

УДК 534.26

РАССЕЯНИЕ ВОЛН ГУЛЯЕВА — БЛЮСТЕЙНА НА ПРОВОДЯЩЕЙ ПОЛОСЕ

Губанов В. А., Кириллов А. И.

Решено полное сингулярное уравнение относительно плотности заряда на полосе металлизации в задаче рассеяния поверхностных акустических волн проводящей неоднородностью. Рассмотрен случай нормального падения волн Гуляева — Блюстейна на идеально проводящую полосу, расположенную на поверхности гексагонального кристалла.

Метод самосогласованного поля в задаче возбуждения и рассеяния поверхностных акустических волн состоит в том, что компоненты поля волны на границе раздела двух сред определяются из решения одномерного (в плоском случае) интегрального уравнения [1].

Импедансные граничные условия, предложенные в работе [2], позволяют сформулировать граничную задачу как электростатическую (задача Гильберта для пары гармонических в верхней полуплоскости функций) со смешанными граничными условиями, которая сводится к неоднородному уравнению Фредгольма относительно тангенциальной составляющей электрического поля или плотности заряда на границе [3].

Метод тензорных функций Грина показал [4], что самосогласованной задаче возбуждения соответствует некоторое однородное интегральное уравнение с разностным ядром. Численные методы подбора такой плотности заряда, которая обеспечивает заданный потенциал на штырях, предложены в работах [5, 6].

В данной работе задача о возбуждении и рассеянии поверхностных акустических волн на проводящих неоднородностях сводится к полному сингулярному уравнению относительно плотности заряда на проводящей полосе. Использование аппарата сингулярных уравнений допускает как равносильную регуляризацию исходного уравнения, так и применение прямых численных методов решения. В последнем случае знание решения характеристического уравнения позволяет представить искомую функцию в специальной форме и значительно упростить численную процедуру.

Рассмотрим рассеяние поверхностных акустических волн Гуляева — Блюстейна при нормальном падении на идеально проводящую полосу на поверхности гексагонального кристалла. Конфигурация неоднородности и система координат показаны на фиг. 1. Механическое смещение волны u направлено параллельно оси шестого порядка и перпендикулярно плоскости x_1x_2 .

В частном случае гексагонального кристалла и чисто сдвиговых поверхностных акустических волн исходная система уравнений имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi^+ &= 0, & (x_2 > 0), \\ e\Delta u - e\Delta\varphi^- &= 0 \\ c\Delta u &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned} \right\}, \quad (x_2 < 0),$$

φ^+ и φ^- — электрические потенциалы в верхнем и нижнем полупространствах, $c=c_{44}$ — упругий модуль, $e=e_{15}$ — пьезомодуль, $\varepsilon=\varepsilon_{11}$ — диэлектрическая постоянная, ρ — плотность кристалла. На границе раздела двух сред выполняются следующие электрические граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} E_1^+ &= E_1^- = 0 \\ D_2^+ - D_2^- &= \sigma \end{aligned} \right\} \quad \text{при } x_1 \in (-a \div a), \quad x_2 = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} E_1^+ &= E_1^- = E_1 \\ D_2^+ - D_2^- &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ при } x_1 \in (-a \div a), x_2 = 0.$$

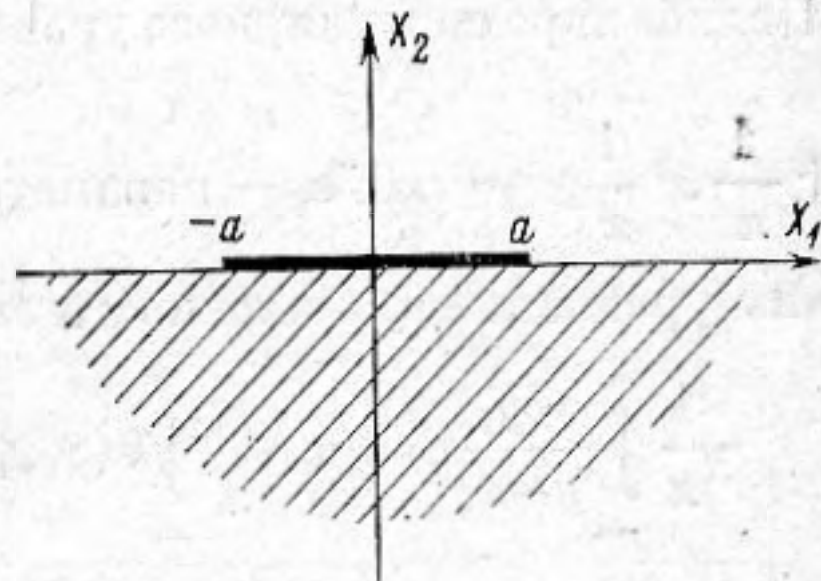
Здесь E_1 , D_2^\pm , σ — тангенциальная составляющая электрического поля, электрическая индукция и плотность заряда на границе. Механически граница полагается свободной. В работе [7] показано, что для фурье-образов $E_1(p)$ и $\sigma(p)$ можно записать краевое соотношение

