

УДК 534.2

РАССЕЯНИЕ ЗВУКА ВИХРЕВЫМИ ТЕЧЕНИЯМИ

Фабрикант А. Л.

Получено выражение амплитуды рассеяния звука на двумерном вихревом течении в первом (борновском) приближении. Рассеяние длинных волн когерентно и определяется величиной циркуляции скорости вокруг вихревой области. Рассмотрено рассеяние на аксиально-симметричных течениях и системах точечных вихрей.

До настоящего времени в гидроаэроакустике основное внимание уделялось генерации и распространению звука в турбулентной среде, скорость которой испытывает хаотические флуктуации [1] либо рефракции звука в стационарных сдвиговых потоках [2]. В то же время значительный интерес представляют задачи взаимодействия звуковых волн с вихревыми течениями, такими, как вихревые следы за телами, обтекаемыми потоком, одиночные прямолинейные и кольцевые вихри, когерентные структуры в сдвиговых потоках и др. Такого рода задачи возникают, в частности, при дистанционной акустической диагностике течения [3]. Имеющиеся на эту тему немногочисленные работы [3-6] посвящены рассеянию звука на одиночном прямолинейном вихре.

В настоящей работе развита теория рассеяния высокочастотного звука на различных вихревых течениях с малыми числами Маха и рассмотрены особенности рассеяния при различных соотношениях между характерными размерами течения и длиной волны звука. Моделирование вихревых течений системой точечных вихрей, широко применяемое в гидродинамике [7], позволяет в ряде случаев получить простые аналитические выражения для амплитуды рассеяния.

Мы ограничимся исследованием двумерного дозвукового течения, хотя обобщение результатов на трехмерное течение не вызывает принципиальных затруднений. Линеаризуем уравнения движения однородного идеального баротропного газа [7] относительно вихревого течения, скорость которого $U(\mathbf{r}, t)$ мала по сравнению со скоростью звука: $M = |U/c| \ll 1$. Для малых возмущений плотности $\tilde{\rho}$ и компонент скорости \tilde{v}_i имеем

$$\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} + \tilde{v}_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_i} + U_i \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x_i} = 0,$$

где производится суммирование по индексам, пробегающим два значения, а $\rho = \text{const}$ — невозмущенная плотность. Отсюда нетрудно получить в первом приближении по числу Маха M

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial x_i^2} = 2\rho \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (U_i \tilde{v}_j) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\tilde{\rho} \frac{\partial U_i}{\partial t} \right). \quad (2)$$

Мы будем исследовать рассеяние высокочастотного звука с частотой ω на квазистационарном течении, характерное время изменения которого $T \gg \omega^{-1}$. В этом случае мы можем рассматривать гармонические $\exp(i\omega t)$ колебания, считая скорость течения медленно меняющимся параметром, и пренебрегать последним слагаемым в (2). Производя преобразование

