2m}^{+})_2} + A_{2p}^{+}(\delta_{mp}-1),$$

$$A_{2p}^{+} = \frac{(\mathbf{w}_{1p}^{+}, N\overline{\mathbf{w}}_{2p}^{+})_2}{(\mathbf{w}_{2p}^{+}, N\overline{\mathbf{w}}_{2p}^{+})_2}.$$

В предельном случае высоких частот ($k_t h \gg 1$) недиагональные элементы системы (3) имеют асимптотическую оценку

$$\frac{(\mathbf{w}_{1n}^{-}, N\overline{\mathbf{w}}_{2m}^{+})_2}{(\mathbf{w}_{2m}^{+}, N\overline{\mathbf{w}}_{2m}^{+})_2} = 0\left(\frac{1}{k_t l_2 |n-m|}\right),$$

$$\frac{(\mathbf{w}_{2n}^{+}, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^{-})_2}{(\mathbf{w}_{1m}^{-}, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^{-})_1} = 0\left(\frac{1}{k_t l_2 |n-m|}\right),$$

$$\frac{(\mathbf{u}_{1n}^{-}, \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{1m}^{-})_\Delta}{(\mathbf{w}_{1m}^{-}, N\overline{\mathbf{w}}_{1m}^{-})_1} = 0\left(\frac{1}{k_t h |n-m|}\right), \qquad k_t h \to \infty,$$

а диагональное приближение (4) оказывается применимым и в этом предельном случае.

Для последующего рассмотрим более подробно собственные коэффициенты отражения и прохождения основной нормальной волны (симметричной либо антисимметричной) в предельном случае $k_t l_1 \gg 1$, когда она вырождена в волну поверхностную.

В этом частном случае при определении скалярных произведений нужно всюду положить

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})_1 = \int_0^{l_1} \left(\sum x_i y_i^* \right) dz = 2 \int_0^{l_1/2} \left(\sum x_i y_i^* \right) dz \approx 2 \int_0^{\infty} \left(\sum x_i y_i^* \right)_{\text{п}} dz,$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})_2 \approx 2 \int_0^{\infty} \left(\sum x_i y_i^* \right)_{\text{п}} dz, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y})_\Delta = 2 \int_0^{h} \left(\sum x_i y_i^* \right) dz$$

(индекс «п» означает, что вместо нормальных волн нужно использовать поверхностные волны).

Структура поверхностной волны описывается выражениями

$$w_1^{\pm} = (e^{-\alpha z} + b e^{-\beta z}) e^{\pm ikx}; \tag{5}$$

$$w_2^{\pm} = \pm i \left(\frac{\alpha}{k} e^{-\alpha z} + b \frac{k}{\beta} e^{-\beta z} \right) e^{\pm ikx},$$

$$w_3^{\pm} = \pm i l_1 \left(\frac{k_t^2 + 2\alpha^2}{k} e^{-\alpha z} + 2bk e^{-\beta z} \right) e^{\pm ikx},$$

$$w_4^{\pm} = l_1 \left(-2\alpha e^{-\alpha z} + b \frac{k_t^2 - 2k^2}{\beta} e^{-\beta z} \right) e^{\pm ikx},$$

$$b = -\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{k}, \quad \alpha^2 = k^2 - \nu^2 k_t^2, \quad \beta^2 = k^2 - k_t^2,$$

$$\nu = c_t / c_L,$$

c_L, c_t — скорость продольных и поперечных волн, причем волновое число k определяется из уравнения Рэлея

$$(k_t^2 - 2k^2)^2 - 4\alpha\beta k^2 = 0.$$

Коэффициенты отражения и прохождения в этом частном случае обозначим через A_1^-, A_2^+ соответственно.

Рассмотрим теперь в диагональном приближении дифракцию поверхностной волны на отражателе типа «зарубки» глубиной h и шириной d (см. фиг. 1, *в*) либо слое, вставленном в однородное полупространство (см. фиг. 1, *в*).

