АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXVIII 1982 Вып. 3

УДК 534.26

НОРМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ ПРОДОЛЬНО-СДВИГОВОГО ТИПА В УПРУГИХ ПОЛОСАХ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Приходько В. Ю., Тютекин В. В.

Получены дисперсионные уравнения для волновых чисел нормальных волн в упругих тонких полосах с экспоненциально изменяющейся толщиной. Приведены точные и асимптотические оценки для значений критических частот и волновых чисел симметричных нормальных волн в «выпуклых» и «вогнутых» полосах, обладающих симметрией относительно осей координат.

Вопросы возбуждения и распространения волн деформации в тонких полосах из однородного материала к настоящему времени достаточно подробно исследованы и изложены, например, в работах [1, 2]. В то же время в научно-технической литературе практически не освещены задачи о деформации волн в неоднородных полосах, толщина которых является функцией поперечной координаты. Такие полосы в определенном смысле аналогичны слоисто-неоднородным акустическим волноводам. Однако векторный характер и взаимодействие продольных и сдвиговых волн значительно усложняют исследование волн в неоднородных полосах.

Основной трудностью при исследовании волн деформации в неоднородных полосах является нахождение общих решений систем дифференциальных уравнений движения в частных производных с переменными коэффициентами. В тех случаях, когда общие решения систем дифференциальных уравнений удается получить аналитически, как это будет сделано ниже, можно также получить аналитически дисперсионные соотношения для волновых чисел нормальных волн.

Рассмотрим упругую тонкую полосу $W=\{-a<x<a,\ -\infty<y<\infty,\ |z|\leqslant h(x)\}$, в которой распространяются свободные продольно-сдвиговые волны. Для описания процесса распространения волн используем приближенную, «техническую» [1] теорию плоского напряженного состояния, применимую, когда толщина пластины достаточно мала по сравнению с длиной сдвиговой волны в материале. Система дифференциальных уравнений движения (зависимость от времени в виде $\exp(-i\omega t)$ везде опускается) имеет вид

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}+i\omega\rho hu=0,\\
\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}+i\omega\rho hv=0,\\
N_x=-\frac{D}{i\omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma\frac{\partial v}{\partial y}\right),\\
N_y=-\frac{D}{i\omega}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\sigma\frac{\partial u}{\partial x}\right),\\
N_{xy}=-\frac{(1-\sigma)D}{2i\omega}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right).
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Здесь $\mathbf{u}(x, y)=(u(x, y), v(x, y))$ — вектор смещений полосы по осям x и y, ρ — плотность материала; σ — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, N_x, N_y, N_{xy} — усредненные по толщине пластины компоненты тензора напряжений, $D=Eh/(1-\sigma^2)$. Будем полагать, что величины ρ, σ и E постоянны, а толщина полосы переменна $h=h(x)$. Тогда систему уравнений

движения (1) можно написать относительно неизвестных смещений

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sigma\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{h'}{h}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1-\sigma}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)+k_0^2u=0,$$

$$\frac{(1-\sigma)}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\frac{(1-\sigma)}{2}\frac{h'}{h}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+$$

$$+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+k_0^2v=0,$$

где $k_0^2=\rho\omega^2(1-\sigma^2)/E$.

Рассмотрим случай, когда толщина изменяется по закону $h=h_0e^{2\alpha x}$. Для применимости приближенной теории, соответствующей системе уравнений движения (2), должно выполняться условие $\alpha\ll 1/2a\ln(\lambda_t/6h_0)$, где λ_t — длина сдвиговой волны. Решение системы дифференциальных уравнений (2) будем искать в виде

$$(3)\qquad \mathbf{u}=\mathbf{U}\exp(iky+\delta x),$$

где $\mathbf{U}=(U, V)$, k и δ — постоянные величины. Подставляя выражение (3) в формулу (2) и приравнивая нулю определитель системы уравнений относительно неизвестных U и V, получаем алгебраическое характеристическое уравнение четвертой степени относительно неизвестной δ. Характеристическое уравнение можно свести к биквадратному относительно величины $(\delta+\alpha)$ и представить в виде

$$(4)\qquad (\delta+\alpha)^4+(p^2+q^2)(\delta+\alpha)^2+p^2q^2+4\sigma\alpha^2k^2=0,$$

