

УДК 534.539.3

**ДИФРАКЦИЯ ВОЛН ДЕФОРМАЦИЙ НА ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ЩЕЛИ
В НЕОДНОРОДНОЙ ТВЕРДОЙ СРЕДЕ**

Коваленко Г. П.

Для твердой изотропной среды, параметры Ламе и плотность которой изменяются с глубиной, но допускают разделение уравнений движения на независимые, найдены потенциалы дифрагированных стационарных волн деформаций, вызванные наличием в среде плоской щели конечной ширины. Задача сведена к четырем независимым системам бесконечного порядка линейных алгебраических уравнений.

В работе получены потенциалы дифрагированного стационарного поля волн деформаций в твердой упругой среде, содержащей прямолинейную плоскую щель. Параметры Ламе и плотность среды зависят от одной координаты. Аналогичная задача для однородной среды изучалась в работе [1].

Рассматривается твердая упругая изотропная среда в декартовой системе координат. Параметры Ламе λ , μ и плотность среды ρ зависят от координаты z . В плоскости $z=0$ имеется щель $|x| < l$. В среде распространяются гармонические волны деформаций. Общее нормальное и касательное напряжения на берегах щели равны нулю:

$$\sigma_z + \sigma_{zs} = 0, \quad \sigma_{xz} + \sigma_{xzs} = 0, \quad z=0, \quad (1)$$

где σ_z , σ_{xz} — компоненты тензора напряжений, вызванных падающей волной, индекс s относится к напряжениям, вызванным рассеянной волной. Вне щели смещения и напряжения непрерывны в плоскости $z=0$. Требуется найти потенциалы рассеянных волн. Сформулированная задача решается для таких сред, неоднородность которых по координате z допускает разделение системы уравнений движения на независимые уравнения, что возможно, если три функции μ , ρ , ν удовлетворяют двум нелинейным дифференциальным уравнениям [2]

$$p_1^2 - p_1' + 2\varepsilon' - \varepsilon p_3 = 0, \quad (2)$$

$\mu^2 \rho^{-1} \varepsilon (\varepsilon - p_1) = E\mu + R$, $p_1 = \mu' \mu^{-1}$, $p_3 = \rho' \rho^{-1}$, $\varepsilon = (1 - \nu)(2p_1 - p_3)$, где штрих обозначает дифференцирование по z , E и R — произвольные постоянные, ν — коэффициент Пуассона. Система уравнений (2) является недоопределенной и имеет бесконечное множество решений, из которых физический смысл имеют положительные и ограниченные на заданном интервале изменения переменной z . Общее решение системы (2), содержащее пять постоянных, не найдено. Решение, содержащее четыре произвольных постоянных, когда постоянная R принимается равной нулю, получено в работе [3]. Запишем это решение в форме Коши, считая, что в плоскости $z=0$ заданы значения двух функций и их производных. Если в качестве известной функции считать $\nu(z)$, а искомыми — $\mu(z)$ и квадрат скорости волны сдвига $w(z)$, то получим

$$\mu(z) = \mu(0) (1 + Az)^{-1} \exp \left(B \int_0^z (1 + B(z-J))^{-1} dz \right), \quad (3)$$

$$w(z) = w(0) (1 + Az) (1 + B(z - J)),$$

$$A = a(1 - \nu(0)) - b\nu(0), \quad B = (a + b)(1 - \nu(0)), \quad a = w'(0)w^{-1}(0),$$

$$b = \mu'(0)\mu^{-1}(0), \quad J = \int_0^z \frac{1-2v(z)}{1-v(z)} dz.$$

Эти зависимости записаны для $z > 0$ и постоянные a и b определяются через правосторонние производные функций w и μ в точке $z=0$. На отрицательную полуось зависимости (3) продолжим четным образом, для чего достаточно переменную z брать по модулю. Следовательно, функции μ , w , ρ , v являются непрерывными в точке $z=0$, но их односторонние производные имеют противоположные знаки. С учетом сказанного функции μ и w будут ограниченными, положительными и отличными от нуля, если a и b удовлетворяют неравенствам: $a+b \geq 0$, $b \leq a(1-v(0))v^{-1}(0)$.

