АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXVIII 1982 Вып. 5

УДК 534.26

МЕТОД КОРРЕКЦИИ РЕШЕНИЯ ДИФФУЗИОННОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ Г. Д. МАЛЮЖИНЦА ДЛЯ ПЛОСКОГО ВОЛНОВОДА И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ. I

Полянский Э. А.

В работе показывается, что нахождение звукового поля в плоском волноводе сводится к квадратуре от решения уравнения типа Шредингера плюс невязка, которая является решением системы дифференциально-разностных уравнений.

Метод параболического уравнения был предложен отечественными учеными. Параболическое уравнение в теории дифракции было впервые использовано в 1944 г. М. А. Леонтовичем [1] в задаче о распространении электромагнитных волн вблизи плоской поглощающей поверхности, характеризуемой импедансным граничным условием, получившим в электродинамике название граничного условия М. А. Леонтовича.

Волновое поле искалось в виде произведения быстро осциллирующего множителя, вид которого находился из физических соображений, на некоторую слабо меняющуюся функцию, которую Г. Д. Малюжинец назвал волновой амплитудой поля.

Далее М. А. Леонтович применил приближение, которое ранее использовалось в теории теплопроводности или диффузии при наличии конвекции [2] и которое пренебрегало диффузионным переносом в направлении конвективного потока и учитывало его лишь в поперечном направлении (поэтому второе название метода — поперечная диффузия).

В результате решалось укороченное уравнение $2iku_x+u_{yy}=0$, которое является уравнением параболического типа. Дальнейшее развитие это уравнение получило в основном при изучении задач дифракции на выпуклых телах, размеры которых велики по сравнению с длиной волны, а среда является однородной. Изучалось поведение поля в зависимости от различных положений источника и приемника по отношению к выпуклому телу (зоны освещенности, тени, полутени и т. д.). Современное состояние вопроса и библиография отражены в [3]. Отметим большой вклад советских физиков В. А. Фока и Л. А. Вайнштейна в развитие метода параболического уравнения [4].

Важным шагом в развитие теории параболического уравнения было введение Г. Д. Малюжинцем [5–7] лучевых координат (ξ, η, ζ), построенных с помощью принципа Ферма или его обобщения и параболического уравнения в лучевых координатах для однородной среды $(n^2=1)$:

$$2ik\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{h_\eta h_\zeta}\left[\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{h_\zeta}{h_\eta}\frac{\partial u}{\partial_\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{h_\eta}{h\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)\right]+$$
$$+ik\frac{\partial \ln(h_\eta h_\zeta)}{\partial \xi}u=0,$$

описывающего поперечную диффузию волновой амплитуды $u(\xi, \eta, \zeta)$ по фронтам обобщенной геометрической оптики $\xi=\mathrm{const}(h_\xi=1, h_\eta, h_\zeta)$ — коэффициенты Ламэ координат (ξ, η, ζ). Дифракционное поле p представляется как $p=e^{ik\xi}u(\xi, \eta, \zeta)$.

Применение лучевых координат, которые для клина являются полярными координатами с центром в вершине угла клина, и использование параболического уравнения в лучевых координатах привело Г. Д. Малюжинца к успеху при решении этой задачи. Было показано, что при $kr\to$

$\to+\infty$ решение, полученное по методу параболического уравнения, асимптотически стремится к точному решению рассматриваемой задачи. Метод введения лучевых координат заманчив с той точки зрения, что ослабляет осцилляцию волнового процесса, поэтому решение параболического уравнения в лучевых координатах можно получить на ЭВМ значительно легче методами современной теории, однако при этом возникает трудность обратного перехода от лучевых координат к реальным.

В 1946 г. Г. Д. Малюжинцем было предложено использовать параболическое уравнение для решения задачи о численном нахождении поля в плоском волноводе [8], была предложена процедура сведения задачи об определении поля в плоском волноводе к системе параболических приближений (см. [9]), первое из которых выглядит так

$$2ik\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+k^2(n^2(y)-1)u=0. \tag{1}$$

После выхода книги В. А. Фока [4] на английском языке диффузионное приближение Г. Д. Малюжинца стали использовать американские ученые (см. [10]) применительно к изучению звукового поля в плоском волноводе. В [10, 11] к исходному уравнению Гельмгольца в декартовых координатах

$$\Delta p+k^2n^2(y)p=0 \tag{2}$$

был применен метод факторизации [12, 13].

