

УДК 534.213

## НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГАЗА В ПОЛУОТКРЫТОЙ ТРУБЕ

*Галиуллин Р. Г., Ревва И. П., Халимов Г. Г.*

Предложена приближенная акустическая теория резонансных колебаний в полуоткрытой трубе. Использовано нелинейное граничное условие на открытом конце и предположение о слабой нелинейности колебаний внутри трубы. Получено хорошее согласие теории с экспериментом.

Резонансные колебания газа в трубах относятся к малоизученной области акустики, интенсивно развивающейся в настоящее время [1—3]. Теория таких колебаний необходима для эффективного их использования на практике, в частности для интенсификации процессов тепло- и массообмена [4].

Попытки построения теории нелинейных колебаний в полуоткрытой трубе [5—7] показали, что сложность задачи заключается прежде всего в постановке граничного условия на открытом конце. Несомненно, что это условие должно быть нелинейным, т. е. необходимо учитывать рост импеданса открытого конца  $Z$  при увеличении амплитуды колебаний скорости [8—10].

В работе [11] методом характеристик проведено теоретическое исследование нелинейных колебаний большой амплитуды с излучением ударных волн в предположении о чисто активном характере импеданса открытого конца.

В настоящей работе ставится задача построения акустического приближения к теории нелинейных колебаний в полуоткрытой трубе. При этом в граничном условии учитываются реактивная часть импеданса и более медленный рост активной части с увеличением амплитуды колебаний скорости.

Рассмотрим колебания газа в цилиндрической трубе длиной  $L$ , радиусом  $R$ , на одном конце которой колеблется поршень по гармоническому закону, другой конец трубы открыт. Введем цилиндрические координаты так, чтобы поршень располагался в точке  $x=0$ , открытый конец соответствовал  $x=L$ , на оси трубы  $r=0$ , на стенке  $r=R$ .

Предположим, что распределенная по длине трубы нелинейность колебаний мала. Согласно [12], это предположение выполняется, если мал параметр типа  $((\kappa+1)/2)M\omega L/c_0$ , где  $\kappa$  — отношение удельных теплоемкостей,  $M$  — число Маха,  $\omega$  — циклическая частота,  $c_0$  — скорость звука. Для резонансных колебаний в полуоткрытой трубе удобнее пользоваться параметром  $\varepsilon=U_\infty/\omega L$ , где  $U_\infty$  — амплитуда колебаний скорости на оси трубы. Связь этих величин получить легко  $((\kappa+1)/2)M\omega L/c_0 \approx 2,96\varepsilon$  при  $\kappa=1,4$ . Таким образом, малость  $\varepsilon$  определяет применимость положения о сравнительно слабой нелинейности колебаний внутри трубы. Например,  $\varepsilon=0,1$  соответствует  $U_\infty \approx 54$  м/с.

Предположение о малости  $\varepsilon$  позволяет использовать метод возмущений, при этом решение ищется в виде разложений по степеням параметра  $\varepsilon$ . Общее решение уравнений первого приближения для длинной осесимметричной трубы ( $R/L \ll 1$ ) при  $T_0 = \text{const}$ , где  $T_0$  — осредненная температура, и идеального газа с постоянными удельными теплоемкостями, постоянными коэффициентами динамической вязкости и теплопроводности дано в работе [13]. Но выражение для радиальной компоненты скорости  $v_1$  [13] не удовлетворяет граничному условию на стенке, где  $v_1$ , так же как продольная компонента  $u_1$ , должна быть равна нулю. Если потребовать конечности  $(v_1 r)$  на оси трубы и  $v_1=0$  на стенке, ограничиться случаем вы-