Если $v(z) = v(0)$, то система (2) сводится к одному уравнению второго порядка, зависящему от двух произвольных постоянных. Множество его решений не охватывается зависимостями (3). Примеры этих решений приведены в таблице. Поскольку $v(z)$ меняется от нуля до 0,5, то есте-

Таблица

№ п.п	1	2	3
v	$v = 0,25$	$v \neq 0,25$	$v \neq 0$
h_n	$h_1 = b_1 z + 1$ $b_1 = \frac{b}{2} = \frac{\mu'(0)}{2\mu(0)}$	$h_2 = a_1 z + 1$ $a_1 = \frac{a}{4v-1}$	$h_3 = az + 1$ $a = \frac{w'(0)}{w(0)}$
$\frac{w(z)}{w(0)}$	1	h_2^{4v-1}	h_3
$\frac{\mu(z)}{\mu(0)}$	h_1^2	h_2^{3-4v}	$\frac{1-v}{h_3^v}$
$f_1(z)$	h_1	$h_2^{2(1-2v)}$	1
$f_2(z)$	h_1	$h_2^{2(1-2v)}$	$\frac{1-2v}{h_3^v}$

ственно предположить, что $v(z)$ — медленно меняющаяся функция, и представить ее в виде $v(z) = v(0)f(cz)$, где $f(0) = 1$, а $c = v'(0)v^{-1}(0)$. Если перейти к безразмерной переменной $z_1 = zl^{-1}$, где l — полуширина щели, то в качестве малого параметра следует брать безразмерную величину cl , а для функций w и μ — соответственно al и bl . Итак, будем полагать, что $al, bl, cl \ll 1$, а производные функций w, μ, ρ пропорциональны этим параметрам. Легко проверить, что последнее предположение выполняется для приведенных выше решений. Этими и другими известными решениями, найденными в работах [3, 4] и также допускающими введение малых параметров, можно аппроксимировать реальные зависимости на конечном интервале изменений z и решать краевую задачу для неоднородной среды, пользуясь разделенной системой уравнений. Пример такой аппроксимации также имеется в работе [3].

Уравнения движения неоднородной среды со свойствами (2) можно представить в виде

$$\nabla^2 \Psi_n + \left(H_n(z) - v_n^{-2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi = 0, \quad n=1, 2, 3, \quad (4)$$

$$H_n(z) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} p_3^2 + p_3' \right) + (-1)^{n-1} \gamma^{2(n-2)}(z) (p_n g_n(z) + \gamma^2(z) - 1) g_n'(z),$$

$$n=1, 2,$$

$$H_3(z) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} p_1^2 + p_1' \right), \quad v_n^2(z) = \frac{\mu}{\rho} \gamma^{2(2-n)}(z), \quad p_2 = \lambda'/\mu,$$

$$g_n(z) = (-1)^n [2(1-2v(z))p_1 - (2^{2-n} - 2v(z))p_3], \quad \gamma^2(z) = (\lambda + 2\mu)/\mu,$$

где ∇^2 — оператор Лапласа. Уравнения (4) следует рассматривать отдельно для верхнего и нижнего полупространств. При этом в функциях $H_n(z)$ берется правосторонняя производная в точке $z=0$ для верхнего полупространства и левосторонняя — для нижнего. Векторное смещение $u = u_1 + u_2 + u_3$ связано с функциями Ψ_n зависимостями

$$u_1 f_1 = \nabla \left(f_1 \sqrt{\frac{\rho(0)}{\rho(z)}} \Psi_1 \right), \quad u_2 f_2 = \nabla \times \nabla \times \left(i_z f_2 \sqrt{\frac{\rho(0)}{\rho(z)}} \Psi_2 \right),$$

$$u_3 = \nabla \times \left(i_z \sqrt{\frac{\mu(0)}{\mu(z)}} \Psi_3 \right),$$
(5)

где ∇ — оператор Гамильтона, i_z — единичный вектор, f_n — весовые функции, зависящие только от z , логарифмические производные которых обозначены выше через $g_n(z)$. Для плоской задачи, которая здесь рассматривается, достаточно ограничиться двумя потенциалами Ψ_1 и Ψ_2 . Поскольку далее функции $H_n(z)$ в системе (4) имеют второй порядок малости и с возрастанием z убывают, то их влиянием на приближенное решение пренебрегаем. Случай четных и нечетных по x потенциалов падающих и рассеянных волн рассматриваются параллельно. Потенциалы падающей продольной и поперечной волн в среде, неоднородной по z , можно представить в виде [5]

$$\Phi_n = A_n (\kappa_n(z))^{-1/4} \exp \left[ik_n \int_0^z \sqrt{\kappa_n(z)} dz + i\omega t \right] \begin{pmatrix} \cos(x\tau) \\ \sin(x\tau) \end{pmatrix},$$
(6)

$$\kappa_n(z) = v_n^2(0) v_n^{-2}(z) = -\sin^2 \varphi_n, \quad k_n = \frac{\omega}{v_n(0)}, \quad \tau = k_n \sin \varphi_n,$$