$$E_1(p) = G(p)\sigma(p) - A_+\delta(p-p_0) - A_-\delta(p+p_0), \quad (1)$$

где

$$G(p) = i \frac{\operatorname{sgn} p \lambda(p) - \alpha |p|}{\varepsilon_r \lambda(p) - \alpha_1 |p|}. \quad (2)$$

Здесь $\lambda(p) = \sqrt{p^2 - k^2}$, $k^2 = \omega^2 \rho / c$, $\alpha = K^2 / (1 + K^2)$, $K^2 = e^2 / c\varepsilon$, $\alpha_1 = \alpha \varepsilon_0 / \varepsilon_r$, $\varepsilon_r = \varepsilon + \varepsilon_0$, $p_0 = k / \sqrt{1 - \alpha_1^2}$ — волновое число поверхностной акустической волны на свободной поверхности пьезоэлектрика. Слагаемые с коэффициентами A_+ и A_- в соотношении (1) представляют собой фурье-образы решения исходной задачи с однородными граничными условиями при $x_2 \rightarrow 0$, $\pm p_0$ — полюсы $G(p)$. Коэффициенты A_+ и A_- определяются амплитудой падающей волны. Если решается задача возбуждения поверхностной акустической волны, то $A_+ = A_- = 0$, при рассеянии поверхностной акустической волны справа $A_- = 0$, слева $A_+ = 0$. Таким образом, в случае решения задачи рассеяния поверхностной акустической волны уравнение для составляющих поля на границе имеет правую часть отличную от нуля.



Фиг. 1. Геометрия задачи

Выполнив формально обратное преобразование Фурье с учетом теоремы о свертке, соотношение (1) можно записать в оригиналах так:

$$\int_{-a}^a g(x_1 - x) \sigma(x) dx - A_+ e^{-ip_0 x_1} = 0, \quad x, x_1 \in (-a \div a), \quad (3)$$

где $g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(p) e^{-ipx} dp$. Для определенности полагаем, что поверхностная акустическая волна падает на проводящую полосу справа из бесконечности.

Однако краевой коэффициент $G(p)$ имеет особенности на действительной оси p . Поэтому для вычисления ядра интегрального уравнения (3) представим его в виде

$$G(p) = G_r(p) + G_s(p), \quad (4)$$

где

$$G_s(p) = i \frac{\operatorname{sgn} p \frac{1 - \alpha}{\varepsilon_r}}{1 - \alpha_1}, \quad (5)$$

$$G_r(p) = i \frac{\operatorname{sgn} p \frac{(\alpha - \alpha_1) f(p)}{\varepsilon_r}}{1 - \alpha_1^2 p^2 - p_0^2}, \quad (6)$$

$f(p) = p^2 - |p| \sqrt{p^2 - k^2} - p_1^2$, $p_1^2 = k^2 / (1 - \alpha_1)$. Легко убедиться, что $f(p) / (p^2 - p_0^2)$ — четная функция p , убывающая как p^{-2} при $|p| \rightarrow \infty$. Оригиналы Фурье, соответствующие (5) и (6), определяют ядра характеристической (сингулярной) части уравнения (3) — $g_s(x)$ и регулярной части — $g_r(x)$. Переходя в (5) и (6) к оригиналам, получаем

$$g_s(x) = \frac{1}{\pi \varepsilon_r} \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha_1} \mathcal{P} \frac{1}{x} \quad (7)$$

(здесь \mathcal{P} — главное значение по Коши),

$$g_r(x) = \frac{\mu}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{f(p) \sin px}{p^2 - p_0^2} dp, \quad (8)$$

где $\mu = (\alpha - \alpha_1) / \varepsilon_2 (1 - \alpha_1^2)$.