сокочастотных колебаний  $R\sqrt{\omega/2\nu} \gg 1$  и воспользоваться асимптотическими разложениями функций Бесселя для большого аргумента [14], можно получить

$$(1a) \quad p_1 = [-Ae^{ikx} - Be^{-ikx}]e^{i\omega t},$$

$$(1б) \quad u_1 = \frac{1}{\rho_0 c_0} [Ae^{ikx} - Be^{-ikx}] \left[ 1 - \sqrt{\frac{R}{r}} e^{-(1+i)\sqrt{\omega/2\nu}(R-r)} \right] e^{i\omega t},$$

$$(1в) \quad v_1 = \frac{(i+1)\omega}{2\rho_0 c_0^2} \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \left\{ \left( \frac{\kappa-1}{\sqrt{Pr}} + 1 \right) \frac{R}{r} - \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{R}{r}} \left[ e^{-(1+i)\sqrt{\omega Pr/2\nu}(R-r)} + \frac{\kappa-1}{\sqrt{Pr}} e^{-(1+i)\sqrt{\omega/2\nu}(R-r)} \right] \right\} p_1,$$

$$(1г) \quad \rho_1 = \frac{1}{c_0^2} \left[ 1 + (\kappa-1) \sqrt{\frac{R}{r}} e^{-(1+i)\sqrt{\omega Pr/2\nu}(R-r)} \right] p_1,$$

$$(1д) \quad T_1 = \frac{1}{\rho_0 c_p} \left[ 1 - \sqrt{\frac{R}{r}} e^{-(1+i)\sqrt{\omega Pr/2\nu}(R-r)} \right] p_1,$$

где  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность газа, номер индекса обозначает соответствующее приближение,  $A$  и  $B$  — постоянные,  $k = \omega/c_0$  — волновое число,  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $Pr$  — число Прандтля.

Можно показать, что при  $r \sim R$  и без учета зависимости пульсаций плотности от  $r$  выражения (1б), (1в) переходят в соответствующие формулы Вестервельта [4] для плоского пограничного слоя сжимаемой среды.

Коэффициенты  $A$  и  $B$  в (1) являются комплексными величинами. Произведя замену  $A = -(C \exp(i\alpha))/2$ ,  $B = -(C \exp(-i\alpha))/2$ , получим вместо (1а), (1б) более удобные для вычислений выражения

$$(2) \quad p_1 = C \cos(kx + \alpha) \exp(i\omega t),$$

$$(3) \quad u_1 = -\frac{iC}{\rho_0 c_0} \sin(kx + \alpha) \exp(i\omega t) \left[ 1 - \sqrt{\frac{R}{r}} \exp(-(1+i)\sqrt{\omega/2\nu}(R-r)) \right],$$

где  $C$ ,  $\alpha$  — также комплексные константы, определяемые граничными условиями на концах трубы. Граничное условие на поршне для высокочастотных колебаний имеет вид [13]

$$(4) \quad u_1(x=0, r=0) = \omega \delta \exp(i\omega t),$$

где  $\delta$  — амплитуда смещения поршня.

Рассмотрим условия на открытом конце. Вийнгаарден [5] был, по-видимому, первым, кто пытался теоретически описать нелинейное поведение открытого конца, исходя из несимметричности фаз втекания и вытекания. Была использована аналогия со случаем потенциального стационарного стока, расположенного вблизи открытого конца в сечении  $x_e \simeq L$ , для описания течения во время всасывания

$$(5) \quad p_e + \rho_e u_e^2 + \frac{C^* R}{2} \frac{\partial(\rho_e u_e)}{\partial t} = p_0,$$

истечение стационарной струи при  $p_e = p_0$  описывало вторую фазу движения газа у открытого конца. В работе [7] было показано, что, во-первых, третий член в левой части (5) при большой амплитуде колебаний скорости мал и им можно пренебречь и, во-вторых, коэффициент при втором члене зависит от геометрии открытого конца. В случае труб с гладкой кромкой с учетом несжимаемости потока вблизи открытого конца выражение (5) переходит в

$$(6) \quad p_e - p_0 = -0,5 \rho_0 u_e^2.$$

Главным недостатком предложенной модели является прямой перенос стационарных моделей на нестационарный случай. В экспериментальной

работе [8] показано, что при небольших уровнях звукового давления (менее 120 дБ)  $p_1 \sim |u_1|$ , где  $\|$  обозначает амплитуду. При более высоких уровнях звукового давления линейный характер связи нарушается и можно записать  $p_1 \sim |u|^2$ , здесь  $u$  содержит более высокие гармоники. С учетом  $|u_1|/|u| \simeq 1$  (в опытах [8] амплитуда пульсаций на основной частоте была не менее  $0,9|u|$ ) запишем  $p_1 \sim |u_1|^2$ .