где $n=1$ отвечает продольной волне, а $n=2$ — поперечной, A_n — амплитудные множители, φ_n — угол между касательной к лучу продольной (поперечной) волны в плоскости $z=0$ и осью OZ , ω — частота колебаний. На щели $|x| < l$ потенциалы (6) вызывают нормальные и касательные напряжения

$$\sigma_z = E_1 \begin{pmatrix} \cos(\tau x) \\ \sin(\tau x) \end{pmatrix}, \quad E_1 = \mu(0) \sum_{n=1}^2 \frac{A_n G_n (-1)^n}{\sqrt{\cos \varphi_n}},$$
(7)

$$\sigma_{xz} = E_2 \begin{pmatrix} \sin(\tau x) \\ -\cos(\tau x) \end{pmatrix}, \quad E_2 = \mu(0) \sum_{n=1}^2 \frac{A_n T_n}{\cos \varphi_n}, \quad \varphi_n \neq \frac{\pi}{2},$$

$$G_1 = -k_2^2 \cos 2\varphi_2 + i\gamma^2 g_2 k_1 \cos \varphi_1, \quad \gamma^2 = \gamma^2(0) = \frac{2(1-v(0))}{1-2v(0)},$$

$$G_2 = k_2^2 \sin^2 \varphi_2 (2ik_2 \cos \varphi_2 + \gamma^2 g_2 + 2\varepsilon), \quad v(z) \neq 1/2,$$

$$T_1 = 2ik_1 \cos \varphi_1 + g_2, \quad T_2 = -k_2^2 \cos \varphi_2 + g_1 ik_2 \cos \varphi_2,$$

$g_1 = g_1(0) = 2(v(0)b - (1-v(0))a)$, $g_2 = g_2(0) = (a+b)(1-2v(0))$, $\varepsilon = \varepsilon(0) = 1/2(g_1 - g_2)$. Потенциалы рассеянных волн ищем в виде

$$\Psi_1^{(q)}(x, z, t) = \exp(i\omega t) \int_0^\infty \alpha \left(\mp L(\alpha) + \frac{\alpha Q_1(\alpha)}{\eta_1 - \varepsilon} \right) \begin{pmatrix} \cos \alpha x \\ \sin \alpha x \end{pmatrix} \Phi_{1s} d\alpha,$$
(8)

$$\Psi_2^{(q)}(x, z, t) = \exp(i\omega t) \int_0^\infty \alpha \left(\mp Q(\alpha) + \frac{\alpha L_1(\alpha)}{\eta_2 - \varepsilon} \right) \begin{pmatrix} \cos \alpha x \\ \sin \alpha x \end{pmatrix} \Phi_{2s} d\alpha,$$

$\eta_n = (\alpha^2 - k_n^2)^{1/2}$, $q=1, 2$, где верхний знак берется для $z > 0$, нижний — для $z < 0$, L, L_1, Q, Q_1 находятся из граничных условий (1), верхняя тригоно-

метрическая функция берется при $q=1$, нижняя — при $q=2$, Φ_{ns} удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\Phi_{ns}'' + (H_n(z) - \eta_n^2(z)) \Phi_{ns} = 0, \quad (9)$$

$\eta_n^2(z) = \alpha^2 - v_n^2(0)v_n^{-2}(z)$ с медленно меняющимися коэффициентами. Приближенные методы интегрирования таких уравнений изложены в работах [6, 7]. Поэтому здесь только отметим, что если $v_n^2(z)$ возрастают на бесконечности медленнее многочлена второй степени, то решения уравнений (9) можно представить абсолютно сходящимся рядом на интервале $(0, \infty)$ [8]. Если это условие нарушено, то решение представляется асимптотическим рядом. В обоих случаях будем брать первый член этого ряда или, иначе, решение ВКБ [9]. Тогда для Φ_{ns} получим

$$\Phi_{ns} = \eta_n^{1/2}(0) \eta_n^{-1/2}(z) \exp\left(-\int_0^{|z|} \eta_n(z) dz\right). \quad (10)$$