Фурье

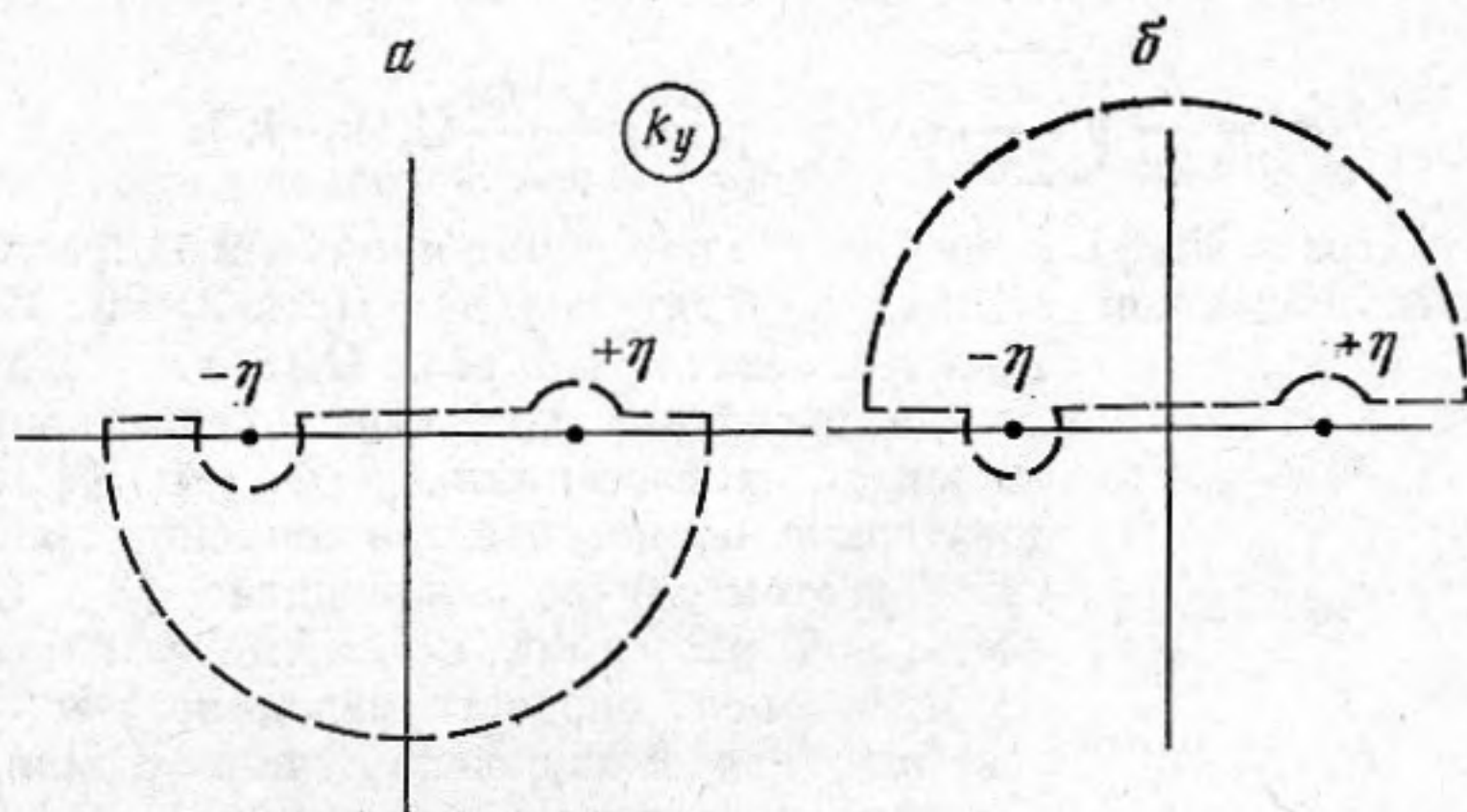
$$\tilde{\rho} = \int \rho(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2}, \quad \tilde{v}_i = \int v_i(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \quad (3)$$

мы получим из (2)

$$\rho(\mathbf{k}) = \frac{2\rho k_i k_j}{(2\pi)^2 (\omega^2 - c^2 k^2)} \int U_j(\mathbf{k} - \mathbf{k}') v_i(\mathbf{k}') d^2k'. \quad (4)$$

Будем считать, что на вихревое течение падает плоская волна:

$$\tilde{v}_i = v_{0i} \exp(i\omega t - i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}), \quad \tilde{\rho} = \rho_0 \exp(i\omega t - i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}), \quad v_{0i} = c^2 k_{0i} \rho_0 / \omega \rho. \quad (5)$$



Фиг. 1. Правило обхода полюсов $k^2 = \omega^2 / c^2$: а — при $y > 0$; б — при $y < 0$