Отметим, что сам метод факторизации носит точный характер только для $n^2(x, y)\equiv n^2(y)$. Применяя метод факторизации к уравнению (2), получим $i(\partial u^+/\partial x)+kGu^+=0$, $i(\partial u^-/\partial x)-kGu^-=0$, $p=u^++u^-$, $G=[(1/k^2)\times\times(\partial^2/\partial y^2)+n^2(y)]^{1/2}$. Если поставить для уравнения (2) условия убывания поля на бесконечности (или воспользоваться условиями излучения А. Г. Свешникова), то получим $i(\partial u/\partial x)+kGu=0$, $G=[1+\varepsilon+\mu]^{1/2}$, $\varepsilon=n^2(y)-1$, $\mu=(1/k^2)\cdot(\partial^2/\partial y^2)$.

Формально разлагая выражение для оператора G в ряд Тейлора, получим $G=1+{}^1/_2(\varepsilon+\mu)-{}^1/_8(\varepsilon+\mu)^2\ldots$ или, ограничиваясь 1-м членом приближения и представляя $u=\Psi e^{ikx}$, находим $2ik(\partial\Psi/\partial x)+(\partial^2\Psi/\partial y^2)+k^2(n^2(y)-1)\Psi=0$, т. е. получаем диффузионное приближение Г. Д. Малюжинца (1). Далее предполагая малыми параметрами ε и μ (по отдельности или вместе), получаем различные модификации уравнения Г. Д. Малюжинца (1).

Таким образом, до начала 70-х годов тенденция в применении метода параболического уравнения была следующей: для той или иной волновой задачи решалось параболическое уравнение, которое часто за счет искусства исследователя различным образом видоизменялось, вводились различные параметры малости с тем, чтобы обеспечить если не количественное совпадение решения с исходной волновой задачей, то хотя бы качественное (например, совпадение зон конвергенции и т. д.). Отметим, что это направление развивается и в настоящее время [10].

Однако в начале 70-х годов возникла другая тенденция в развитии метода параболического уравнения применительно к нахождению звукового поля в плоском волноводе.

Сущность другого подхода состоит в следующем вопросе: нельзя ли, используя диффузионное приближение Г. Д. Малюжинца (1), так скорректировать его решение, чтобы точно (или с заданной погрешностью) получить решение исходной задачи (2)? Иными словами, нельзя ли построить такой функционал от решения диффузионного приближения Г. Д. Малюжинца или его модификаций, чтобы этот функционал представлял точное решение исходной задачи (2).

Положительное решение этого вопроса было дано в работах [14—16]. Затем эта идея была использована американскими учеными [17, 18] и развита дальше в работах [19, 20].

В настоящей работе дается строгое обоснование метода коррекции решения диффузионного приближения Г. Д. Малюжинца для плоского вол-

новода с параметрами, меняющимися по трассе распространения, и рассматриваются некоторые его приложения. Пусть плоский неоднородный волновод (полуполоса $\Pi: x\geqslant 0,\ 0\leqslant y\leqslant kl$) заполнен жидкой средой с постоянной плотностью и скоростью звука, зависящей от глубины и трассы распространения. Волновой процесс считаем гармоническим: $\exp(-i\omega t)$. Звуковое давление в волноводе удовлетворяет тогда уравнению Гельмгольца

$$\Delta p+n^2(x, y)p=0. \tag{3}$$

На границах волновода поставим импедансные условия

$$p_y+ig_0(x)p=0,\quad y=0,\quad x>0;\qquad p_y-ig_1(x)p=0,\quad y=kl,\quad x>0. \tag{4}$$