Далее, для того чтобы вычислить регулярную часть ядра в явном виде, положим $f(p) \cong -p_1^2$. Такое предположение равносильно аппроксимации краевого коэффициента функцией $G(p) \cong (i \operatorname{sgn} p / \varepsilon_2) \times (p^2 - p_s^2) / (p^2 - p_0^2)$, причем p_s такое, что $p_0 < p_s < p_m$, где p_m — волновое число сдвиговой поверхностной волны под металлизацией. Теперь $g_r(x)$ можно вычислить в явном виде (см. формулу 5.2.6 из справочника [8])

$$k(p_0 x) = p_0 \int_0^{\infty} \frac{\sin px}{p^2 - p_0^2} dp = Si(p_0 x) \cos(p_0 x) - Ci(p_0 x) \sin(p_0 x). \quad (9)$$

Полное ядро сингулярного уравнения принимает вид $g(x) = -\alpha_0 \frac{p_0}{\pi} k(p_0 x) + \pm \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \frac{1}{x}$, $\alpha_0 = \varepsilon K^2 / \varepsilon_r$ — параметр электромеханической связи. Отсюда полу-

чим уравнение для плотности заряда на полосе

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sigma(y)}{y - x_1} dy + \alpha_0 \frac{p_0}{\pi} \int_{-a}^a k(p_0 x_1 - p_0 y) \sigma(y) dy - e^{-i p_0 x_1} = 0, \quad a < y, x_1 < a. \quad (10)$$

Первый член уравнения (10) описывает электростатическое поле проводящей полосы. Вторым возникает при самосогласованном подходе и учитывает электроакустическое взаимодействие полосы с электрической компонентой волны. Третье слагаемое — тангенциальная составляющая электрического поля падающей поверхностной акустической волны с единичной амплитудой этой компоненты. Уравнение (10) демонстрирует тот факт, что при падении поверхностной акустической волны на полосу должна сформироваться такая плотность заряда, которая скомпенсирует тангенциальную составляющую электрического поля падающей волны. Таким образом, уравнение (10) представляет собой полное сингулярное уравнение относительно плотности заряда на проводящей полосе.

Производя замену переменных $\xi = x_1/a$, $\eta = y/a$ и обозначая $\gamma = a p_0 / \pi$, приведем уравнение (10) к стандартной форме сингулярного уравнения для полосы с правой частью:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sigma(\eta)}{\eta - \xi} d\eta + \alpha_0 \gamma \int_{-1}^1 k[\pi \gamma (\xi - \eta)] \sigma(\eta) d\eta = e^{-\pi \gamma \xi}. \quad (11)$$

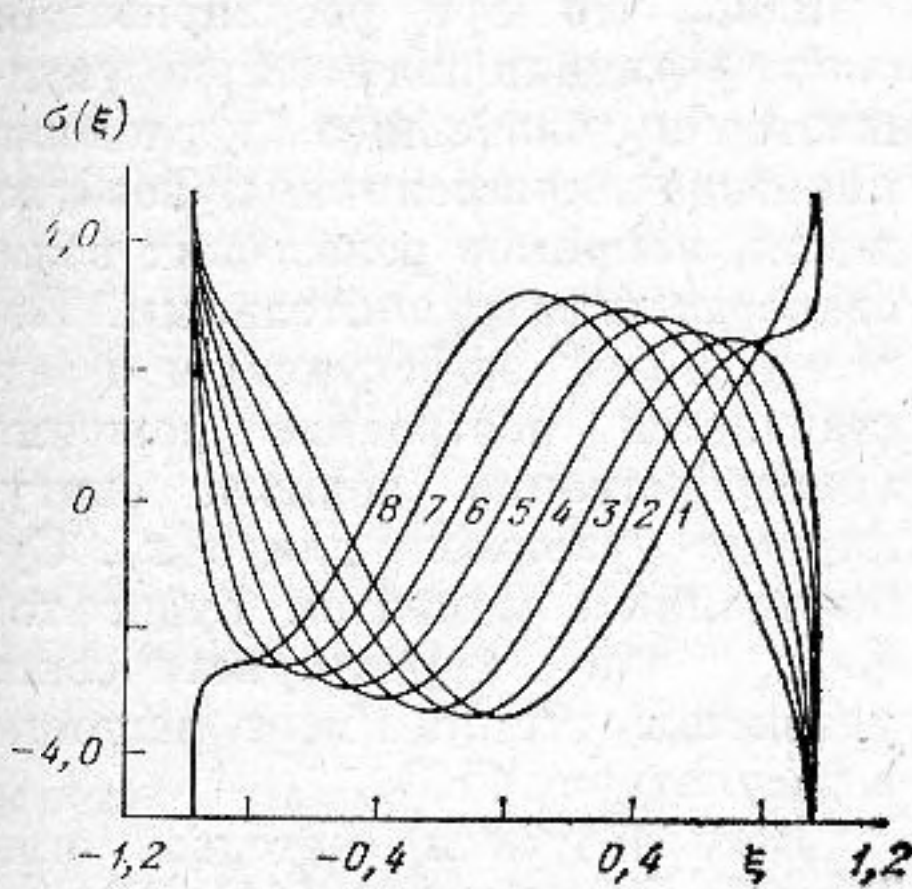
Решение уравнения (11) может быть получено несколькими способами [9]. В данной работе мы рассмотрим два основных: сведение исходного уравнения к равносильному фредгольмову и численное решение прямыми методами с использованием квадратурных формул. Первый способ состоит в том, что уравнение (11) приводится к равносильному ему фредгольмову уравнению решением характеристического уравнения (регуляризация Карлемана — Векуа). Такая процедура описана в [10], и поэтому сразу же можно записать регуляризованное уравнение (см. § 42 монографии [10])