где $p^2=k_0^2-k^2-\alpha^2$, $q^2=(2/1-\sigma)k_0^2-k^2-\alpha^2$. Отсюда находим характеристические числа δ_n:

$$(5)\qquad \begin{gathered}\delta_n=-\alpha\pm\gamma_{1,2},\quad n=1,2,3,4,\\ \gamma_{1,2}^2=-\frac{p^2+q^2}{2}\pm\frac{1}{2}((p^2-q^2)^2-16\sigma\alpha^2k^2)^{1/2}.\end{gathered}$$

Теперь общее решение системы уравнений (2) можно представить, взяв сумму и разность фундаментальных решений (3) для соответствующих δ_n, в следующем виде:

$$(6)\qquad \mathbf{u}(x,y)=\sum_{m=1}^{2}[F_m\mathbf{u}_m^{(s)}(x,k)+R_m\mathbf{u}_m^{(a)}(x,k)]\exp(-\alpha x+iky),$$

$$(7)\qquad \mathbf{u}_m^{(s)}=(i\sin(\gamma_m x),\ i\alpha c_m\sin(\gamma_m x)+\gamma_m b_m\cos(\gamma_m x)),$$

$$(7a)\qquad \mathbf{u}_m^{(a)}=(\cos(\gamma_m x),\ \alpha c_m\cos(\gamma_m x)+i\gamma_m b_m\sin(\gamma_m x)),$$

где $b_m=k\left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right)\left(\frac{2}{1-\sigma}p^2+\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\alpha^2-\gamma_m^2\right)^{-1}$,

$$c_m=-ik\left(\frac{1-3\sigma}{1-\sigma}\right)\left(\frac{2}{1-\sigma}p^2+\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\alpha^2-\gamma_m^2\right)^{-1},$$

F_m и R_m — произвольные постоянные. Векторы $\mathbf{u}_m^{(s)}$ и $\mathbf{u}_m^{(a)}$ характерны тем, что стремятся соответственно к симметричным и антисимметричным решениям системы уравнений (2) при $\alpha\to 0$, т. е. к решениям, описывающим смещения в нормальных волнах в однородной упругой полосе постоянной толщины.

Для определения неизвестного волнового числа k, входящего в выражение (6), необходимо задать конкретные краевые условия на кромках полосы. Рассмотрим, например, случай полосы с неподвижными кромками, фиг. 1, когда выполняются следующие краевые условия:

$$(8)\qquad \mathbf{u}(\pm a, y)=0.$$

Подставляя общее решение (6) системы дифференциальных уравнений движения (2) в краевые условия (8), получаем следующее дисперсионное уравнение для волновых чисел нормальных волн в зажатой полосе:

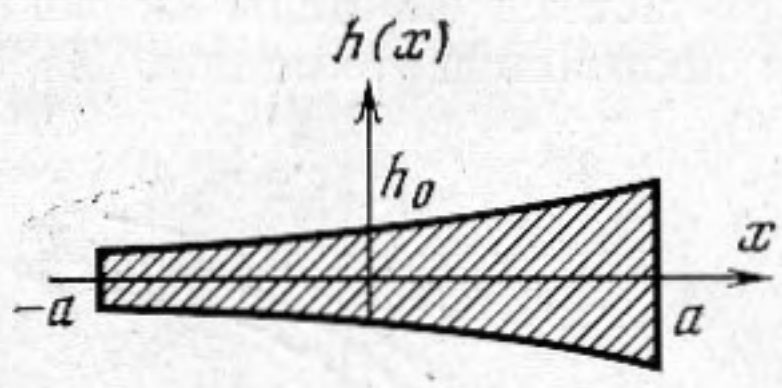
$$\Delta^{(s)}\Delta^{(a)}-\alpha^2 f^2 \sin(2\gamma_1 a)\sin(2\gamma_2 a)=0. \tag{9}$$

Здесь обозначено:

