

УДК 534.26

РАССЕЯНИЕ ПЛОСКИХ ВОЛН ТОНКИМ ТЕЛОМ ВРАЩЕНИЯ

Бойко А. И.

Рассмотрен акустический случай рассеяния плоской волны на тонком теле вращения, отличающемся от среды сжимаемостью и плотностью. Найден главный член асимптотики рассеянного поля.

В настоящей статье развиваются результаты работы [1], при этом используются методы, разработанные в работах [2-4].

Пусть на жидкое тело S , граница которого задается уравнением $r = \varepsilon F(z)$ (где r, φ, z — цилиндрические координаты, функция $F(z)$ неотрицательная и достаточно гладкая при $0 \leq z \leq l$ и такая, что $F(0) = F(l) = 0$, а $\varepsilon > 0$ — малый параметр), падает плоская волна $v = A_0 \exp\{i(k_z z + k_x r \cos \varphi + k_y r \sin \varphi)\}$.

Тело заполнено изотропной средой с параметрами $\tilde{\rho}, \tilde{c}$. Параметры среды вне тела ρ и c . Здесь $\tilde{\rho}, \rho$ — плотности, а \tilde{c} и c — скорости звука.

Полное поле внутри тела обозначим через \tilde{p} , а снаружи — через $p = u + v$, где u — рассеянное поле. Функции \tilde{p} и p удовлетворяют однородному уравнению Гельмгольца:

$$(\Delta + \tilde{k}^2) \tilde{p} = 0, \quad (\Delta + k^2) p = 0. \tag{1}$$

На границе тела имеют место равенства давлений и нормальных скоростей:

$$\tilde{p}|_s = p|_s, \quad \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} \Big|_s = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \Big|_s. \tag{2}$$

Рассеянное поле $u(r, \varphi, z)$ удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда: $u = \frac{\exp\{ikR\}}{R} f(\theta, \varphi; \varepsilon) + O\left(\frac{1}{R^2}\right)$ при $R \rightarrow \infty$, где R, θ, φ — сферические координаты.

Целью работы является определение главного члена $f_0(\theta, \varphi)$ амплитуды рассеяния $f(\theta, \varphi; \varepsilon)$.

Введем оператор $L = (1/\tilde{r}) \cdot \partial/\partial \tilde{r} (\tilde{r} \cdot \partial/\partial \tilde{r}) + (1/\tilde{r}^2) \cdot \partial^2/\partial \varphi^2$, где $\tilde{r} = r/\varepsilon$, и представим v в следующей форме: $v = A_0 \exp\{ik_z z\} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n v_n$. Здесь

$$v_n = \frac{1}{n!} [i\tilde{r} (k_x \cos \varphi + k_y \sin \varphi)]^n$$

Будем искать функции $\tilde{p}(\tilde{r}, \varphi, z)$ и $u(\tilde{r}, \varphi, z)$ в виде асимптотических рядов:

$$\tilde{p} = \tilde{p}_{00} + \varepsilon (\tilde{p}_{10} + \tilde{p}_{11} \ln \varepsilon) + \dots + \varepsilon^n (\tilde{p}_{n0} + \tilde{p}_{n1} \ln \varepsilon) + \dots \tag{3}$$

$$u = \varepsilon (u_{10} + u_{11} \ln \varepsilon) + \dots + \varepsilon^n (u_{n0} + u_{n1} \ln \varepsilon) + \dots$$

Представления (3) носят название внутренних разложений. Внутреннее разложение для функции u пригодно в ближней зоне дифракции плоской волны на теле.

Подставим разложения (3) в уравнения (1) и получим следующую последовательность рекуррентных соотношений:

$$L\tilde{p}_{00} = L\tilde{p}_{10} = L\tilde{p}_{11} = 0, \quad L\tilde{p}_{20} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \tilde{k}^2\right) \tilde{p}_{00},$$

$$L\tilde{p}_{21}=0, \quad L\tilde{p}_{nj}=-\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\tilde{k}^2\right)\tilde{p}_{n-2,j}, \quad Lu_{10}=Lu_{11}=Lu_{20}=Lu_{21}=0,$$

$$Lu_{nj}=-\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)u_{n-2,j}; \quad n=3,4,\dots; \quad j=0,1.$$