Если принять

$$(7) \quad p_1 = p_e - p_0 \simeq 0,5 \rho_0 u_1 |u_1|.$$

то выражение (6) обобщается на весь период и можно применить понятие импеданса открытого конца  $Z$ . Формулу (7) осталось уточнить в том смысле, что при  $|u_1| \rightarrow 0$  связь между  $p_1$  и  $u_1$  должна переходить в выражение для импеданса излучения открытого конца  $(p_1/u_1)_{x=L, r=0} = Z_u$ , где  $Z_u = X + iY$ , определяемого формулами Гутина [15]:  $X = \rho_0 \omega^2 d^2 / 16 c_0$ ,  $Y = -\rho_0 \omega d / \pi$ , где  $d$  — диаметр трубы. Таким образом, для колебаний большой амплитуды граничное условие следует писать в виде

$$(8) \quad Z = \frac{p_1(x=L)}{u_1(x=L, r=0)} = Z_u + \frac{1}{2} \rho_0 |u_1(x=L, r=0)|.$$

Тогда для вычисления  $C$ ,  $\alpha$  имеем

$$\begin{aligned} \bar{Y} - i\bar{X} - (i|C|/2\rho_0 c_0^2) \sin(kL + \alpha) &= \text{ctg}(kL + \alpha), \\ M &= -(iC/\rho_0 c_0^2) \sin \alpha, \end{aligned}$$

где  $M = \omega \delta / c_0$ ,  $\bar{Y} = Y / \rho_0 c_0$ ,  $\bar{X} = X / \rho_0 c_0$ . Положив  $\alpha \ll 1$ , разложив функции в ряд по степеням  $\alpha$  и оставив только члены первого порядка, получим  $\bar{Y} - i\bar{X} - 0,5i|C|(\sin kL + \alpha \cos kL) = [\text{ctg } kL - \alpha(1 + \text{ctg}^2 kL)]$ ,  $iM = \bar{C}\alpha$ , где  $\bar{C} = C/\rho_0 c_0^2$ . В околорезонансной области  $\cos kL \text{ ctg } kL \rightarrow 0$ , поэтому  $(\bar{Y} - i\bar{X}) - 0,5i|\bar{C}|\sin kL = \text{ctg } kL - \alpha$ ,  $iM = \bar{C}\alpha$ . Представив  $\bar{C}$  и  $\alpha$  в виде  $\bar{C} = |\bar{C}|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ,  $\alpha = \alpha_0 + i\beta$ , получим

$$\begin{cases} |\bar{C}|(\alpha_0 \sin \varphi + \beta \cos \varphi) = M \\ \alpha_0 \cos \varphi - \beta \sin \varphi = 0 \\ \text{ctg } kL - \alpha_0 = \bar{Y} \\ \beta - 0,5|\bar{C}|\sin kL = \bar{X}, \end{cases}$$

откуда

$$(9a) \quad \alpha_0 = \text{ctg } kL - \bar{Y}$$

$$(9б) \quad \beta = \bar{X} + 0,5|\bar{C}|\sin kL$$

$$(9в) \quad M = |\bar{C}| \sqrt{(\text{ctg } kL - \bar{Y})^2 + (\bar{X} + 0,5|\bar{C}|\sin kL)^2}.$$

После несложных преобразований выражения (2), (3) можно привести к виду

$$(10) \quad p_1 = \rho_0 c_0^2 |\bar{C}| [\cos(kx + \alpha_0) \text{ch } \beta + i \sin(kx + \alpha_0) \text{sh } \beta] \exp(i\omega t),$$

$$(11) \quad u_1 = c_0 |\bar{C}| [\cos(kx + \alpha_0) \text{sh } \beta - i \sin(kx + \alpha_0) \text{ch } \beta] \exp(i\omega t) \times \\ \times \left[ 1 - \sqrt{\frac{R}{r}} \exp(-(1+i)\sqrt{\omega/2\nu}(R-r)) \right],$$