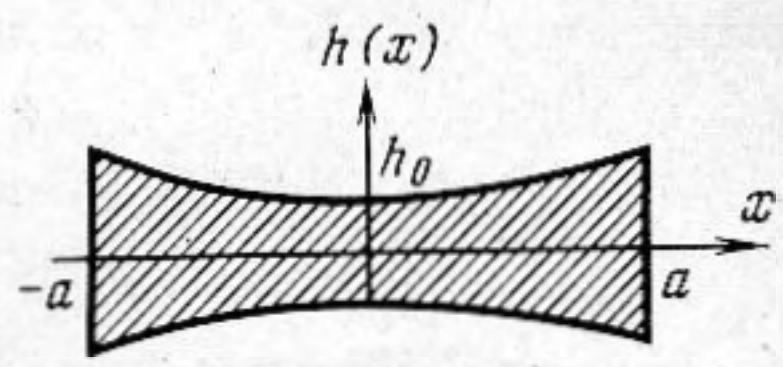
$$\begin{gathered}\Delta^{(s)}=g\sin(\gamma_2 a)\cos(\gamma_1 a)-\sin(\gamma_1 a)\cos(\gamma_2 a),\\ \Delta^{(a)}=\sin(\gamma_2 a)\cos(\gamma_1 a)-g\sin(\gamma_1 a)\cos(\gamma_2 a),\\ g=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\left(\frac{2}{1-\sigma}p^2+\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\alpha^2-\gamma_2^2\right)\left(\frac{2}{1-\sigma}p^2+\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\alpha^2-\gamma_1^2\right)^{-1},\\ f=(\gamma_2^2-\gamma_1^2)\left(\frac{1-3\sigma}{1+\sigma}\right)\gamma_2^{-1}\left(\frac{2}{1-\sigma}p^2+\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\alpha^2-\gamma_1^2\right)^{-1}.\end{gathered} \tag{10}$$

Дисперсионные уравнения для полос со свободными кромками приведены в Приложении.

Отметим, что при $\alpha=0$ уравнение (9) переходит в дисперсионное уравнение для волновых чисел в полосе постоянной толщины, причем корни



Фиг. 1. Несимметричная полоса



Фиг. 2. Симметричная «вогнутая» полоса

уравнения $\Delta^{(s)}=0$ при $\alpha=0$ соответствуют волновым числам симметричных волн, а корни уравнения $\Delta^{(a)}=0$ при $\alpha=0$ соответствуют волновым числам антисимметричных нормальных волн.

Аналогично получаются дисперсионные уравнения для симметричных относительно оси $x=0$ полос с толщиной, изменяющейся по закону $h=h_0\exp(2\alpha|x|)$. В этом случае функция $h'/h=2\alpha\,\mathrm{sign}\,x$, являющаяся коэффициентом при частных производных в уравнениях движения (2), имеет разрыв первого рода в точке $x=0$. Поэтому для получения дисперсионных уравнений и собственных функций поперечного сечения нужно использовать условия непрерывности общего решения для смещений (6) в точке $x=0$. Условия непрерывности физически соответствуют условиям «сварки» по оси $x=0$ двух полос: полосы с толщиной $h^+=h_0\exp(2\alpha x)$, $a\geqslant x\geqslant 0$ и полосы с толщиной $h^-=h_0\exp(-2\alpha x)$, $-a\leqslant x<0$. В дальнейшем будем иметь в виду, что при $\alpha>0$ рассматривается «вогнутая» полоса, поперечное сечение которой изображено на фиг. 2. При $\alpha<0$ имеем «выпуклую» полосу (фиг. 3). Такие полосы имеют симметрию относительно оси $x=0$, и поэтому естественно ожидать, что нормальные волны можно разделить на два класса, которые, как и в случае плоской полосы, будем называть в дальнейшем симметричными и антисимметричными нормальными волнами. Волновые числа таких нормальных волн являются корнями следующих уравнений:

$$\Delta_1^{(s)}=\Delta^{(s)}-\alpha f\sin(\gamma_1 a)\sin(\gamma_2 a)=0, \tag{11}$$

$$\Delta_1^{(a)}=\Delta^{(a)}-\alpha f\cos(\gamma_1 a)\cos(\gamma_2 a)=0, \tag{11a}$$

Величины Δ^s, $\Delta^{(a)}$ и f здесь те же, что и в формуле (10). Очевидно, что если k_n — корень уравнения (11), то выполняются следующие соотношения, описывающие в некотором роде симметрию нормальных волн:

$$u^{(s)}(k_n, x, \alpha)=-u^{(s)}(k_n, -x, -\alpha),\quad v^{(s)}(k_n, x, \alpha)=v^{(s)}(k_n, -x, -\alpha). \tag{12}$$

Иначе говоря, можно сказать, что, как и в случае плоской полосы, продольная составляющая вектора смещений в симметричной нормальной волне изменяет знак при переходе из левой половины полосы в правую. Поперечная же составляющая при этом знака не меняет, что и следует из второго соотношения в формуле (12).