Из краевых условий (2) можно получить соотношения: $\tilde{p}_{00}|_S=A_0 \exp\{ik_z z\}$;

$$(\tilde{p}_{n0}-u_{n0})|_S=A_0 \exp\{ik_z z\}v_n|_S; \quad (\tilde{p}_{n1}-u_{n1})|_S=0; \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{r}}\tilde{p}_{00}|_S=0;$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}(g\tilde{p}_{10}-u_{10})|_S=A_0 \exp\{ik_z z\}\frac{\partial v_1}{\partial \tilde{r}}|_S; \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{r}}(g\tilde{p}_{11}-u_{11})|_S=\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}(g\tilde{p}_{21}-u_{21})|_S=0;$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}(g\tilde{p}_{20}-u_{20})|_S=\left\{A_0 \exp\{ik_z z\}\left[\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}v_2-ik_z F'(z)\right]+gF'(z)\frac{\partial}{\partial z}\tilde{p}_{00}\right\}|_S;$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}(g\tilde{p}_{nj}-u_{nj})|_S=\left\{F'(z)\frac{\partial}{\partial z}(g\tilde{p}_{n-2,j}-u_{n-2,j})+(1-j)A_0 \exp\right\}$$

$$\times\{ik_z z\}\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}v_n\left.\right\}|_S, \quad \text{где } g=\rho/\tilde{\rho}, \quad n=3,4,\dots; \quad j=0,1.$$

Из этих соотношений находим, что $\tilde{p}_{00}=A_0 \exp\{ik_z z\}$. Общие выражения для функций p_{10} и u_{10} имеют вид: $\tilde{p}_{10}=a_1(z)\tilde{r} \cos \varphi+a_2(z)\tilde{r} \sin \varphi+a_3(z)$, $u_{10}=[\tilde{r}^{-1}b_1(z)+\tilde{r}b_2(z)] \cos \varphi+[\tilde{r}^{-1}b_3(z)+\tilde{r}b_4(z)] \sin \varphi+b_5(z) \ln \tilde{r}+b_6(z)$.

Из краевых условий следует: $b_j(z)=\frac{1-g}{1+g}[iA_0 k_j \exp\{ik_z z\}+b_{j+1}(z)][F(z)]^2$, $j=1,3$; $b_5(z)=0$, $a_3(z)=b_6(z)$, $k_1=k_x$, $k_3=k_y$.

Аналогичным образом могут быть найдены функции \tilde{p}_{11} и u_{11} . Известные функции $b_2(z)$, $b_4(z)$ и $b_6(z)$ будут найдены ниже в процессе сращивания с внешним разложением.

Для функций \tilde{p}_{20} и u_{20} , которые ищем в виде $\tilde{p}_{20}=c_1(z)\tilde{r}^2 \cos 2\varphi+c_2(z)\tilde{r}^2 \sin 2\varphi+c_3(z)\tilde{r}^2+c_4(z)$, $u_{20}=[\tilde{r}^{-2}d_1(z)+\tilde{r}^2d_2(z)] \cos 2\varphi+[\tilde{r}^{-2}d_3(z)+\tilde{r}^2d_4(z)] \sin 2\varphi+d_5(z) \ln \tilde{r}+d_6(z)$, можно получить, используя краевые условия, соотношения

$$c_3(z)=\frac{1}{4}A_0(k_z^2-\tilde{k}^2)\exp\{ik_z z\}, \quad d_1(z)=\frac{g-1}{g+1}\left[\frac{1}{4}A_0(k_x^2-k_y^2)\exp\right.$$

$$\times\{ik_z z\}-d_2(z)\left.\right][F(z)]^4, \quad d_3(z)=\frac{g-1}{g+1}\left[\frac{1}{2}A_0 k_x k_y \exp\{ik_z z\}-\right.$$

$$\left.-d_4(z)\right][F(z)]^4,$$

$$d_5(z)=\frac{1}{2}A_0 \exp\{ik_z z\}\left\{(k_x^2+k_y^2+gk_z^2-g\tilde{k}^2)[F(z)]^2+ik_z(1-g)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{d}{dz}[F(z)]^2\right\}.$$

Проделав подобную процедуру, можно найти функции \tilde{p}_{21} и u_{21} . Известные $d_2(z)$, $d_4(z)$ и $d_6(z)$ также находятся при сращивании внешнего и внутреннего разложений.