$$\begin{aligned} \sigma(\xi) - \alpha_0 \gamma \int_{-1}^1 K(\xi, \eta) \sigma(\eta) d\eta = \\ = \frac{Q}{\sqrt{1 - \xi^2}} - \frac{1}{\pi \sqrt{1 - \xi^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - \xi_1^2}}{\xi_1 - \xi} e^{-i \pi \gamma \xi_1} d\xi_1, \end{aligned} \quad (12)$$

где

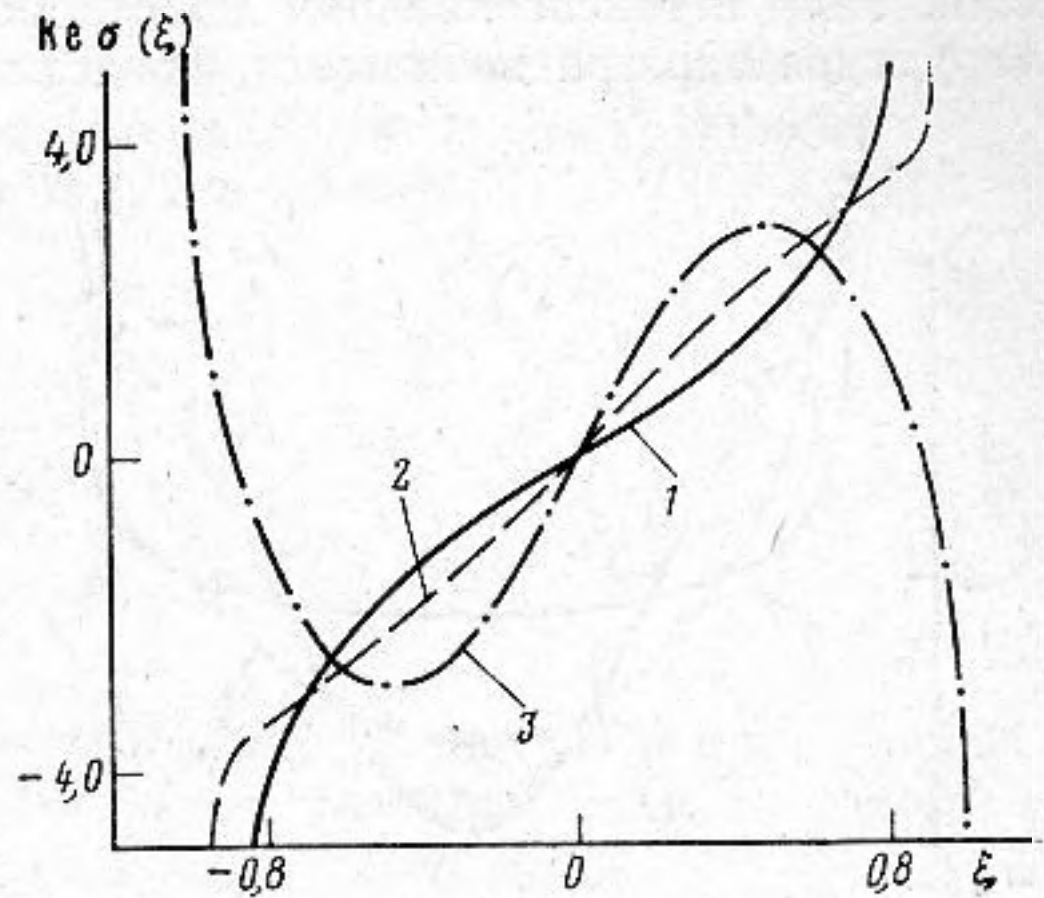
$$K(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi_1^2} k[\pi\gamma(\xi_1-\eta)]}{\sqrt{1-\xi^2}(\xi_1-\xi)} d\xi_1,$$