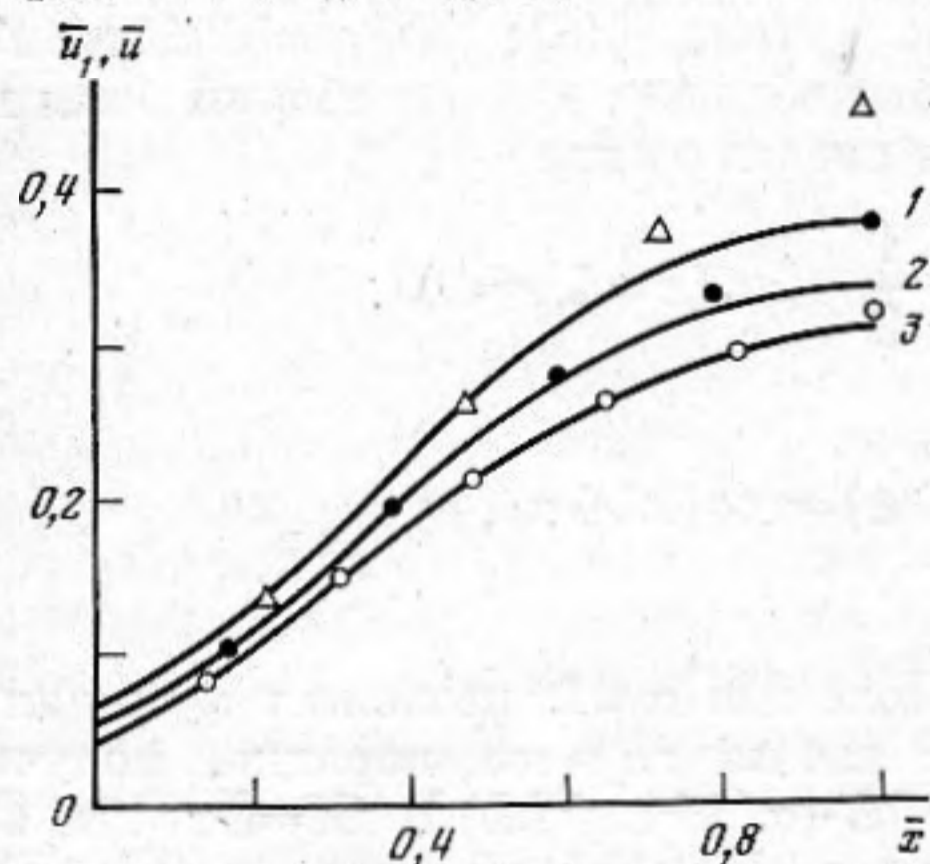
где  $|\bar{C}|$ ,  $\alpha_0$  и  $\beta$  определяются системой (9). Нетрудно видеть, что при  $\beta = \bar{X}$ , т. е. когда амплитуда скорости мала,  $\text{ch } \beta \rightarrow 1$ ,  $\text{sh } \beta \rightarrow 0$ , сдвиг фаз между пульсациями давления и скорости стремится к  $\pi/2$ . По мере роста амплитуды колебаний увеличивается и  $\beta$ , определяемая соотношением (9б). Это приводит к тому, что скорость начинает отставать по фазе по сравнению с первоначальным значением, а давление, наоборот, опережать прежнюю величину, т. е. сдвиг фаз между скоростью и давлением уменьшается.