Будем искать внешнее разложение в форме асимптотического ряда $u=\varepsilon^2 U_2+\varepsilon^3 U_3+\dots+\varepsilon^n U_n+\dots$. Так как при $\varepsilon \rightarrow 0$ тело S стягивается к отрезку $[0, l]$, возьмем главный член внешнего разложения в виде

$$U_2(r, z)=\frac{\partial}{\partial x_0} \int_0^l \mu_1(t) G(r, t-z) dt + \frac{\partial}{\partial y_0} \int_0^l \mu_2(t) G(r, t-z) dt +$$

$$+ \int_0^l \mu_3(t) G(r, t-z) dt. \quad (4)$$

Здесь $\mu_m(t)$ — неизвестные плотности объемной скорости, $G(r, z)=-\exp\{ikR\}/4\pi R$. Функция $U_2(r, z)$ удовлетворяет уравнению (1) и условию излучения.

Интегралы, стоящие в формуле (4), допускают [1] при $r \rightarrow 0$, $0 \leq z \leq l$ представление вида

$$\Phi_m(r, z) = \ln r \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm}(z) r^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_{nm}(z) r^{2n}, \quad m=1, 2, 3,$$

где $a_{nm}(z)$ и $b_{nm}(z)$ — бесконечно дифференцируемые функции, причем

$$2\pi a_{0m}(z) = \mu_m(z), \quad 4\pi b_{0m}(z) = \int_0^{\infty} \ln(2t) d[\exp\{ikt\} \mu_m(z+t) - \mu_m(z-t)],$$

$$a_{nm}^{(z)} = \frac{(-1)^n}{\pi 2^{2n+1} (n!)^2} \left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right)^n \mu_m(z),$$

$$b_{nm}^{(z)} = \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} \left[\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right]^n \left[b_0(z) - \frac{1}{2\pi} \mu_m(z) \sum_{q=1}^{\bar{n}} \frac{1}{q} \right].$$

Учитывая, что $\partial r / \partial x = \cos \varphi$ и $\partial r / \partial y = \sin \varphi$, будем сращивать разложения (3) и (4) в области, где $\tilde{r} \rightarrow \infty$, $r \rightarrow 0$. Перепишем главный член внешнего разложения во внутренних переменных и сравним члены при соответствующих степенях \tilde{r} во внешнем и внутреннем разложениях. Это сравнение дает

$$a_{01}(z) = b_1(z), \quad a_{02}(z) = b_3(z), \quad a_{03}(z) = d_5(z). \quad (6)$$

Остальные неизвестные определяют из соотношений (5) и условий сращивания.

Принимая во внимание равенства (6), получим

$$f_0(\theta, \varphi) = \frac{\varepsilon^2}{4} A_0 \left\{ 2k \frac{1-g}{1+g} \sin \theta (k_x \cos \varphi + k_y \sin \varphi) \int_0^l [F(t)]^2 \times \right.$$

$$\times e^{it(k_z - k \cos \theta)} dt - \int_0^l [k^2 - (1-g)k_z^2 - gk^2] [F(t)]^2 + ik_z(1-g) \times$$