Рассмотрим теперь влияние кривизны поперечного сечения полосы на поведение критических частот и волновых чисел симметричных волн в «выпуклых» и «вогнутых» полосах.

Подставляя значения $k=0$ в формулу (11) получаем уравнение для определения критических частот

$$\sin(\gamma_1 a)[\cos(\gamma_2 a)+\alpha f \sin(\gamma_2 a)]=0. \tag{13}$$

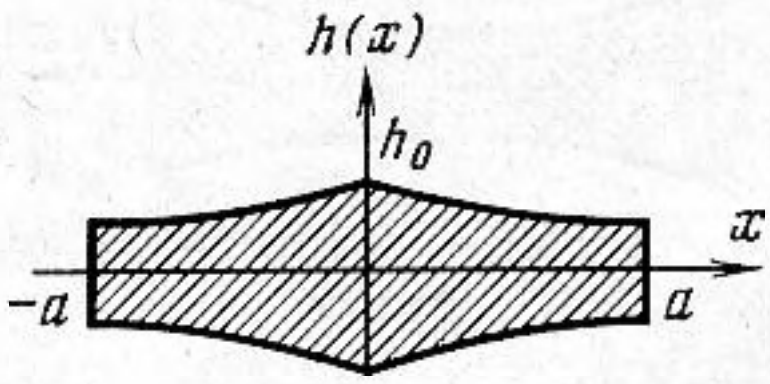
Уравнение (13) имеет два множества корней. Первое множество корней определяется уравнением

$$\sin(\rho\omega^2(1-\sigma)a^2/E-(\alpha a)^2)^{1/2}=0, \tag{14}$$

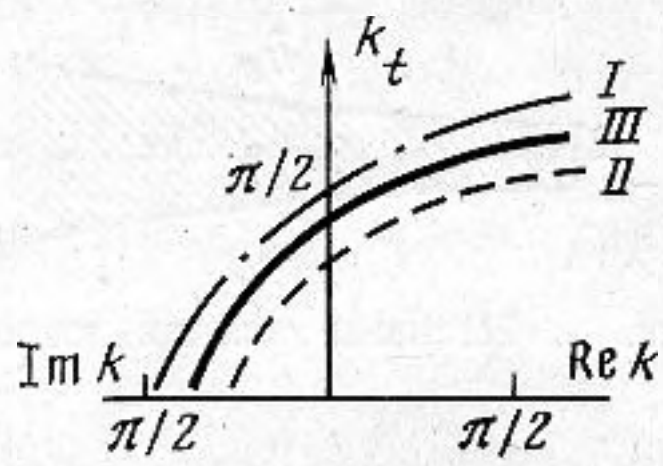
корни которого можно представить в виде

$$\omega_n=(\Omega_n^2+E\alpha^2/\rho(1-\sigma^2))^{1/2},\ n=1, 2, \ldots, \tag{15}$$

где $\Omega_n=(E/\rho(1-\sigma^2))^{1/2}n\pi$ — критические частоты нормальных волн (зарождающихся продольными) в полосе постоянной толщины. Из формулы (15) следует, что как для «выпуклых», так и для «вогнутых» полос критические частоты симметричных нормальных волн повышаются по сравнению с критическими частотами полос постоянной толщины. Иначе обстоит дело с другим множеством критических частот, являющихся корнями уравнения



Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 3. Симметричная «выпуклая» полоса

Фиг. 4. Дисперсия первой распространяющейся моды: I – «вогнутая» полоса; II – «выпуклая» полоса; III – плоская полоса

$$\operatorname{ctg}(\gamma_2 a)+\alpha f=0. \tag{16}$$

Асимптотические значения корней уравнения (16) можно представить в виде

$$\omega_n=\Omega_n^{(t)}+\frac{1-3\sigma}{1+\sigma}\frac{\sigma}{n\pi}+O\left(\frac{\alpha}{(n\pi)^2}\right). \tag{17}$$