Найдем поле рассеянных на течении волн в первом (борновском) приближении теории возмущений. Подставляя (5) в правую часть (4), получим

$$\frac{\rho_1(\mathbf{k})}{\rho_0} = \frac{2k_i k_{0i}}{\omega (\omega^2 / c^2 - k^2)} k_j U_j(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0). \quad (6)$$

С точностью до величин $\sim M^2$ вихревое течение является несжимаемым:

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{U} = \boldsymbol{\Omega} \quad (7)$$

и амплитуда скорости однозначно определяется амплитудой завихренности $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k})$:

$$\mathbf{U}(\mathbf{k}) = i[\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k}) \times \mathbf{k}] / k^2. \quad (8)$$

Таким образом, получаем из (6) звуковое поле, рассеянное на заданном вихревом течении:

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \int \frac{2i(\mathbf{k}_0 \mathbf{k}) ([\mathbf{k}_0 \mathbf{k}] \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0))}{\omega (k^2 - \omega^2 / c^2) (k - k_0)^2} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2}. \quad (9)$$

Вычислим теперь амплитуду рассеяния плоской волны на вихревом течении, сосредоточенном в области, характерный размер которой L . Поле рассеянной волны определяется полюсами $k_x^2 + k_y^2 = \omega^2 / c^2$ подынтегрального выражения в (9), правило обхода которых следует из принципа причинности. В частности, для $y > 0$ контур интегрирования в комплексной плоскости k_y указан на фиг. 1, а, а для $y < 0$ — на фиг. 1, б. Заметим, что полюс $(k - k_0)^2 = 0$ определяет псевдозвуковое поле возмущений давления, возникающих при деформации вихревого течения в поле звуковой волны. Соответствующее ему решение $\rho_1(\mathbf{r})$ быстро спадает ($\propto |\mathbf{r}|^{-n}$, $n \geq 2$) при удалении от области, занятой течением, и мы будем пренебрегать им при $|\mathbf{r}| \gg L$.

Если плоская волна падает под углом φ_0 к оси x , то $\mathbf{k}_0 = \omega/c (\cos \varphi_0, \sin \varphi_0)$ и рассеянное звуковое поле имеет вид

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \int \frac{dk_x}{2\pi} e^{i-k_x x - i\eta y} \Omega_z \left(k_x - \frac{\omega}{c} \cos \varphi_0, \right. \quad (10)$$

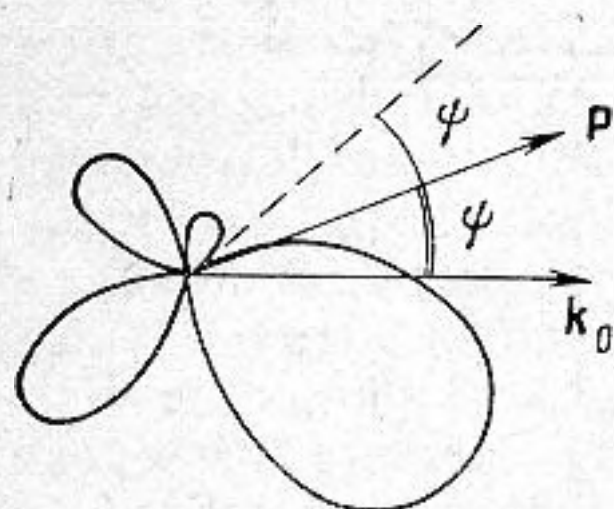
$$\left. \eta - \frac{\omega}{c} \sin \varphi_0 \right) \frac{(\eta \cos \varphi_0 - k_x \sin \varphi_0) q}{2\eta c (\omega/c - q)} \text{sign } y, \quad \text{где } q = k_x \cos \varphi_0 + \eta \sin \varphi_0, \quad \eta =$$