Q — константа, определяемая статическим зарядом полосы. Процедура регуляризации уравнения (11) неоднозначна, поскольку решение эквивалентной краевой задачи Римана существует в нескольких гельдеровских классах функций. Решение физической задачи следует искать в классе функций с интегрируемыми корневыми особенностями на краях полосы.



Фиг. 2

Фиг. 2. Динамика плотности заряда при $\gamma=0,5$



Фиг. 3

Фиг. 3. Нечетная составляющая плотности заряда на полосе при $\gamma=0,1$ (1), $\gamma=0,25$ (2) и $\gamma=0,5$ (3)

Такой выбор класса объясняется тем, что в пределе при $K^2 \rightarrow 0$, $\sigma(\xi)$ должна стремиться к статическому решению. Отметим, что регуляризованное уравнение (12) аналогично основному уравнению из работы [3].

Из выражения (9) следует, что $k[\pi\gamma(\xi_1-\eta)]$ принадлежит к гельдеровскому классу функций, поэтому (см., например, [10]) решение (12) можно представить как разложение по малому параметру α_0 . В частности, первая итерация решения с точностью до константы электромеханической связи K^2 выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{(1)}(\xi) = & \frac{Q}{\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{1}{\pi\sqrt{1-\xi^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi_1^2}}{\xi_1-\xi} e^{-i\pi\gamma\xi_1} d\xi_1 + \\ & + \alpha_0\gamma \frac{Q}{\pi\sqrt{1-\xi^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi_1^2}}{\xi_1-\xi} \int_{-1}^1 \frac{k[\pi\gamma(\xi_1-\eta)]}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta d\xi_1. \end{aligned} \quad (13)$$

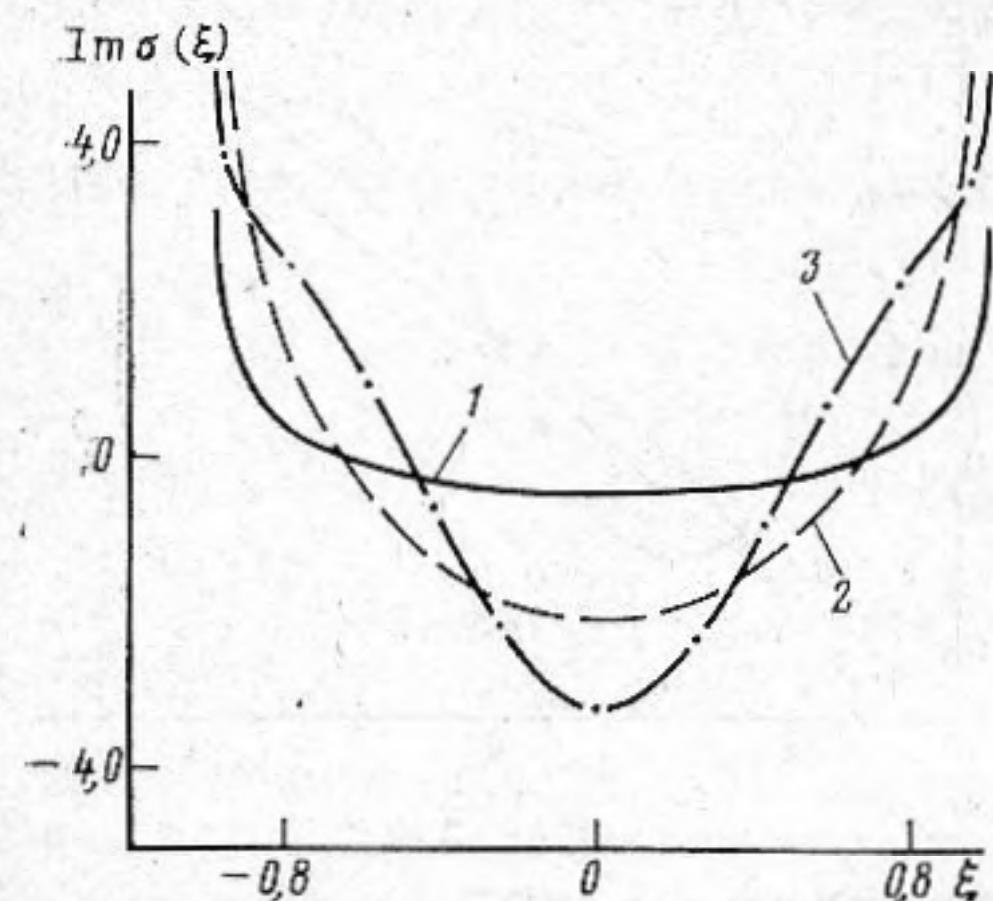
По формуле (13), при нулевом статическом заряде на полосе ($Q=0$), были проведены расчеты на ЭВМ. В этом случае наведенная падающей поверхностной акустической волной плотность заряда определяется выражением