Заметим, что если малые параметры устремить к нулю, то уравнения (4) перейдут в уравнения движения однородной среды, а (8) — в их точные решения. Используя закон Гука, а также формулы (5, 8, 10) и отбрасывая слагаемые второго порядка малости, получим для смещений u_x , u_z и напряжений σ_{zs} , σ_{xzs} в плоскости $z=0$ такие выражения:

$$u_x = \int_0^\infty \alpha^2 \left(\mp L(\alpha) + \frac{\alpha Q_1(\alpha)}{\eta_1 - \varepsilon} + Q(\alpha) (\eta_2 + \varepsilon) \mp \alpha L_1(\alpha) \begin{pmatrix} \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \end{pmatrix} \right) d\alpha, \quad (11)$$

$$u_z = \int_0^\infty \alpha \left(L(\alpha) (\eta_1 - \varepsilon) \mp Q_1(\alpha) - \alpha^2 \left(\mp Q(\alpha) + \frac{\alpha L(\alpha)}{\eta_2 + \varepsilon} \right) \begin{pmatrix} \cos \alpha x \\ \sin \alpha x \end{pmatrix} \right) d\alpha,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zs} = \mu(0) \int_0^\infty \alpha \left[\left(\mp L(\alpha) + \frac{\alpha Q_1(\alpha)}{\eta_1 - \varepsilon} \right) \psi_{11}(\alpha) - \right. \\ \left. - \left(Q(\alpha) \pm \frac{\alpha L_1(\alpha)}{\eta_2 + \varepsilon} \right) \psi_{12}(\alpha) \right] \begin{pmatrix} \cos \alpha x \\ \sin \alpha x \end{pmatrix} d\alpha, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xzs} = \mu(0) \int_0^\infty \alpha^2 \left[\left(L(\alpha) \mp \frac{\alpha Q_1(\alpha)}{\eta_1 - \varepsilon} \right) \psi_{21}(\alpha) + \right. \\ \left. + \left(\mp Q(\alpha) + \frac{\alpha L_1(\alpha)}{\eta_2 + \varepsilon} \right) \psi_{22}(\alpha) \right] \begin{pmatrix} \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \end{pmatrix} d\alpha, \end{aligned}$$

$$\psi_{nn}(\alpha) = 2\alpha^2 - k_2^2 + \gamma^{2(2-n)} g_1^{n-1} g_2^{2-n} \eta_n, \quad n=1, 2,$$

$$\psi_{12}(\alpha) = \alpha^2 (2\eta_2 + \gamma^2 g_2 + 2\varepsilon), \quad \psi_{21}(\alpha) = 2\eta_1 + g_2.$$

Здесь и далее множитель $e^{i\omega t}$ опущен, верхний знак отвечает верхнему полупространству $z > 0$. Для непрерывности смещений и напряжений вне щели необходимо потребовать, как вытекает из формул (11), (12) выполнения таких соотношений:

$$\int_0^\infty (\alpha Q(\alpha) + Q_1(\alpha)) \alpha^2 \begin{pmatrix} \cos \alpha x \\ \sin \alpha x \end{pmatrix} d\alpha = 0, \quad (13)$$

$$\int_0^\infty (L(\alpha) + \alpha L_1(\alpha)) \alpha^2 \begin{pmatrix} \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \end{pmatrix} d\alpha = 0, \quad |x| > l.$$

$$\int_0^{\infty} \alpha \left[\psi_{11}(\alpha) L(\alpha) + \psi_{12}(\alpha) \frac{\alpha L_1(\alpha)}{\eta_2 + \varepsilon} \right] \begin{pmatrix} \cos \alpha x \\ \sin \alpha x \end{pmatrix} d\alpha = 0, \quad (14)$$

$$\int_0^{\infty} \alpha^2 \left[\psi_{21}(\alpha) \frac{\alpha Q_1(\alpha)}{\eta_1 - \varepsilon} + \psi_{22}(\alpha) Q(\alpha) \right] \begin{pmatrix} \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \end{pmatrix} d\alpha = 0, \quad |x| > l.$$

Внутри щели напряжения (12) должны стремиться к одному и тому же пределу. Отсюда следует, что уравнения (14) справедливы и для $|x| < l$, т. е. на всей оси. Тогда

$$L_1(\alpha) = \frac{\psi_{11}(\alpha) L(\alpha) (\eta_2 + \varepsilon)}{\alpha \psi_{12}(\alpha)}, \quad Q_1(\alpha) = -\frac{\psi_{22}(\alpha) Q(\alpha) (\eta_1 - \varepsilon)}{\alpha \psi_{21}(\alpha)}. \quad (15)$$