Пусть по поперечному сечению (в торце волновода) задано распределение звукового давления

$$p(0, y)=f(y),\qquad 0\leqslant y\leqslant kl. \tag{5}$$

На бесконечности поставим условия

$$\lim_{x\to+\infty} p=0,\qquad \lim_{x\to+\infty} p_x=0. \tag{6}$$

Предполагаем, что $n^2(x, y)=n_1^2(x, y)+in_2^2(x, y)$, $n_1^2(x, y)>0$, $n_2^2(x, y)>0$. Функция $n^2(x, y)$ достаточно гладкая по x и y. Предполагаем также, что $n_1^2(x, y)$, $n_2^2(x, y)$, $g_0(x)$, $g_1(x)$ и их производные до нужного нам порядка равномерно ограничены по трассе волновода. Пусть

$$b\leqslant n_1^2(x, y)\leqslant a,\qquad e\leqslant n_2^2(x, y)\leqslant d,\quad \alpha\leqslant g_0(x)\leqslant\beta,\quad \delta\leqslant g_1(x)\leqslant\mu, \tag{7}$$

где все константы положительны. В (5) задана $f(y)$ — достаточно гладкая функция, $k>0$, k — фиксировано. Покажем, что решение задачи (3)—(6) единственно. Пусть существуют два решения p и p_1, их разность $\omega=p-p_1$ удовлетворяет условиям (4), (6) и $\omega(0, y)=0$. Скалярно умножая (3) на ω^*, отделяя мнимую часть, учитывая краевые условия (4), интегрируя полученное равенство по x_1 между $x_1=0$ и $x_1=x$, устремляя затем $x\to+\infty$ и учитывая (6), (7), имеем

$$\delta\cdot\lim_{x\to+\infty}\int_0^x|\omega(x_1, kl)|^2\,dx_1+\alpha\lim_{x\to+\infty}\int_0^x|\omega(x_1, 0)|^2\,dx_1+$$

$$+e\lim_{x\to+\infty}\int_0^x\int_0^{kl}|\omega|^2\,dy\,dx_1\leqslant 0.$$

Из последнего неравенства следует, что решение единственно. Рассмотрим функцию

$$\Psi(x, y_j)=\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{x}{2}\int_0^\infty u(t, y_j)\,t^{-3/2}e^{i\frac{x^2}{4t}}\,dt+\varphi_j(x);\quad j=1,\ldots,N-1 \tag{8}$$

$$y_j=jh;\quad Nh=kl;\quad u(t, y)\text{ —}$$

решение диффузионного приближения Г. Д. Малюжинца:

$$iu_t+u_{yy}+n^2(t, y)u=0,\qquad 0<y<kl,\qquad t>0 \tag{9}$$

с условиями

$$u(0, y)=f(y);\qquad u_y+ig_0(t)u=0,\qquad y=0;\qquad u_y-ig_1(t)u=0,\quad y=kl. \tag{10}$$

В (8) $\varphi_j(x)$ — решение задачи:

$$\varphi_{jxx}+n^2(x, y_j)\varphi_j=-\varphi_{j\bar{y}y}-0{,}5x\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}\cdot\pi^{-1/2}\times \tag{11}$$

$$\times \int_0^\infty u(t, y_j)\, t^{-3/2} \cdot e^{i\frac{x^2}{4t}} [n^2(x, y_j) - n^2(t, y_j)]\, dt,$$

(12) $$\varphi_j(0)=0, \quad \lim_{x\to+\infty} \varphi_j(x)=0, \quad \lim_{x\to+\infty} \varphi_{jx}(x)=0.$$

Будем предполагать, что функция φ в окрестности поверхности и дна волновода удовлетворяет условиям