$$\sigma_{(1)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi_1^2}}{\xi_1-\xi} \sin(\pi\gamma\xi_1 + \varphi) d\xi_1. \quad (14)$$

Полное решение уравнения для $\sigma_{(1)}(x_1)$ дают два выражения типа (14) при $\varphi=0$ (действительная часть $\text{Re } \sigma(x_1)$) и $\varphi=\pi/2$ (мнимая часть $\text{Im } \sigma(x_1)$). На фиг. 2 показана динамика плотности заряда на полосе при $\varphi=(n-1)\pi/8$ ($n=1, \dots, 8$ и совпадает с номером кривой). Кривая 1 со-

ответствует такому распределению заряда, когда на полосу металлизации воздействует нечетная полуволна падающей поверхностной акустической волны, а кривая 5 соответствует четной полуволне. Через половину периода падающей поверхностной акустической волны семейство кривых окажется развернутым симметрично относительно оси ординат. На фиг. 3 и 4 показаны действительные и мнимые составляющие $\sigma_{(1)}(\xi)$ при различных соотношениях ширины полосы и длины падающей волны. Из графиков на фиг. 3 и 4 ясно видна характерная особенность сингулярного оператора, который «перерабатывает» четное воздействие в нечетный отклик и наоборот.

Уже в простейшем случае чисто сдвиговых поверхностных акустических волн в гексагональном кристалле видно, что при регуляризации структура ядра равносильного фредгольмова уравнения значительно ухуд-



Фиг. 4. Четная составляющая плотности заряда на полосе при $\gamma=0,1$ (1), $\gamma=0,25$ (2) и $\gamma=0,5$ (3)

шается и дальнейшее исследование задачи рассеяния и возбуждения, например рэлеевских волн, становится затруднительным. Поэтому более эффективным представляется построение решения непосредственно полного сингулярного уравнения для $\sigma(x)$. Существенным моментом будет тот факт, что характеристическое уравнение всегда имеет решение в квадратурах [10].

Воспользуемся методом, описанным Каландия в [11]. Из решения характеристического уравнения видно, что $\sigma(\eta)$ можно представить в форме

$$\sigma(\eta) = \frac{\sigma_0(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}. \quad (15)$$

Введем новые переменные $\xi = \cos \theta$ и $\eta = \cos \tau$. Тогда уравнение (11) можно переписать относительно «гладкой» части плотности заряда $\sigma_0(\eta)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sigma_0(a \cos \tau)}{\cos \tau - \cos \theta} d\tau + \gamma \alpha_0 \int_0^\pi k(\pi \gamma \cos \theta - \pi \gamma \cos \tau) \sigma_0(a \cos \tau) d\tau = e^{-i\pi \gamma \cos \theta}. \quad (16)$$

Для искомой функции $\sigma_0(a\eta)$ построим интерполяционный многочлен Лагранжа по чебышевским узлам: $\xi_m = \cos \theta_m$ и $\theta_m = \frac{2m-1}{n} \pi$, $m=1, \dots, n$.