Набор коэффициентов отражения и прохождения поверхностной волны определяется граничными условиями

$$x = 0 \qquad \mathbf{w}_1^+ + A_1^- \mathbf{w}_1^- = \begin{cases} \begin{pmatrix} w_{1,1}^+ + A_1^- w_{1,1}^- \\ w_{2,1}^+ + A_1^- w_{2,1}^- \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & z \in (0, h) \\ A_2^+ \mathbf{w}_2^+ + A_2^- \mathbf{w}_2^-, & z \in (h, \infty), \end{cases} \tag{6}$$

$$x = d \qquad A_3^+ \mathbf{w}_3^+ = \begin{cases} \begin{pmatrix} A_3^+ & w_{1,3}^+ \\ A_3^+ & w_{2,3}^+ \\ 0 & \\ 0 & \end{pmatrix} z \in (0, h), \\ A_2^+ \mathbf{w}_2^+ + A_2^- \mathbf{w}_2^-, \quad z \in (h, \infty). \end{cases} \tag{7}$$

Умножая выражение (6) скалярно на векторы $N\overline{\mathbf{w}}_1^-$, $N\overline{\mathbf{w}}_2^+$, а равенство (7) на векторы $N\overline{\mathbf{w}}_3^+$, $N\overline{\mathbf{w}}_2^-$, получаем систему уравнений для определения искомых коэффициентов A_1^-, $A_2^\pm$, $A_3^\pm$, которая после несложных преобразований сводится к следующей системе относительно коэффициентов отражения и прохождения A_1^-, A_3^+:

$$\begin{aligned} A_1^- a_{11} + A_3^+ a_{12} e^{i(k_2 + k_3)d} &= D_1, \\ A_1^- a_{21} + A_3^+ a_{22} e^{i(k_3 - k_2)d} &= D_2, \end{aligned} \tag{8}$$

$$a_{11}=1-\frac{(\mathbf{u}_1^+,\overline{\sigma}_1^+)_\Delta}{(\mathbf{w}_1^+,N\overline{\mathbf{w}}_1^+)_1}+\frac{(\mathbf{w}_2^+,N\overline{\mathbf{w}}_1^-)_2}{(\mathbf{w}_1^+,N\overline{\mathbf{w}}_1^+)_1}\frac{(\mathbf{w}_1^-,N\overline{\mathbf{w}}_2^+)_2}{(\mathbf{w}_2^+,N\overline{\mathbf{w}}_2^+)_2},$$

$$a_{12}=\frac{(\mathbf{w}_2^+,N\overline{\mathbf{w}}_1^+)_2}{(\mathbf{w}_1^+,N\overline{\mathbf{w}}_1^+)_1}\frac{(\mathbf{w}_3^+,N\overline{\mathbf{w}}_2^-)_2}{(\mathbf{w}_2^+,N\overline{\mathbf{w}}_2^+)_2},$$