$= (\omega^2/c^2 - k_x^2)^{1/2}$, $\text{Re } \eta \cdot \text{sign } y > 0$. Асимптотику рассеянного поля в дальней зоне при $\omega |\mathbf{r}|/c \gg 1$, $|\mathbf{r}|/L \gg 1$ нетрудно найти с помощью метода стационарной фазы [8]. В полярной системе координат ($x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$) имеем

$$\rho_1/\rho_0 = f(\varphi) r^{-1/2} \exp(i\omega r/c), \quad (11)$$

$$f(\varphi) = \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{i\omega}{2\pi c}} \cos(\varphi - \varphi_0) \text{ctg} \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \Omega_z(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_0),$$

где $\mathbf{k}_1 = (\omega/c) (\cos \varphi, \sin \varphi)$. Заметим, что рассеяние назад и в направлениях, ортогональных падающей волне, отсутствует: $f(\pi) = f(\pm\pi/2) = 0$. Следует также отметить, что, если $\Omega_z(\mathbf{k}=0) \neq 0$, то амплитуда рассеяния $f(\varphi)$ имеет особенность при малых углах рассеяния $(\varphi - \varphi_0) \rightarrow 0$ [6], и, следовательно, борновское приближение при малых углах в этом случае некорректно [3]. Особенность при рассеянии на малые углы связана с тем, что поле скорости медленно ($\propto r^{-2}$) убывает при $r \rightarrow \infty$ и звуковые лучи с большим прицельным рассеянием испытывают рефракцию в этом поле.



Фиг. 2. Диаграмма направленности $|f(\varphi)|$ звука, рассеянного на течении без циркуляции. Плоская волна падает под углом 20° к вектору P дипольного момента завихренности

Если размер течения мал по сравнению с длиной волны звука ($\omega L/c \ll 1$), то завихренность можно разложить по мультиполям:

$$\Omega_z(\mathbf{k}) = \Omega_z(\mathbf{k}=0) + \mathbf{k}(\partial\Omega_z/\partial\mathbf{k})_{\mathbf{k}=0} + \dots \quad (12)$$

и ограничиться в (11) первыми не исчезающими членами этого ряда. В частности, если полная завихренность течения $\Omega_z(\mathbf{k}=0) = \int \Omega(\mathbf{r}) d^2r = 2\pi\kappa \neq 0$, то в первом приближении по параметру $\omega L/c$ имеем

$$f(\varphi) = \frac{\pi\kappa}{c} \sqrt{\frac{i\omega}{2\pi c}} \cos(\varphi - \varphi_0) \text{ctg} \frac{\varphi - \varphi_0}{2}, \quad (13)$$

где κ — циркуляция скорости по контуру вокруг вихревой области. Это выражение было получено в работах [4, 5] для амплитуды рассеяния на точечном вихре. Таким образом, рассеяние низкочастотного звука определяется колебаниями вихря как целого и не зависит от его внутренней структуры.

Для течений без циркуляции $\Omega_z(\mathbf{k}=0) = 0$ и необходимо учитывать следующий член в разложении (12). В этом случае амплитуда рассеяния имеет вид

$$f(\varphi) = \frac{\omega}{2c^2} \sqrt{\frac{i\omega}{2\pi c}} \cos(\varphi - \varphi_0) [P_y(\cos \varphi + \cos \varphi_0) - P_x(\sin \varphi + \sin \varphi_0)], \quad (14)$$

где $\mathbf{P} = (\partial\Omega_z/\partial\mathbf{k})_{\mathbf{k}=0} = \int \mathbf{r} \Omega_z(\mathbf{r}) d^2r$, и ограничена при любых углах (см. фиг. 2). Аналогично нетрудно вычислить и следующие члены разложения амплитуды рассеяния по малому параметру $\omega L/c$.