(13) $$\varphi_{0y} + ig_0(x)\,\varphi_0 = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{x}{2} \int_0^\infty \frac{i\,(g_0(t) - g_0(x))}{t^{3/2}} \times$$

$$\times e^{i\frac{x^2}{4t}} u(t, y)\, dt, \quad y=0,$$

(14) $$\varphi_{\bar{y}N} - ig_1(x)\,\varphi_N = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{x}{2} \int_0^\infty \frac{i\,(g_1(x) - g_1(t))}{t^{3/2}}\, e^{i\frac{x^2}{4t}} \times$$

$$\times u(t, y)\, dt, \quad y=kl.$$

Введем обозначения: $\varphi_{j\bar{y}y}=(\varphi_{j-1}-2\varphi_j+\varphi_{j+1})h^{-2}$, $j=1,\ldots, N-1$; $\varphi_{0y}=(\varphi_1-\varphi_0)h^{-1}$; $\varphi_{\bar{y}N}=(\varphi_N-\varphi_{N-1})h^{-1}$. Покажем, что при предположениях: а) существования ограниченного и достаточно гладкого решения задачи (9), (10), существования и единственности дважды непрерывно дифференцируемого по x решения задачи (11)–(14), а также абсолютной интегрируемости функций $u\cdot t^\alpha$, $u_t\cdot t^\alpha$, $-0{,}5\leqslant\alpha\leqslant 0{,}5$ в промежутке $t\in[0, \infty]$; б) существования ограниченного и достаточно гладкого решения задачи (3)–(6) и равномерной ограниченности интегралов

$$\max_{0\leqslant y\leqslant kl} \int_0^\infty |p_y^{(i)}|^2\, dx \leqslant C_{1i}; \qquad \max_{0\leqslant y\leqslant kl} \int_0^\infty |\gamma_y^{(i)}|^2\, dx \leqslant C_{2i};$$

$$\gamma(x, y) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\pi^{1/2}} \frac{x}{2} \int_0^\infty u(t, y)\, e^{i\frac{x^2}{4t}}\, t^{-3/2}\, dt; \quad i=0,1,\ldots 4,$$

где C_{1i}, C_{2i} — константы, справедливо утверждение

(15) $$\lim_{h\to 0} |p(x, y_j) - \Psi(x, y_j)| = 0, \qquad (x, y_j)\in\Pi.$$

Для доказательства рассмотрим $\Phi(x, y) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \Phi_\varepsilon(x, y)$, где

(16) $$\Phi_\varepsilon(x, y) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\pi^{1/2}} \frac{x}{2} \int_0^\infty u(t, y)\, e^{-\varepsilon t} e^{i\frac{x^2}{4t}}\, t^{-3/2}\, dt,$$

или $$\Phi_\varepsilon(x, y) = -\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\pi^{1/2}} \frac{2}{ix} \int_0^\infty u(t, y)\, e^{-\varepsilon t}\, t^{1/2}\, de^{i\frac{x^2}{4t}}.$$

Интегрируя по частям, а затем дифференцируя полученное выражение по x и учитывая (16), получаем

$$\Phi_{\varepsilon x} = e^{-i\frac{\pi}{4}} \pi^{-1/2} \int_0^\infty u_t(t, y)\, t^{-1/2} e^{-\varepsilon t} e^{i\frac{x^2}{4t}}\, dt - \varepsilon\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} \times$$

$$\times \pi^{-1/2} \int_0^\infty u(t, y)\, e^{-\varepsilon t} e^{i\frac{x^2}{4t}}\, t^{-1/2}\, dt.$$

Дифференцируя это выражение еще раз по x и устремляя $\varepsilon \to 0$, получаем соответственно

$$\Phi_x = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u_t(t, y)\, t^{-1/2} e^{i\frac{x^2}{4t}}\, dt, \tag{17}$$

$$\Phi_{xx} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \frac{ix}{2} \int_0^\infty u_t(t, y)\, t^{-3/2} e^{i\frac{x^2}{4t}}\, dt. \tag{18}$$

Рассмотрим $\Psi_j(x, y) = \Phi(x, y) + \varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots N-1$. Легко видеть, что $\Psi_j(x, y_j) = \Psi(x, y_j)$. Проверим выполнение краевого условия (5) при $y = y_j$. Делая в (8) замену $t = t_1 x^2$ и полагая затем $x = 0$, имеем $\Psi(0, y_j) =$

$= \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \frac{f(y_j)}{2} \int_0^\infty e^{i\frac{1}{4t}} t^{-3/2}\, dt + \varphi_j(0) = f(y_j)$. Учитывая предположение (а), находим (см. [21]) $\left| 0{,}5x \int_0^\infty u(t, y_j)\, t^{-3/2} e^{i\frac{x^2}{4t}}\, dt \right| \to 0$, $x \to +\infty$;

$\left| \int_0^\infty u_t(t, y_j)\, t^{-1/2} e^{i\frac{x^2}{4t}} \right| \to 0$, $x \to +\infty$.