Четный тригонометрический полином Лагранжа степени $n-1$ может быть представлен в форме [11]:

$$L_n[\sigma_0, \xi] = -\frac{1}{\pi} \sum_{v=1}^n \sigma_0(\xi_v) + \frac{2}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \cos m\theta_v \cos m\theta. \quad (17)$$

Тогда квадратурная формула для особого интеграла будет следующей:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sigma(a\eta)}{\eta - \xi} d\eta = \frac{2}{n \sin \theta} \sum_{v=1}^n \sigma_0(\xi_v) \sum_{m=1}^{n-1} \cos m\theta_v \sin m\theta. \quad (18)$$

Здесь было использовано соотношение

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\tau d\tau}{\cos \tau - \cos \theta} = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}.$$

Регулярная часть уравнения (16) может быть представлена в виде суммы по квадратурной формуле типа Гаусса

$$\int_{-1}^1 k(\pi\gamma\xi - \pi\gamma\eta) \sigma_0(a\eta) d\eta = \frac{\pi}{n} \sum_{v=1}^n k(\pi\gamma \cos \theta - \pi\gamma \cos \theta_v) \sigma_0(a \cos \theta_v), \quad (19)$$

принимая во внимание равенство

$$2 \sum_{k=1}^{n-1} \cos k\theta_v \sin k\theta_\mu = \operatorname{ctg} \frac{\theta_\mu \mp \theta_v}{2}$$

(верхний знак берется, когда $|\mu - \nu|$ — нечетное число, нижний — когда четное). Из представления решения (17) и квадратурных формул (18), (19) приходим к алгебраической системе уравнений:

$$\sum_{v=1}^n a_{\mu\nu} \sigma_v^0 = \psi_\mu, \quad \mu, \nu = 1, \dots, n, \quad (20)$$

где $a_{\mu\nu} = \frac{1}{n} \left[\frac{2}{\alpha_0 \gamma \pi \sin \theta_\mu} \operatorname{ctg} \frac{\theta_\mu \mp \theta_\nu}{2} + k(\pi\gamma \cos \theta_\mu - \pi\gamma \cos \theta_\nu) \right]$, $\sigma_v^0 = \sigma^0(\cos \theta_\nu)$, $\psi_\mu = e^{-i\pi\gamma \cos \theta_\mu}$.

В результате исходное сингулярное уравнение сводится к бесконечной, вообще говоря, алгебраической системе уравнений. Аппроксимируя «гладкую» компоненту плотности заряда полиномом $n-1$ порядка, приходим к системе n уравнений. В принципе, подобным образом можно получить решение с любой наперед заданной точностью.

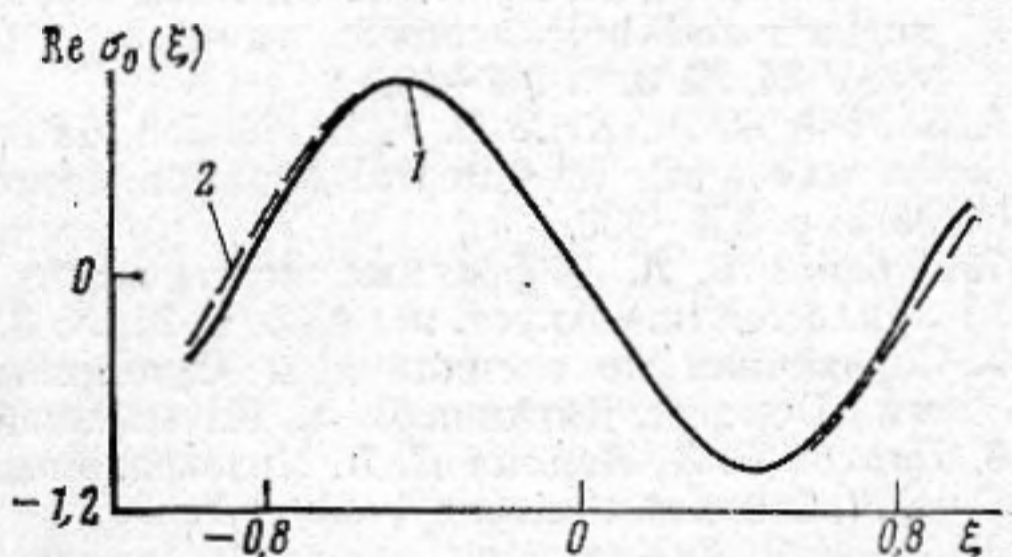
В общем случае коэффициенты $\sigma_0(\xi_v)$ — комплексные числа, причем действительная часть соответствует нечетной составляющей плотности заряда на полосе, а мнимая — четной. Поэтому необходимо решать две системы уравнений $n \times n$ типа (20). Однако в силу того, что разностное ядро регулярной части — нечетная функция, матрица $\|a_{\mu\nu}\|$ в (20) принимает специальный вид. Возможность рассматривать $\|a_{\mu\nu}\|$ как блочную матрицу позволяет перейти к двум системам $n/2 \times n/2$. При этом объем необходимых вычислений значительно уменьшается.