До сих пор мы считали завихренность $\Omega_z(\mathbf{r})$ произвольной функцией двумерного радиус-вектора \mathbf{r} , достаточно быстро убывающей при $r = |\mathbf{r}| \rightarrow \infty$, чтобы фурье-образ $\Omega_z(\mathbf{k})$ был конечным. Рассмотрим теперь аксиально-симметричный вихрь $\Omega_z(r)$. В этом случае фурье-образ завихренности яв-

ляется функцией только от $k=|k|$. Для вычисления $\Omega_z(k)$ выберем полярную систему координат, направив полярную ось вдоль k . Тогда имеем

$$\Omega_z(k) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \Omega_z(r) e^{ikr \cos \psi} r d\psi dr = 2\pi \int_0^\infty r J_0(kr) \Omega_z(r) dr. \quad (15)$$

Этот интеграл сходится, если $\Omega(r)$ убывает при $r \rightarrow \infty$ как r^{-s} , где $s > 3/2$.

Для вихря Озеена [7] с профилем азимутальной скорости $V(r) = \Omega_0 R^2 [1 - \exp(-r^2/R^2)]/r$ и завихренностью $\Omega_z(r) = 2\Omega_0 \exp(-r^2/R^2)$ имеем: $\Omega_z(k) = 2\pi\Omega_0 R^2 \exp(-k^2 R^2)$ и амплитуда рассеяния (11) имеет вид (см. также [3])

$$f(\varphi) = \frac{\pi\Omega_0 R^2}{c} \sqrt{\frac{i\omega}{2\pi c}} \cos(\varphi - \varphi_0) \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \exp \left[-\frac{2\omega^2 R^2}{c^2} \sin^2(\varphi - \varphi_0) \right]. \quad (16)$$

Дальнейшее исследование мы проведем, аппроксимируя течение системой точечных вихрей:

$$\Omega_z(\mathbf{r}) = \sum_n 2\pi\kappa_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n), \quad (17)$$

где κ_n — циркуляция n -го вихря. Тогда амплитуда рассеяния

$$f(\varphi) = \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{i\omega}{2\pi c}} \cos(\varphi - \varphi_0) \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \sum_n \kappa_n \exp(i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_0) \mathbf{r}_n). \quad (18)$$

Сечение рассеяния, усредненное за время $\tau \gg T$, имеет вид

$$d\sigma = \langle |f(\varphi)|^2 \rangle d\varphi = \frac{\pi\omega}{2c^3} \cos^2(\varphi - \varphi_0) \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right) \left\langle \left| \sum_n \kappa_n \exp(i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_0) \mathbf{r}_n) \right|^2 \right\rangle, \quad (19)$$

где угловые скобки означают усреднение по времени.

При $\kappa = \sum \kappa_n \neq 0$ рассеяние длинных волн ($\omega L/c \ll 1$) характеризуется амплитудой (13) и сечением рассеяния:

$$d\sigma = \frac{\pi\omega}{2c^3} \left| \sum_n \kappa_n \right|^2 \cos^2(\varphi - \varphi_0) \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right). \quad (20)$$

Для коротких волн ($\omega L/c \ll 1$) экспоненты в (19) являются быстро осциллирующими функциями времени и после усреднения получаем

$$d\sigma = \frac{\pi\omega}{2c^3} \left(\sum_n \kappa_n^2 \right) \cos^2(\varphi - \varphi_0) \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right). \quad (21)$$

Заметим, что это выражение неприменимо при малых углах рассеяния $|\varphi - \varphi_0| \ll c/\omega L$, где $|(k_1 - k_0)(r_i - r_j)| \ll 1$.

Найдем теперь величину когерентного рассеяния, т. е. рассеяния на частоте падающей волны [9]. Сечение когерентного рассеяния имеет вид

$$d\sigma_{\text{кор}} = |\langle f(\varphi) \rangle|^2. \quad (22)$$

При $\omega L/c \ll 1$, $\sum \kappa_n \neq 0$, заменяя $\exp(i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_0) \mathbf{r}_n)$ в (18) на единицу, получаем выражение (13). Сравнивая с (20), находим, что $d\sigma_{\text{кор}} = d\sigma$, т. е. рассеяние длинных волн в этом случае является полностью когерентным.