Если выражение (15) подставить в формулы (13) и (12) с учетом зависимости (14), то получим четыре парных интегральных уравнения

$$\int_0^{\infty} F(\alpha) D_{nq}(\alpha) (\alpha y_n(\alpha))^{-1} \sin \alpha x d\alpha = -\frac{E_n \sin(\tau x)}{\tau^{m(n,q)}}, \quad |x| < l, \quad n, q = 1, 2, \quad (16)$$

$$\int_0^{\infty} D_{nq}(\alpha) \cos \alpha x d\alpha = 0, \quad |x| > l, \quad m(n, q) = 5 + q(n-3) + n(q-3),$$

где четным по x потенциалам падающих волн отвечает $q=1$, нечетным — $q=2$ и введены такие обозначения

$$D_{1q} = \frac{y_1(\alpha) Q(\alpha) \alpha^q}{\psi_{21}(\alpha)}, \quad D_{2q} = \frac{y_2(\alpha) L(\alpha) \alpha^{4-q}}{\psi_{12}(\alpha)},$$

$$y_1(\alpha) = (k_2^2 - g_1 \eta_2) (\eta_1 - \varepsilon) + \alpha^2 (g_2 + 2\varepsilon),$$

$$y_2(\alpha) = (k_2^2 - \gamma g_2 \eta_1) (\eta_2 + \varepsilon) + \alpha^2 \gamma^2 g_2,$$

$$F(\alpha) = \psi_{12}(\alpha) \psi_{21}(\alpha) - \psi_{11}(\alpha) \psi_{22}(\alpha),$$

D_{11} и D_{22} — косинус-преобразования соответственно нормального и горизонтального смещений, D_{12} и D_{21} — косинус-преобразования производной горизонтального и нормального смещений соответственно. Решения уравнений (16) ищем в виде

$$D_{nq}(\alpha) = c_{nq} J_0(\alpha l) (n-q) (-1)^n + \int_0^l \sqrt{\xi} \theta_{nq}(\xi) J_0(\alpha \xi) d\xi, \quad (17)$$

где $J_0(\alpha)$ — цилиндрическая функция первого рода, c_{nq} — неизвестные постоянные, θ_{nq} — искомые функции. Подставив выражение (17) в формулу (16), получим уравнения Абея, решая которые приходим к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода:

$$\theta_{nq}(x) - \int_0^l \theta_{nq}(\varepsilon) K_n(x, \varepsilon) d\varepsilon = P_{nq}(x), \quad (18)$$

$$K_n(x, \varepsilon) = \sqrt{x\varepsilon} \int_0^{\infty} \alpha X_n(\alpha) J_0(\alpha x) J_0(\alpha \varepsilon) d\alpha, \quad X_n = \frac{(1-\gamma^2) F(\alpha)}{\alpha y_n(\alpha)} - 1,$$

$P_{1q}(x) = -\sqrt{x} J_0(\tau x) E_1 \tau^{q-2} + c_{1q} K_1(l, x) (q-1)$, $q=1, 2$, $P_{2q}(x) = -\sqrt{x} J_0(\tau x) \cdot E_2 \tau^{1-q} + c_{2q} K_2(l, x) (2-q)$. Решения уравнений (18) ищем в виде ряда по

полиномам Лежандра $P_m(1-2x^2)$ с неизвестными коэффициентами $d_{nq}^{(m)}$:

$$\theta_{nq}(x_1) = \sum_{m=0}^{\infty} d_{nq}^{(m)} \sqrt{2(2m+1)} x_1 P_m(1-2x_1^2), \quad x_1 = x/l. \quad (19)$$

Подставив это выражение в формулу (18), получим четыре бесконечные системы линейных алгебраических уравнений, каждая из которых решается независимо от остальных