Прямым методом были проведены расчеты плотности заряда для $\gamma = 0,1; 0,25; 0,5; 1,0; 3,0$. $\sigma_0(\xi)$ аппроксимировалась полиномом степени $n-1 = 5$ и 19 . Расчеты показали, что уже первая итерация решения $\sigma_{(1)}(\xi)$ дает достаточно хороший результат. Для примера на фиг. 5 показаны нечетная (действительная) часть $\sigma_0(\xi)$, вычисленная прямым методом при $n=20$, и первая итерация.

Из полученных результатов следует, что для оценки параметров рассеяния поверхностных акустических волн на полосе можно пользоваться аппроксимацией плотности заряда вида

$$\sigma_{\text{ан}}(\xi) = \alpha_0 \frac{\chi(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \pi\gamma\xi\right)}, \quad (21)$$

$$\chi(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in (-1 \div 1), \\ 0, & \xi \notin (-1 \div 1). \end{cases}$$



Фиг. 5. $\operatorname{Re} \sigma^0(\xi)$, рассчитанная прямым методом (1) и первая итерация регуляризованного уравнения (2) при $\gamma=1,0$

Соотношение (21) позволяет «конструировать» $\sigma(x_1)$ при решении более сложных задач рассеяния и возбуждения поверхностных акустических волн.

Таким образом, в работе выведено сингулярное интегральное уравнение самосогласованной задачи рассеяния и возбуждения поверхностных акустических волн проводящей неоднородностью. Показано, что такое уравнение равносильной регуляризацией сводится к фредгольмову, и в случае волн Гуляева — Блюстейна решение может быть получено итерациями по малому параметру. С другой стороны, предложено использовать прямой метод численного решения уравнения (10), который представляется более эффективным для сред с низшей симметрией и рэлеевских поверхностных акустических волн.

Полученные представления для $\sigma(x)$ пригодны для вывода асимптотики поля поверхностных акустических волн в дальней зоне [7] и определения параметров рассеяния.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Emtage P. R.* Self-consistent theory of interdigital transducers.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1972, v. 51, № 4, p. 1142—1156.
2. *Ingebrigtsen K.* Surface waves in piezoelectrics.— *J. Appl. Phys.*, 1969, v. 40, № 7, p. 2681—2686.
3. *Вирюков С. В., Горышник Л. Л.* Теория взаимодействия поверхностных волн в пьезоэлектриках с электродными структурами.— *ЖТФ*, 1980, т. 50, № 8, с. 1647—1654.
4. *Гулинский И. А., Попов В. В.* К теории возбуждения волн в пьезокристаллах узкими металлическими электродами.— *Радиотехника и электроника*, 1978, т. 23, № 2, с. 392—402.
5. *Milsom R. F., Reilly N. H. C., Redwood M.* Analysis of generation and detection of surface and bulk acoustic waves by interdigital transducers.— *IEEE Trans.*, 1977, v. SU-24, № 3, p. 147—166.
6. *Sabbah H. A., Krile T. F.* Excitation, detection and scattering of electroelastic surface waves via an integral equation approach.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1976, v. 60, № 3, p. 626—633.
7. *Губанов В. А.* Дифракция акустических поверхностных волн на проводящей полуплоскости.— *Акуст. ж.*, 1980, т. 26, № 3, с. 321—328.
8. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами./ Под ред. Диткина В. А., Кармазиной Л. Н. М.: Наука, 1977. 544 с. Пер. с англ.
9. *Паргон В. З., Перлин П. И.* Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 312 с.
10. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
11. *Каландия А. И.* Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 304 с.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
31.III.1981
после исправления
5.II.1982