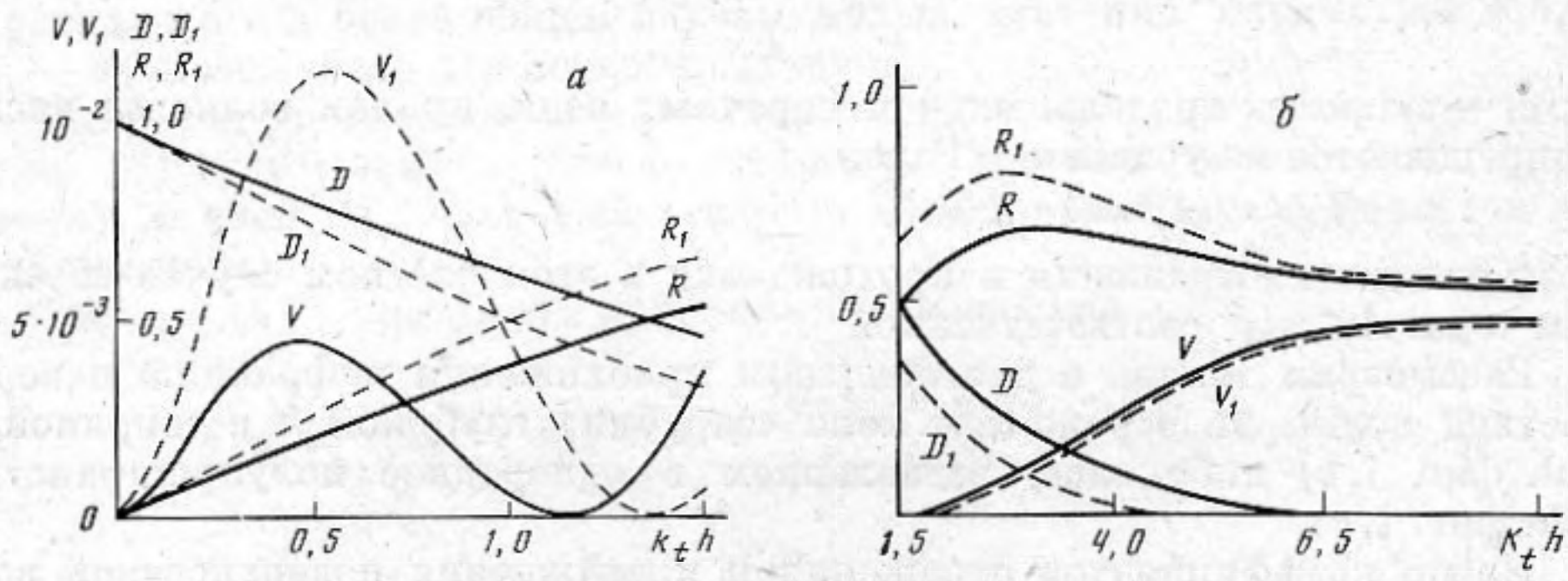
$$a_{21}=\frac{(\mathbf{w}_2^+,N\overline{\mathbf{w}}_3^+)_2}{(\mathbf{w}_3^+,N\overline{\mathbf{w}}_3^+)_1}\frac{(\mathbf{w}_1^+,N\overline{\mathbf{w}}_2^-)_2}{(\mathbf{w}_2^+,N\overline{\mathbf{w}}_2^+)_2},$$

$$a_{22}=1-\frac{(\mathbf{u}_3^+,\overline{\sigma}_3^+)_\Delta}{(\mathbf{w}_3^+,N\overline{\mathbf{w}}_3^+)_1}+\frac{(\mathbf{w}_2^-,N\overline{\mathbf{w}}_3^+)_2}{(\mathbf{w}_3^+,N\overline{\mathbf{w}}_3^+)_1}\frac{(\mathbf{w}_3^+,N\overline{\mathbf{w}}_2^-)_2}{(\mathbf{w}_2^+,N\mathbf{w}_2^+)_2},$$

$$D_1=-\frac{(\mathbf{u}_1^+,\overline{\sigma}_1^-)_\Delta}{(\mathbf{w}_1^+,N\overline{\mathbf{w}}_1^+)_1}-\frac{(\mathbf{w}_2^+,N\overline{\mathbf{w}}_1^-)^2}{(\mathbf{w}_1^+,N\overline{\mathbf{w}}_1^+)_1}\frac{(\mathbf{w}_1^+,N\overline{\mathbf{w}}_2^+)_2}{(\mathbf{w}_2^+,N\overline{\mathbf{w}}_2^+)_2}$$

$$D_2=\frac{(\mathbf{w}_1^+,N\overline{\mathbf{w}}_2^+)_2}{(\mathbf{w}_2^+,N\mathbf{w}_2^+)_2}\frac{(\mathbf{w}_2^+,N\overline{\mathbf{w}}_3^+)_2}{(\mathbf{w}_3^+,N\overline{\mathbf{w}}_3^+)_1}.$$

Полагая известными из решения системы (8) коэффициенты отражения и прохождения A_1^-, A_3^+, обобщим результаты на периодическую си-



Фиг. 2. Зависимость коэффициентов прохождения D, D_1, отражения V, V_1 и рассеяния R, R_1 от частотного параметра $k_t h$

стему «зарубок» либо слоев с параметрами h, d_1, d_2 (см. фиг. 1, *г*), образующих резонатор типа «гребенки» на поверхностных волнах.