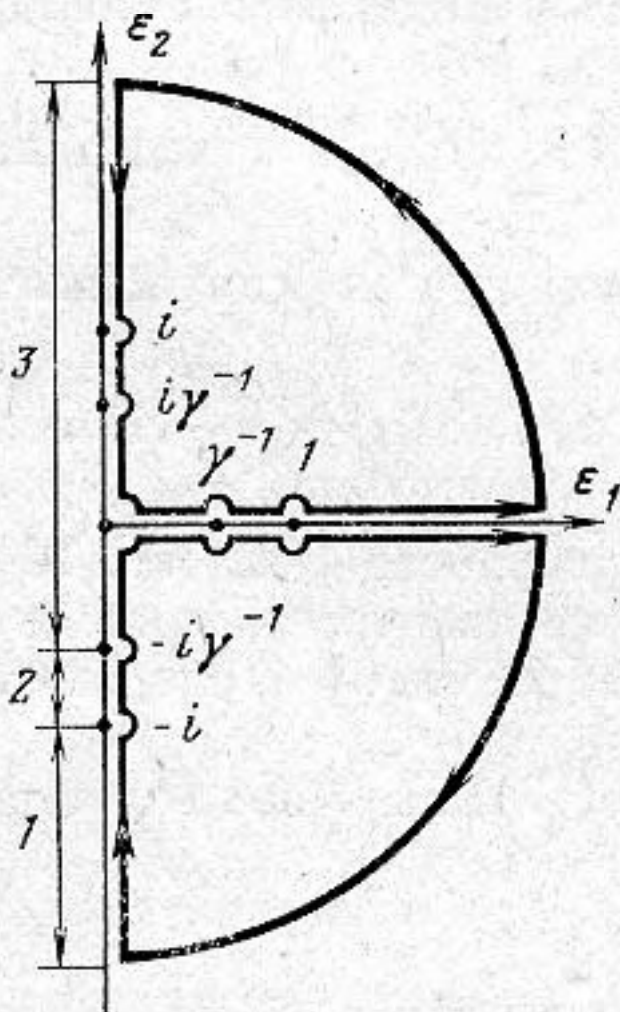
$$d_{nq}^{(p)} - \sum_{m=0}^{\infty} c_{nq}^{(m,p)} d_{nq}^{(m)} = N_{nq}^{(p)}, \quad n, q = 1, 2; \quad (20)$$

$$p = 0, 1, 2, \dots,$$

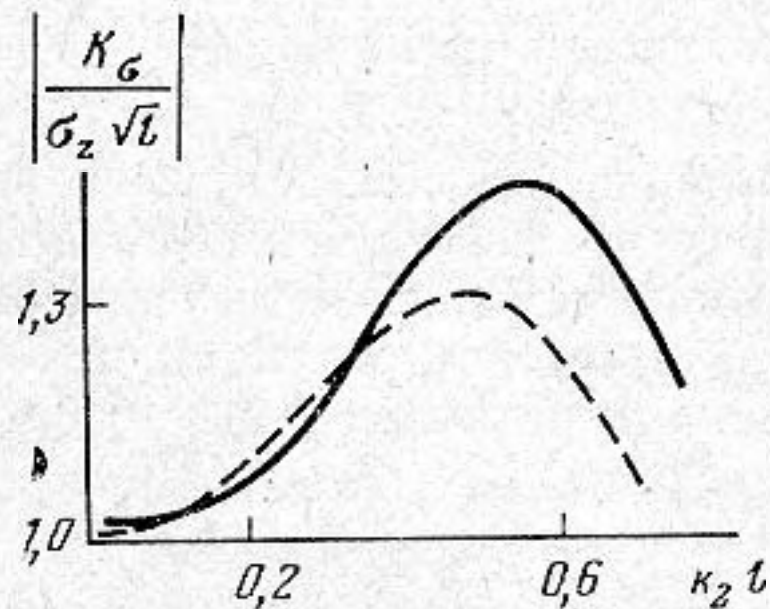
$$c_{nq}^{(m,p)} = 2\sqrt{2(2m+1)(2p+1)} \int_0^{\infty} X_n(\alpha) J_{2m+1}(\alpha l) J_{2p+1}(\alpha l) \alpha^{-1} d\alpha, \quad (21)$$

$$N_{nq}^{(p)} = -\frac{J_{2p+1}(\tau l) E_n}{l \tau^{6-3(n+p)+2np}} + (q-1)^{2-n} \frac{2c_{nq}}{l} \sqrt{2p+1} \int_0^{\infty} X_n(\alpha) J_0(\alpha l) J_{2p+1}(\alpha l) d\alpha.$$

Для оценки коэффициентов $c_{nq}^{(m,p)}$ воспользуемся методом контурного



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Контур интегрирования в комплексной плоскости $\zeta = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$ при вычислении интеграла (21). Цифрами 1, 2, 3 обозначены интервалы $(-i\infty, i)$, $(-i, -i\gamma^{-1})$, $(-i\gamma^{-1}, \infty)$ соответственно. На первом интервале радикалы $\delta_n = \sqrt{\varepsilon_2^2 + \gamma^{2(n-2)}} > 0$, на третьем $\delta_n < 0$, а на втором $\delta_1 < 0$, $\delta_2 > 0$