Используя также (8), (12), (17), получаем $|\Psi(x, y_j)| \to 0$, $x \to +\infty$; $|\Psi_x(x, y_j)| \to 0$, $x \to +\infty$. Итак, находим

$$\Psi(0, y_j) = f(y_j); \quad |\Psi(x, y_j)| \to 0, \quad x \to +\infty; \tag{19}$$
$$|\Psi_x(x, y_j)| \to 0, \quad x \to +\infty.$$

Покажем теперь, что $\lim\limits_{h \to 0} |\Psi(x, y_j) - p(x, y_j)| = 0$, $(x, y_j) \in \Pi$. Пусть $\omega_j(x, y) = \omega_1(x, y) + \varphi_j(x)$, где

$$\omega_1(x, y) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \frac{x}{2} \int_0^\infty u(t, y)\, t^{-3/2} e^{i\frac{x^2}{4t}}\, dt - p(x, y). \tag{20}$$

Рассматривая $\omega_{\bar{y}y} = [\omega_{j-1}(x, y_{j-1}) - 2\omega_j(x, y_j) + \omega_{j+1}(x, y_{j+1})]\, h^{-2}$, имеем

$$\omega_{\bar{y}y} = \varphi_{\bar{y}y} + (\omega_{1yy})_y = y_i + M_j, \tag{21}$$

$$M_j = \left[\int_{jh}^{(j+1)h} \frac{[(j+1)h - y]^3}{3!} \omega_{1y}^{(\mathrm{IV})}\, dy - \right. \tag{22}$$
$$\left. - \int_{(j-1)h}^{jh} \frac{[(j-1)h - y]^3}{3!} \omega_{1y}^{(\mathrm{IV})}\, dy \right] h^{-2}.$$

Учитывая уравнение (3) для p (9)–(11), (18), (20)–(22), находим

$$\omega_{jxx} + \omega_{\bar{y}y} + n^2(x, y_j)\, \omega_j = M_j, \quad y = y_j, \quad 0 < x < +\infty. \tag{23}$$

Скалярно умножая (23) на ω_j^*, отделяя мнимую часть и используя вторую разностную формулу Грина (см. [22]), получаем

$$\sum_{j=1}^{N-1} (\omega_{jxx}\omega_j^* - \omega_{jxx}^*\omega_j)\, h - \sum_{j=1}^{N-1} (M_j\omega_j^* - M_j^*\omega_j)\, h + (\omega^*\omega_{\bar{y}} - \omega\omega_{\bar{y}}^*)_N - \tag{24}$$
$$- (\omega^*\omega_y - \omega_y^*\omega)_0 + 2i \sum_{j=1}^{N-1} n_2^2(x, y_j)\, |\omega_j|^2 h = 0,$$

(25) $$\omega_{\bar{y}N}=(\omega_N-\omega_{N-1})h^{-1}=\omega_{1y}|_{y=kl}+M_0+\varphi_{\bar{y}N},$$

(26) $$\omega_{y0}=(\omega_1-\omega_0)h^{-1}=\omega_{1y}|_{y=0}+M_1+\varphi_{0y},$$