Здесь $\Omega_n^{(t)}=(E/2\rho a^2)^{1/2}\pi(2n+1)/2$ — критические частоты нормальных волн (зарождающихся сдвиговыми) в полосе постоянной толщины. В этом случае, как следует из формулы (17), критические частоты симметричных нормальных волн для «вогнутых» полос повышаются, а для «выпуклых» полос понижаются по сравнению с соответственными критическими частотами полос постоянной толщины. При малых $\alpha \ll k_0$ корням уравнения (11) можно дать следующую приближенную оценку:

$$k=k_p+\alpha r(k_p, k_0, \sigma)+o(\alpha^2 a^2). \tag{18}$$

Здесь k_p — корень уравнения (11) при $\alpha=0$, т.е. волновое число нормальной волны в полосе постоянной толщины; функция

$$r=\frac{1-3\sigma}{1+\sigma}\frac{k_0^2}{pk_p}\left[\frac{k_p^2(p^2+q^2)}{p^2q^2}\operatorname{ctg}(pa)+\frac{a}{n}(k_p^2+p^2)-\right.$$
$$\left.-\frac{a}{q}(k_p^2+q^2)\operatorname{ctg}(qa)\operatorname{ctg}(pa)\right]^{-1}$$

определяет уменьшение (увеличение) значений волновых чисел для «выпуклых» («вогнутых») полос по сравнению с соответственными волновыми числами для однородной полосы (фиг. 4). Например, для первой распространяющейся моды, зарождающейся на частоте $k_ta=0{,}5\pi$, получаем, что $r<1$ при $k_ta\leqslant\pi$. Оценки корней уравнения (11) по формуле (18) удобны тем, что не приходится каждый раз решать уравнение (11) при различных малых значениях α. Используются только уже известные [1] значения корней k_p для полос постоянной толщины.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В полосах со свободными от напряжений кромками выполняются краевые условия

$$N_x=\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma\frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad x=\pm a;\qquad N_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad x=\pm a. \tag{19}$$

Дисперсионное уравнение для волновых чисел нормальных волн в несимметричной относительно оси $x=0$ (фиг. 1) полосе с краевыми условиями (19) имеет вид

$$\det|\Delta_{ij}|=0, \tag{20}$$

где Δ_{ij} — элементы определителя четвертого порядка:

$$\Delta_{ij}=\begin{cases}A_j\cos(\gamma_ja)\pm B_j\sin(\gamma_ja),\\ -C_j\cos(\gamma_ja)\pm D_j\sin(\gamma_ja),\end{cases}\quad j=1,2,$$
$$\Delta_{ij'}=\begin{cases}\pm iA_j\sin(\gamma_ja)-iB_j\cos(\gamma_ja),\\ \pm iC_j\sin(\gamma_ja)-iD_j\cos(\gamma_ja),\end{cases}\quad j'=j+2.$$

Здесь знак (+) берется для $i=1,3$, знак (−) — для $i=2,4$.

$$A_j=-\alpha(1-ik\sigma c_j),\qquad B_j=-\gamma_j(1+k\sigma b_j),$$
$$C_j=ik_0-\alpha^2c_j+i\gamma_j^2b_j,\qquad D_j=-\alpha\gamma_j(c_j+ib_j),$$

b_j, c_j, γ_j — указаны в формулах (5, 7).

Дисперсионные уравнения для волновых чисел симметричных и антисимметричных нормальных волн в полосах, имеющих симметрию относительно оси $x=0$ (фиг. 2, 3), можно написать в виде равенств нулю определителей второго порядка

$$\det|\Delta_{ij}^{(s)}|=0;\quad \det|\Delta_{ij}^{(a)}|=0, \tag{21}$$

где $\Delta_{1j}^{(s)}=-iB_j\cos(\gamma_ja)+iA_j\sin(\gamma_j,a)$,

$$\Delta_{2j}^{(s)}=iC_j\sin(\gamma_ja)-iD_j\cos(\gamma_ja),\qquad \Delta_{1j}^{(a)}=A_j\cos(\gamma_ja)+B_j\sin(\gamma_ja),$$

$$\Delta_{2j}^{(a)}=C_j\cos(\gamma_ja)+D_j\sin(\gamma_ja).$$

Здесь, так же как и в случае зажатой полосы, $\alpha<0$ соответствует «выпуклой» полосе, а $\alpha>0$ — «вогнутой» полосе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бобровницкий Ю. И., Генкин М. Д., Маслов В. П., Римский-Корсаков А. В.* Распространение волн в конструкциях из тонких стержней и пластин. М.: Наука, 1974.
2. *Микер Т., Мейтцлер А.* Волновое распространение в протяженных цилиндрах и пластинах.— В кн.: Физическая акустика/Под ред. Мэзона У., т. I, ч. А, М.: Мир, 1966.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
7.I.1981