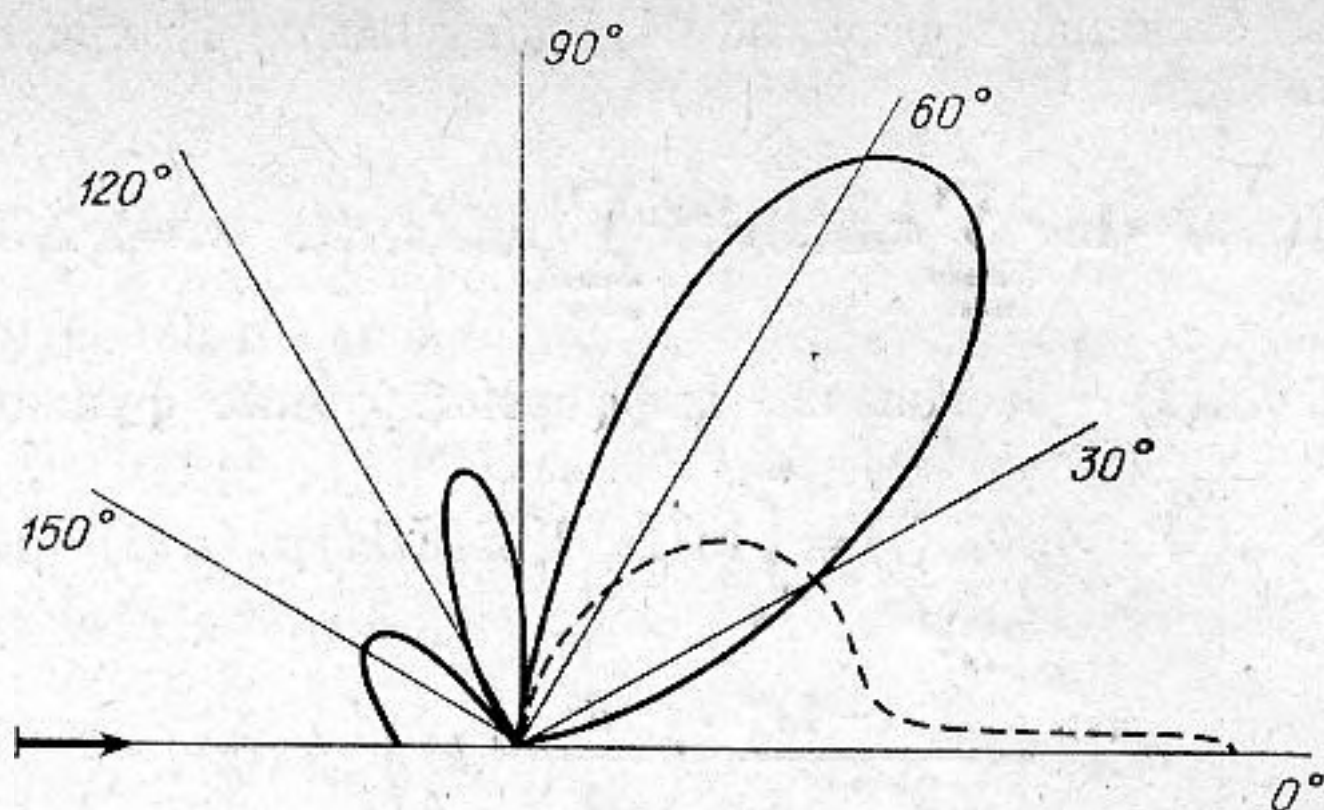
$$\left. \times \frac{d}{dt} [F(t)]^2 \right\} e^{it(k_z - k \cos \theta)} dt \Bigg\}.$$

В случае, если тело акустически идеально жесткое, следует положить $\tilde{\rho} \rightarrow \infty$, что соответствует $g=0$ в формуле (7).