(27) $$M_0=\int\limits_{(N-1)h}^{Nh}\omega_{1yy}[(N-1)h-y]dy\,h^{-1},$$

(28) $$M_1=\int\limits_0^h\omega_{1yy}(h-y)dy\,h^{-1}.$$

Учитывая (10), (13), (14), (20), (25), (26) и краевые условия (4), находим из (24)

$$\sum_{j=1}^{N-1}2n_2^2(x,y_j)|\omega_j|^2h+2g_0(x)|\omega_0|^2+2g_1(x)|\omega_N|^2=$$

$$=i\sum_{j=1}^{N-1}(\omega_{jxx}\omega_j^{\bullet}-\dot{\omega}_{jxx}\omega_j)h+i(M_0\omega_N^{\bullet}-M_0^{\bullet}\omega_N)-$$

$$-i(M_1\omega_0^{\bullet}-M_1^{\bullet}\omega_0)-i\sum_{j=1}^{N-1}(M_j\omega_j^{\bullet}-M_j^{\bullet}\omega_j)h.$$

Применяя к правой части последнего равенства неравенство $2ab<$ $<(C_0)^{-1}a^2+C_0b^2$, $C_0>0$ и используя условие (7), имеем

(29) $$(2e-h^2)\sum_{j=1}^{N-1}|\omega_j|^2h\leqslant 0{,}5|M_0|^2\frac{1}{\delta}+0{,}5|M_1|^2\frac{1}{\alpha}+$$

$$+i\sum_{j=1}^{N-1}(\omega_{jxx}\omega_j^{\bullet}-\dot{\omega}_{jxx}\omega_j)h+h^{-2}\sum_{j=1}^{N-1}|M_j|^2h.$$

Применяя к интегралам в правой части равенства (22) неравенство Коши – Буняковского, имеем $|M_j|^2\leqslant C_1h^4\max\limits_{0\leqslant y\leqslant kl}|\omega_{1y}^{(IV)}|^2$ и аналогично $|M_0|^2\leqslant C_2h^2\max\limits_{0\leqslant y\leqslant kl}|\omega_{1yy}|^2$, $|M_1|^2\leqslant C_3h^2\max\limits_{0\leqslant y\leqslant kl}|\omega_{1yy}|^2$, где константы C_1, C_2, C_3 легко вычисляются и не зависят от параметров задачи и шага h. Учитывая последние неравенства и (29), получим

$$(2e-h^2)\sum_{j=1}^{N-1}|\omega_j|^2h\leqslant(0{,}5C_2\delta^{-1}\max_{0\leqslant y\leqslant kl}|\omega_{1yy}|^2+$$

$$+0{,}5C_3\alpha^{-1},\ \max_{0\leqslant y\leqslant kl}|\omega_{1yy}|^2+klC_1\max_{0\leqslant y\leqslant kl}|\omega_{1y}^{(IV)}|^2)h^2+$$

$$+i\sum_{j=1}^{N-1}(\omega_{jxx}\omega_j^{\bullet}-\dot{\omega}_{jxx}\omega_j)h.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по x_1 между $x_1=0$ и $x_1=x$:

$$(2e-h^2)\int\limits_0^x\sum_{j=1}^{N-1}(\omega_j)^2h\,dx_1\leqslant i\sum_{j=1}^{N-1}(\omega_{jx}\omega_j^{\bullet}-\omega_{jx}^{\bullet}\omega_j)h|_0^x+$$

$$+\left[\frac{0{,}5C_2}{\delta}\max_{0\leqslant y\leqslant kl}\int_0^x|\omega_{1yy}|^2\,dx_1+\frac{0{,}5C_3}{\alpha}\max_{0\leqslant y\leqslant kl}\int_0^x|\omega_{1yy}|^2\,dx_1+\right.$$

$$\left.+klC_1\max_{0\leqslant y\leqslant kl}\int_0^x|\omega_{1y}^{(4)}|^2\,dx_1\right]h^2,$$

$$(h<(2e)^{1/2}).$$

Устремляя $x\to+\infty$, используя предположение (б), а также учитывая (5), (6), (19), (20), имеем

$$(2e-h^2)\int_0^\infty\sum_{j=1}^{N-1}|\omega_j|^2h\,dx_1\leqslant Ch^2. \tag{30}$$