Если же $\omega L/c \gg 1$, то в выражении (18) все члены суммы являются быстроосциллирующими функциями и при усреднении исчезают. Таким образом, рассеяние коротких волн целиком некогерентно.

Наконец, вычислим амплитуду рассеяния звука на некоторых простых системах точечных вихрей. В частности, для «двойного» вихря (фиг. 3, а) —

пары вихрей с одинаковой циркуляцией κ , вращающихся относительно друг друга с частотой $\omega_0 = 2\kappa/d^2$ (d — расстояние между вихрями) — имеем

$$\mathbf{r}_n = \left\{ \frac{d}{2} \cos(\omega_0 t + n\pi), \frac{d}{2} \sin(\omega_0 t + n\pi) \right\}; \quad n=0, 1;$$

$$f(\varphi) = \frac{2\pi\kappa}{c} \sqrt{\frac{i\omega}{2\pi c}} \cos(\varphi - \varphi_0) \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \cos \times$$

$$\times \left\{ \frac{\omega d}{2c} [(\cos \varphi - \cos \varphi_0) \cos \omega_0 t + (\sin \varphi - \sin \varphi_0) \sin \omega_0 t] \right\}. \quad (23)$$

Отсюда видно, что звуковое поле, рассеянное на таком осциллирующем течении, содержит комбинационные гармоники с частотами $\omega \pm m\omega_0$ ($m = 0, 1, 2, \dots$).

Для пары вихрей с противоположными циркуляциями (фиг. 3, б), движущейся со скоростью $V_0 = \kappa/d$, имеем

$$\mathbf{r}_n = \{V_0 t, (-1)^n d/2\}; \quad n=0, 1; \quad (24)$$

$$f(\varphi) = \frac{2\pi i \kappa}{c} \sqrt{\frac{i\omega}{2\pi c}} \cos(\varphi - \varphi_0) \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \sin \left[\frac{\omega d}{2c} (\sin \varphi - \sin \varphi_0) \right] \times$$

$$\times \exp \left[i \frac{\omega V_0}{c} (\cos \varphi - \cos \varphi_0) \right].$$

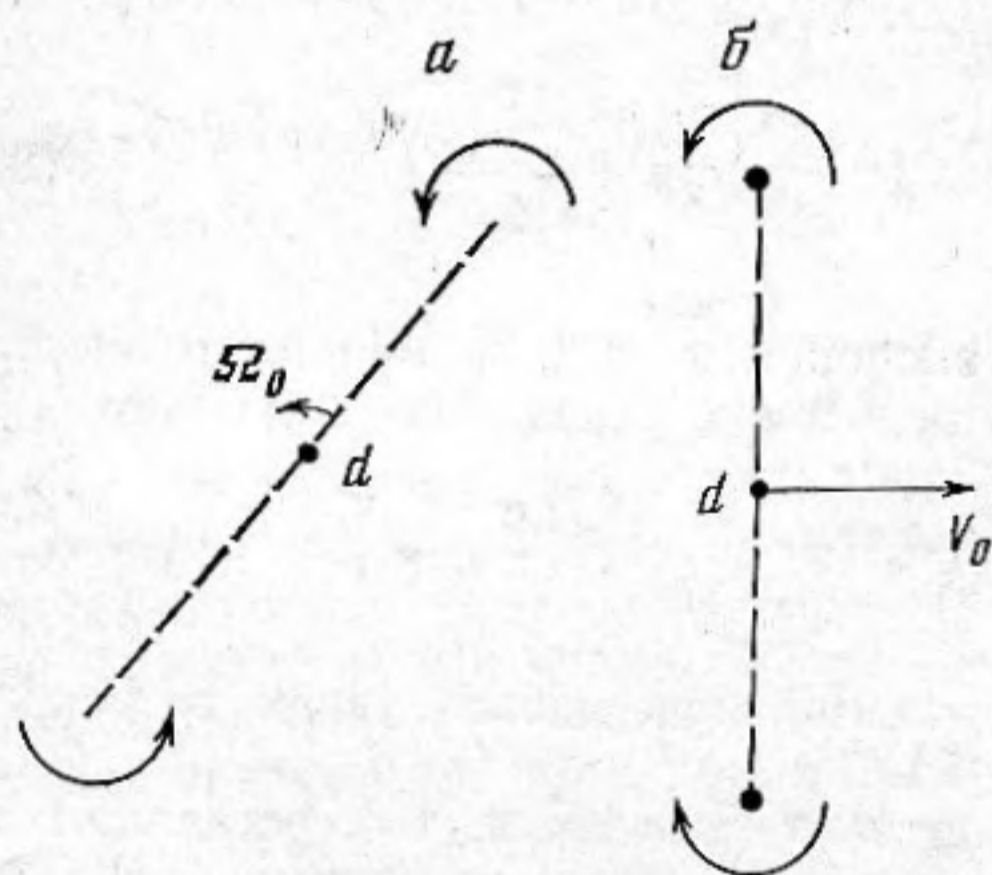
Частота волны, рассеянной под углом φ , отличается от частоты падающей волны на величину доплеровского сдвига: $\Delta\omega = \omega V_0/c (\cos \varphi - \cos \varphi_0)$.