Фиг. 2. График зависимости безразмерного коэффициента интенсивности $|K_\sigma(\sigma_z \sqrt{l})|^{-1}$ от нормализованного волнового числа $k_2 l$. При этом $\sigma_z = |\mu(0) A_1 G_1|$, $\varphi_1 = 0$, $b/2k_2 = 0,8$, $\nu = 0,25$, $g_1 = g_2 = b/2$. Пунктирная кривая описывает ту же зависимость для однородной среды

интегрирования многозначных функций в комплексной α -плоскости. Используем следующие зависимости между цилиндрическими функциями:

$$2J_n(\alpha) = H_n^{(1)}(\alpha) + H_n^{(2)}(\alpha); \quad J_n(i\alpha) = e^{n\pi i/2} I_n(\alpha); \quad \text{Im } \alpha = 0,$$

$$H_n^{(1)}(i\alpha) = \frac{2}{\pi i} e^{-n\pi i/2} K_n(\alpha); \quad H_n^{(2)}(-\alpha) = H_n^{(1)}(\alpha); \quad n = 2k+1,$$

где $H_n^{(1)}(\alpha)$, $H_n^{(2)}(\alpha)$ — функции Ханкеля первого и второго рода, $K_n(\alpha)$, $I_n(\alpha)$ — цилиндрические функции третьего рода. В интеграле (21) переходим к новой переменной $\zeta = \alpha k_2^{-1}$, слагаемые с функцией $H_n^{(1)}$ интегри-

руем по контуру, расположенному в первом квадранте, слагаемые с функцией $H_n^{(2)}(\alpha)$ — по контуру в четвертом квадранте (фиг. 1). Точки ветвления $\pm\gamma^{-1}i$, $\pm i$ на мнимой оси и γ^{-1} , 1 на действительной оси, а также полюс в начале координат обходятся по дугам малых окружностей. Можно показать, что функции $y_n(\xi)$ при $g_1(0)$, $\varepsilon(0) < 0$, $q_2(0) > 0$ имеют корни с отрицательной действительной частью, а потому внутри контуров нет особенностей. Следовательно, интегралы по обоим контурам равны нулю. Из леммы Жордана, которая здесь применима, следует, что интегралы по дуге большой окружности стремятся к нулю, когда радиус окружности стремится к бесконечности. Поэтому интегралы по действительной полуоси равны интегралам по мнимым полуосям, взятым с обратным знаком. Вклады по дугам окружностей, обходящим точки ветвления, равны нулю, а вычеты в полюсе взаимно уничтожаются. Складывая результаты интегрирования по мнимым полуосям, выразим коэффициенты $c_{nq}^{(m,p)}$ через сумму двух интегралов по интервалам $(0, \gamma^{-1})$, $(\gamma^{-1}, 1)$. Применяя к последнему теорему о среднем значении и опустив постоянные множители, по модулю не превосходящие единицы, получим

$$|c_{nq}^{(m,p)}| < 2\sqrt{(2m+1)(2p+1)} I_{2m+1}(\xi_1) K_{2p+1}(\xi_1), \quad \xi_1 = k_2 \xi l,$$

где ξ вещественно и берется из интервала $(0, \infty)$, что позволяет заменить два слагаемых одним выражением. При $m < p$ индексы в цилиндрических

функциях следует поменять местами. Ряд $\sum_{m=0}^{\infty} |c_{nq}^{(m,p)}|$ сходится, ибо его

остаток, начиная с $(p+1)$ -го члена, мажорируется сходящимся рядом

с положительными членами [10]: $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 I_{n+1}(\alpha) = \frac{\alpha e^\alpha}{2}$. Используя да-

лее рассуждения, подобные примененным в работе [11, стр. 70], приходим к выводу, что все системы (20) являются квазирегулярными с известными ограничениями на частоту колебаний [12, гл. 6] и, следовательно, их можно решить методом редукции.