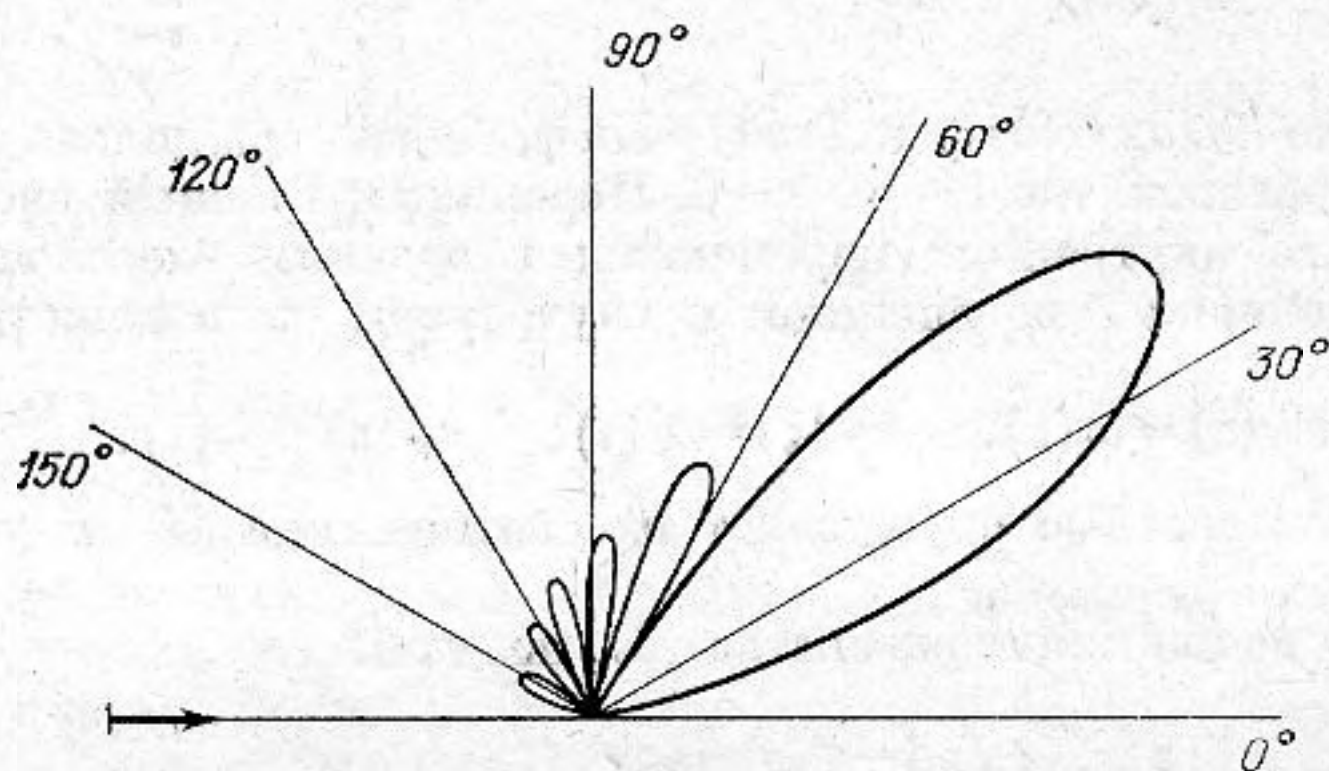
Если $\tilde{\rho} = \rho$, т. е. $g=1$, а параметр kl достаточно мал, формула (7) совпадает с формулой (110.1), приведенной в книге [5] и описывающей рассеяние на малом препятствии, отличающемся от среды только сжимаемостью.

Если тело S имеет в точке $r=0$, $z=0$ ненулевой радиус кривизны и при малых $z > 0$ имеет место $F(z) = \sqrt{2az}$, то при падении плоской волны вдоль оси z ($k_x = k_y = 0$) асимптотика рассеянного поля в «носике» $r=0$, $z=0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет вид $u \approx ikA_0 a(1-g)\varepsilon^2 \ln(\varepsilon^2 a)$.