В приближении $k_t h \ll 1$, $\delta \ll 1$, $(A_1^- = 0(k_t h),\ 1 - A_3^+ = 0(k_t h))$ можно получить следующие выражения для коэффициента отражения $A_1^-(n)$ поверхностной волны от системы «n» зарубок и коэффициента прохождения поверхностной волны $A_{2n+1}^+(n)$ через систему «n» зарубок (слоев):

$$A_1^-(n)=A_1^-\frac{1-(A_3^+)^{2n}e^{2in(k_1d_1+k_2d_2)}}{1-(A_3^+)^2e^{2i(k_1d_1+k_2d_2)}}+0((A_1^-)^3), \tag{9}$$

$$A_{2n+1}^+(n)=(A_3^+)^n e^{in(k_1d_1+k_2d_2)}+0((A_1^-)^2).$$

Отражение от «гребенки» будет максимальным при выполнении условия

$$k_1d_1+k_2d_2=\pi,\qquad d_1+d_2=\lambda/2,\qquad (k_1=k_2=k=2\pi/\lambda), \tag{10}$$

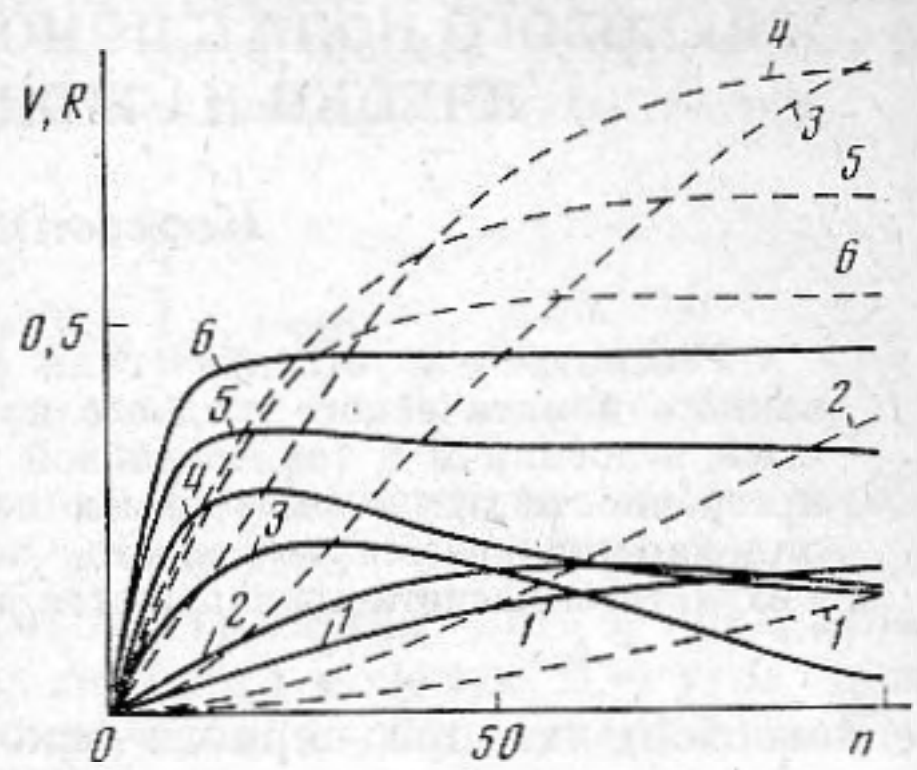
λ — длина поверхностной волны.