Распределение безразмерной амплитуды скорости  $(u_1/c_0)_{\max}$  вдоль оси трубы легко получить из (11):

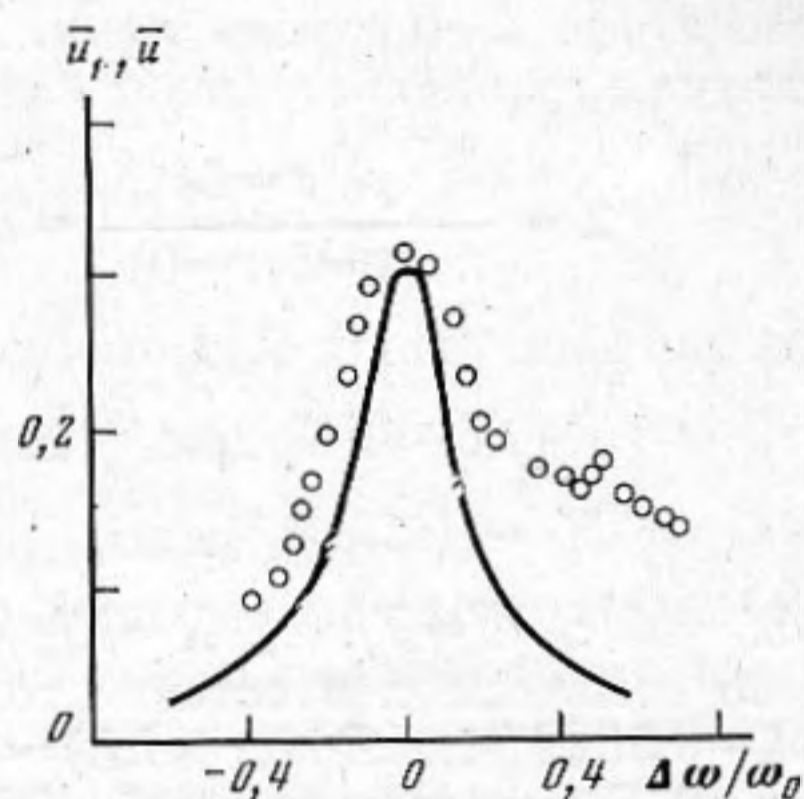
$$(12) \quad (u_1/c_0)_{\max} = |\bar{C}| \sqrt{\text{ch}^2 \beta - \cos^2(kx + \alpha_0)}.$$

Экспериментальная часть работы выполнена на установке, подробное описание которой дано в статье [16]. Были измерены распределения полуразмаха пульсаций скорости при резонансе для трех различных длин труб  $L_0 = 3,485, 4,485, 5,485$  м, где  $L_0$  — реальная длина трубы, а также зависимости полуразмаха пульсаций скорости от частоты колебаний в около-резонансной области.

На фиг. 1 показаны зависимости безразмерной амплитуды пульсаций скорости  $\bar{U}_1 = (u_1/c_0)_{\max}$ , вычисленной по формуле (12), и безразмерного



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Распределение безразмерной амплитуды пульсаций скорости  $\bar{U}_1$  (сплошные линии) и безразмерного полуразмаха пульсаций скорости  $\bar{U}$  (точки) по длине трубы. 1 —  $L_0 = 3,485$  м ( $\omega_0/2\pi = 22$  Гц); 2 —  $L_0 = 4,485$  м ( $\omega_0/2\pi = 17,5$  Гц); 3 —  $L_0 = 5,485$  м ( $\omega_0/2\pi = 14,5$  Гц)

Фиг. 2. Резонансные кривые безразмерной амплитуды пульсаций скорости  $\bar{U}_1$  (сплошная линия) и безразмерного полуразмаха пульсаций скорости  $\bar{U}$  (точки) на открытом конце для трубы длиной  $L_0 = 5,485$  м