Использование борновского приближения теории возмущений позволяет найти амплитуду звука, рассеянного на произвольном вихревом течении. Амплитуда рассеяния оказывается пропорциональной фурье-компоненте завихренности. Заметим, что аналогичная зависимость амплитуды рассеяния от фурье-образа рассеивающего потенциала характерна и для волн другой физической природы: электромагнитных [9], квантовомеханических [10] и др. Эта зависимость сильно упрощает исследование рассеяния звука на системах точечных вихрей, аналогичного рассеянию электромагнитных волн на системах точечных зарядов [9].

Для некоторых простых вихревых течений амплитуду рассеяния удастся найти в явном виде.

Знание особенностей рассеянного сигнала, таких, как доплеровский сдвиг частоты, наличие комбинационных частот, угловая диаграмма направленности и их зависимость от частоты звука, позволяют в принципе осуществить дистанционную акустическую диагностику течения, т. е. определить такие его характеристики, как скорость движения вихрей и характерное

расстояние между ними, частоты собственных колебаний, интегральную интенсивность и т. д. (см. также [3]). Подчеркнем, что линейное рассеяние звука на заданных вихрях является наиболее удобным эффектом для этой цели, так как, в отличие от нелинейных явлений, не требует очень большой интенсивности звука и не столь чувствителен к тонким деталям течения, как, например, эффект резонансного затухания или усиления [6].



Фиг. 3. Простейшие вихревые течения: а — «двойной» осциллирующий вихрь; б — вихревая пара

ЛИТЕРАТУРА

1. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967.
2. Блохинцев Д. И. Акустика неоднородно движущейся среды. М.—Л.: ГИТТЛ, 1946.
3. Ferziger J. H. Low-frequency acoustic Scattering from a trailing vortex.— J. Acoust. Soc. Amer., 1974, v. 56, № 6, p. 1705—1707.
4. O'Shea S. Sound scattering by a potential vortex.— J. Sound Vibr., 1975, v. 43, № 1, p. 109—116.
5. Пугачевский Л. П. Вычисление фоновой части силы взаимного трения в сверхтекучем гелии.— ЖЭТФ, 1958, т. 35, № 5, с. 1271—1275.
6. Фабрикант А. Л. К вопросу о рассеянии звука вихрем.— Акуст. ж., 1981, т. 27, № 6, с. 107—111.
7. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1—2. М.: Физматгиз, 1963.
8. Консон Е. Т. Асимптотические разложения. М.: Мир, 1966.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1973.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М.: Наука, 1974.

Институт прикладной физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
3.VIII.1981