В (30) C не зависит от h. Устремляя в (30) $h\to0$, получаем $\lim\limits_{h\to0}|p(x,y_j)-\Psi(x,y_j)|=0$. Оценка (30) показывает, какова скорость сходимости выбранного нами приближения к звуковому полю в волноводе. Таким образом, процедура осуществления метода коррекции диффузионного приближения Г. Д. Малюжинца выглядит весьма прозрачно: нахождение звукового поля в волноводе сводится к квадратуре от решения уравнения типа Шредингера плюс невязка, которая является решением системы дифференциально-разностных уравнений. Отметим, что из (8) следует полученное ранее [14—16] интегральное представление, связывающее решения уравнений Гельмгольца и диффузионного приближения Г. Д. Малюжинца для среды с параметрами, не меняющимися по трассе распространения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Леонтович М. А.* Об одном методе решения задач о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности Земли.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1947, т. 8, № 1, с. 16—22.
2. *Франк Ф., Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.— Л.: ОНТИ, 1936.
3. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972.
4. *Fock V. A.* Electromagnetic Diffraction and Propagations Problems. Pergamon Press, 1965.
5. *Малюжинец Г. Д.* Развитие представлений о явлениях дифракции.— Успехи физ. наук, 1959, т. 69, № 2, с. 321—384.
6. *Малюжинец Г. Д.* Дифракция волн.— В кн.: Физический энциклопедический словарь. М.: Советская энциклопедия, 1960.
7. *Малюжинец Г. Д., Попов А. В., Черкашин Ю. Н.* К развитию одного вычислительного метода теории дифракции.— III Всес. симпозиум по дифракции волн. М.: Изд-во АН СССР, 1965.
8. *Малюжинец Г. Д., Введенская Н. Д., Шноль Э. Э.* Расчет распространения волн в параболическом приближении. Симпозиум по дифракции волн (аннотации докладов). М.: Изд-во АН СССР, 1960.
9. *Полянский Э. А.* Применение метода параболических уравнений для расчета волновых полей в слоисто-неоднородных средах.— Ч. I.— Тр. Акуст. ин-та, 1969, вып. V, с. 290—295; ч. II, 1969, вып. 9, с. 90—100.
10. *Tappert F. D.* The parabolic approximation method.— In: Lecture Notes in physics. Berlin — Heidelberg — New York. Springer — Verlag, 1977.
11. *Hardin R. H., Tappert F. D.* Analysis, simulation and models of ionospheric scintilation.— Joint Radar Propagation Study. Bell Lab. Report., 1974, p. 76.
12. *Марчук Г. И.* Численные методы расчета ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1958.
13. *Bremmer H.* General remarks concerning theories dealing with scattering and diffraction in random media.— Radio Science, 1973, v. 8, p. 511—534.
14. *Полянский Э. А.* О связи между решениями уравнений Гельмгольца и типа Шредингера.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1972, т. 12, № 1, с. 241—249.
15. *Полянский Э. А.* Об интегральном представлении решения уравнения Гельмгольца через решение уравнения типа Шредингера.— В кн.: 6-й Всес. симп. по дифракции и распространению волн. М.: Наука, 1973.
16. *Полянский Э. А.* К вопросу о связи между решениями уравнений Гельмгольца и Шредингера.— Акуст. ж., 1974, т. 20, № 1, с. 142—143.
17. *Palmer D. R.* Eikonal approximation and the parabolic equation.— JASA, 1976, v. 60, p. 343—354.

18. *De Santo J. A.* Connection between the solutions of the Helmholtz and parabolic equations for sound propagation.– Proc. SACLATCEN conf., 1975.
19. *Полянский Э. А.* Об оценках решения уравнения Гельмгольца в плоском волноводе.– Докл. АН СССР, 1979, т. 245, № 1, с. 71–74.
20. *Polyanskii E. A.* On a method of sound field computing in irregular waveguides.– XIV Pacific science Congress. Abstracts of papers., 1979, Additional volume, p. 68–71.
21. *Фихтенгольц Г. М.* Курс матем. анализа. Т. 3. М.: Наука, 1966.
22. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
18.VI.1981