Приведем теперь некоторые результаты численных расчетов дифракционной задачи. Предельные случаи $k_t h \ll 1$, $k_t h \gg 1$ анализируются наиболее легко для отражателя типа «ступеньки»:

$k_t h \ll 1$		$k_t h \gg 1$	
$A_1^- = g_0 k_t h;$	$A_1^+ \simeq 1,$	$A_1^+ \simeq 0,$	$A_1^- = g_\infty.$

Численные значения коэффициентов g_0, g_∞ сведены в таблицу для различных значений параметра ν, там же даны значения параметра $k/k_t=c_t/c_R$ (c_R — скорость поверхностной волны).

Характер решения системы (4), (8) для произвольных значений частотного параметра $k_t h$ ($\nu^2=0{,}2$) поясняется фиг. 2. Сплошные линии на фиг. 2 относятся к энергетическим коэффициентам $V=(A_1^-)^2$, $D=(A_1^+)^2$, $R=1-V-D$, характеризующим отражение, прохождение и рассеяние (трансформацию в объемные волны) поверхностной волны на отражателе типа «ступеньки», штриховые линии относятся к аналогичным коэффициентам V_1, D_1, R_1, определенным для «зарубки» шириной $d=\lambda/4$.



Фиг. 3. Зависимость коэффициентов отражения и рассеяния от числа элементов n «гребенки» для следующих значений параметра $k_t h$: *1* – $k_t h=0{,}01$; *2* – 0,02; *3* – 0,05; *4* – 0,1; *5* – 0,15; *6* – 0,2

Можно отметить следующие характерные особенности дифракции. Если высота «ступеньки» («зарубки») меньше длины волны ($k_t h<1$), то собственно отражение поверхностной волны мало по сравнению с ее рассеянием. Трансформация поверхностной волны в объемные является основным механизмом, определяющим потери энергии при прохождении волной такого рода дефектов границы.

При некотором значении частотного параметра $k_t h$ отражение поверхностной волны от «ступеньки»

ν^2	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
g_0	0,293	0,317	0,350	0,378	0,426
$-g_\infty$	0,710	0,689	0,666	0,638	0,605
c_t/c_R	1,060	1,065	1,072	1,081	1,091

(«зарубки») отсутствует [1] (отражение представлено только объемными волнами). Если высота «ступеньки» больше длины волны ($h>\lambda$), то примерно половина энергии падающей волны отражается обратно, другая половина трансформируется в объемные волны ($V\simeq R$, $D\approx 0$).

На фиг. 3 изображено семейство кривых, поясняющих зависимость коэффициентов отражения (штриховые линии) и рассеяния (сплошные линии) от числа зарубок n в «гребенке»; параметром семейства является величина $k_t h$, геометрия гребенки удовлетворяет соотношению $d_1=d_2=\lambda/4$.

Можно отметить, что коэффициент отражения монотонно растет с ростом n (синфазное отражение отдельными элементами «гребенки»), тогда как рассеяние можно существенно снизить выбором достаточно большого числа n и достаточно малого параметра $k_t h$.

Приведенные результаты могут оказаться полезными при расчете затухания поверхностных волн вследствие рассеяния на шероховатой поверхности [2], а также для расчета резонаторов типа «гребенки» на поверхностных волнах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Касаткин Б. А.* Отражение нормальных волн от свободного торца волновода.– Дефектоскопия, 1974, № 4, с. 131–134.
2. *Ахромеева И. Д., Крылов В. В.* Преобразование волны Рэлея в объемные на локальных дефектах поверхности.– Акуст. ж., 1977, т. 23, № 4, с. 510–516.

Всесоюзный научно-исследовательский институт физико-технических и радиотехнических измерений
Хабаровский филиал
Гидрофизический центр

Поступила в редакцию 29.X.1979
После исправления 21.I.1981