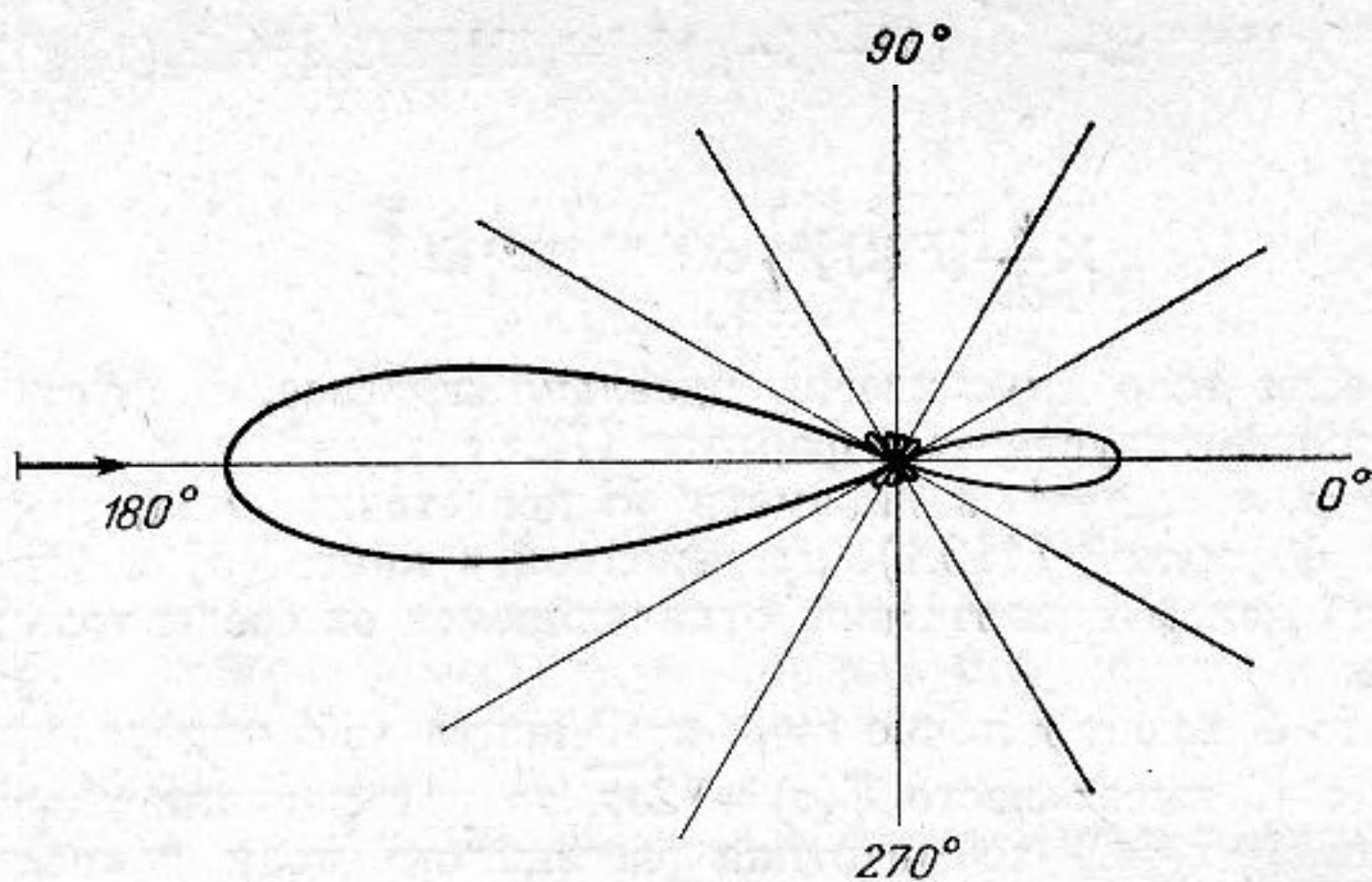
Для графической иллюстрации формулы (7) были проведены численные расчеты. На фиг. 1 сплошной линией представлена угловая характеристика рассеяния идеально жесткого сфероида $F(z) = \sqrt{z(l-z)}$ при $kl=10$. Пунктирная линия соответствует угловой характеристике рассеяния сфероида тех же волновых размеров для значения $g=1$, т. е. случая, когда этот сфероид отличается от среды только сжимаемостью. На фиг. 2 изображена угловая характеристика рассеяния идеально жесткого сфероида при $kl=20$. Стрелки на фигурах обозначают направление падения плоской волны, совпадающее с осью вращения сфероида. На фиг. 3 представлен случай, когда плоская волна падает вдоль оси x под углом 90° к оси вращения идеально жесткого сфероида с волновым размером $kl=20$.



Фиг. 1. Угловые характеристики рассеяния сфероида при $kl=10$



Фиг. 2. Угловая характеристика рассеяния жесткого сфероида при $kl=20$



Фиг. 3. Угловая характеристика рассеяния жесткого сфероида в плоскости $\varphi=0$ при боковом падении плоской волны для $kl=20$

На фиг. 1 и 2 линии разреза являются осью вращения угловой характеристики рассеяния.

Из анализа приведенных графиков следует, что полученные результаты находятся в хорошем согласии с материалом, представленным в работах [6, 7], который был выполнен на основании точного расчета рассеяния на вытянутых сфероидах.

Автор приносит благодарность М. В. Федорюку и В. В. Тюткину за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федорюк М. В. Рассеяние акустических волн тонким акустически жестким телом вращения.— Акуст. ж., 1981, т. 27, № 4, с. 605–609.
2. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1957.
3. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.
4. Федорюк М. В. Асимптотика решения задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Гельмгольца во внешности тонкого цилиндра.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1981, т. 45, № 1, с. 167–186.
5. Исакович М. А. Общая акустика. М.: Наука, 1973.
6. Клещев А. А., Шейба Л. С. Рассеяние звуковой волны идеальными вытянутыми сфероидами.— Акуст. ж., 1970, т. 16, № 2, с. 264–268.
7. Белкина М. Г. Характеристики излучения вытянутого эллипсоида вращения.— В кн.: Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения. М.: Сов. радио, 1957, с. 126–147.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
11.11.1981