полуразмаха пульсаций скорости  $\bar{U} = (u/c_0)_{\max}$ , измеренного экспериментально, от безразмерной координаты  $\bar{x} = x/L$ , где  $L$  — эффективная длина трубы [16]. Как видно, качественное соответствие теории и эксперимента хорошее. Полное совпадение результатов наблюдается ближе к закрытому концу трубы. Это естественно, так как эксперимент показывает, что у закрытого конца форма колебаний близка к синусоидальной [16]. С приближением к открытому концу симметричность формы колебаний нарушается и формируется разрыв. На открытом конце нелинейность колебаний максимальна, поэтому расхождение теории и эксперимента также наибольшее. Нетрудно заметить, что с уменьшением длины трубы эти количественные расхождения несколько увеличиваются (но не превышают 17%). Этот факт легко объясняется тем, что теория построена в предположении о слабом характере нелинейности колебаний. С уменьшением длины трубы растет амплитуда пульсаций скорости и соответственно их нелинейность. Поэтому результаты теории оказываются немного заниженными. Тем не менее теория хорошо описывает эксперимент в случае 3, хотя амплитуда пульсаций скорости на открытом конце при этом достигает 100 м/с.

На фиг. 2 представлены резонансные кривые безразмерной амплитуды пульсаций скорости и безразмерного полуразмаха пульсаций скорости на открытом конце как функций безразмерной частоты  $\Delta\omega/\omega_0$ , где  $\omega_0$  — резонансная частота,  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ . Очевидно, что теория хорошо описывает поведение резонансной кривой при частотах ниже резонанса. Выше резонанса совпадение теории и эксперимента хуже.

Сравнение теоретических и экспериментальных результатов приводит к выводу, что предложенная теория резонансных колебаний в полукрытой трубе пригодна даже для описания колебаний большой амплитуды (пульсации скорости в эксперименте превышали 150 м/с), хотя при построении теории было сделано предположение о сравнительно слабом характере нелинейности колебаний.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Галиев Ш. У., Ильгамов М. А., Садыков А. В. О периодических ударных волнах в газе.— Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, 1970, № 2, с. 57–66.
2. Zaripov R. G., Ulhamov M. A. Nonlinear gas oscillations in a pipe.— J. sound and vibration, 1976, v. 46, № 2, p. 245–257.
3. Зарипов Р. Г. Нелинейные колебания газа в открытой трубе.— Акуст. ж., 1977, т. 23, № 3, с. 378–383.
4. Галиуллин Р. Г., Репин В. Б., Халимов Н. Х. Течение вязкой жидкости и теплообмен тел в звуковом поле. Казань: Изд-во КГУ, 1978. 128 с.
5. Van Wijngaarden L. On the oscillations near and at resonance in open pipes.— J. Eng. Math., 1968, v. 2, № 3, p. 225–240.
6. Jimenez J. Nonlinear gas oscillations in pipes. Part I. Theory.— J. Fluid Mech., 1973, v. 59, p. 23–46.
7. Disselhorst J. H. M., Van Wijngaarden L. Flow in the exit of open pipes during acoustic resonance.— J. Fluid Mech., 1980, v. 99, № 2, p. 293–319.
8. Ingard U., Ising H. Acoustic nonlinearity of an orifice.— J. Acoust. Soc. America, 1967, v. 42, № 1, p. 6–17.
9. Sturtevant B. B. Nonlinear gas oscillations in pipes. Part 2. Experiment.— J. Fluid Mech., 1974, v. 63, № 1, p. 97–120.
10. Hersh A. S., Rogers T. Fluid mechanical model of the acoustic impedance of small orifices.— AIAA Pap., 1975, v. 495, p. 1–10.
11. Халимов Г. Г., Галиуллин Р. Г., Ревва И. П. Колебания газа большой амплитуды в открытой трубе.— В кн.: Научные исследования в области математики и физики. Ташкент: Изд-во Ташк. ГПИ, 1979, с. 3–12.
12. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 520 с.
13. Mercli P., Thoman H. Thermoacoustic effects in a resonance tube.— J. Fluid Mech. 1975, v. 70, № 1, p. 161–178.
14. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1978. 224 с.
15. Раушенбах В. Б. Вибрационное горение. М.: Физматгиз, 1964. 500 с.
16. Галиуллин Р. Г., Халимов Г. Г. Исследование нелинейных колебаний газа в открытых трубах.— Инж.-физ. ж., 1979, т. 37, № 6, с. 1043–1050.

Казанский государственный университет  
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступила в редакцию  
2.II.1981