Подставив выражение (19) в формулу (17), выразим D_{nq} через коэффициенты $\bar{d}_{nq}^{(m)}$:

(22)

$$D_{nq}(\alpha) = c_{nq} J_0(\alpha l) (n-q) (-1)^n + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{2m+1} \bar{d}_{nq}^{(m)} J_{2m+1}(\alpha l).$$

Применив здесь при $q=1$ косинус-преобразование и интегрируя результат для $n=2$, получим смещения берегов щели, когда потенциалы падающих волн четны по x :

$$u_z(x, 0) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{d}_{11}^{(m)}}{\sqrt{2m+1}} T_{2m+1}(\sqrt{1-x_1^2}), \quad x = x/l,$$

$$u_x(x, 0) = \frac{2}{\pi} c_{21} \arcsin \frac{x}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{d}_{21}^{(m)}}{\sqrt{2m+1}} \int_0^1 T_{2m+1}(\sqrt{1-\xi^2}) d\xi,$$

где $T_m(x)$ — полиномы Чебышева первого рода. Из условия $u_x(l) = 0$ находим постоянную c_{21} :

$$c_{21} = \frac{2l}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{d}_{21}^{(m)}}{\sqrt{2m+1}} \int_0^1 T_{2m+1}(\sqrt{1-\xi^2}) d\xi. \quad (23)$$

Аналогично поступая в случае падения нечетных потенциалов, находим постоянную c_{12} :

$$c_{12} = \frac{2l}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_{12}^{(m)}}{\sqrt{2m+1}} \int_0^1 T_{2m+1}(\sqrt{1-\xi^2}) d\xi. \quad (24)$$

Из выше изложенного следует, что искомые потенциалы рассеянных волн имеют вид

$$\Psi_1^{(q)} = \int_0^{\infty} \left[-\frac{D_{1q}\psi_{22}(\alpha)}{y_1(\alpha)\alpha^{q-1}} \mp \frac{D_{2q}\psi_{12}(\alpha)}{y_2(\alpha)\alpha^{2(2-q)}} \right] \begin{pmatrix} \cos \alpha x \\ \sin \alpha x \end{pmatrix} \Phi_{1s}(\alpha, z) d\alpha, \quad (25)$$

$$\Psi_2^{(q)} = \int_0^{\infty} \left[\mp \frac{D_{1q}\psi_{21}(\alpha)}{y_1(\alpha)\alpha^{q-1}} - \frac{D_{2q}\psi_{11}(\alpha)}{y_2(\alpha)\alpha^{3-q}} \right] \begin{pmatrix} \cos \alpha x \\ \sin \alpha x \end{pmatrix} \Phi_{2s}(\alpha, z) d\alpha,$$

где $q=1$ отвечает четным потенциалам, $q=2$ — нечетным, верхний знак отвечает полупространству $z>0$, а D_{nq} определены в (22). Легко убедиться, что смещения, найденные по потенциалам (25), являются ограниченными для всех x и z .

Найдем коэффициенты интенсивности напряжений при падении четных потенциалов. Для этого используем выражение $F(\alpha) D_{n1}(\alpha) (\alpha y_n(\alpha))^{-1}$, которое при $n=1$ является трансформантой нормального, а при $n=2$ — касательного напряжений. Подставив сюда (22) при $q=1$, получим для $n=1$

$$\sigma_{zs}(x, 0) = \mu(0) \sum_{m=0}^{\infty} d_{11}^{(m)} \int_0^{\infty} F(\alpha) (y_1(\alpha)\alpha)^{-1} J_{2m+1}(\alpha l) \cos \alpha x d\alpha.$$

Для выделения сингулярной части нормального напряжения разложим множитель $F(\alpha) (y_1(\alpha)\alpha)^{-1}$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки, и убедившись, что только первое слагаемое этого разложения вносит вклад в сингулярную часть, получим для нее такое выражение

$$\mu(0) \sum_{m=0}^{\infty} d_{11}^{(m)} \int_0^{\infty} J_{2m+1}(\alpha l) \cos \alpha x d\alpha = \frac{\mu(0)l^2}{\sqrt{x^2-l^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m d_{11}^{(m)} l^{2m}}{(|x| + \sqrt{x^2-l^2})^{2m+1}}. \quad (26)$$

Отсюда находим искомый коэффициент интенсивности нормальных напряжений

$$K_{\sigma} = \frac{\mu(0)}{\pi} \sqrt{l} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m d_{11}^{(m)}.$$

Сингулярная часть касательного напряжения определяется выражением

$$\mu(0) c_{21} \int_0^{\infty} J_0(\alpha l) \sin \alpha x d\alpha = \mu(0) c_{21} (x^2-l^2)^{-1/2}.$$

Отсюда следует, что коэффициент интенсивности касательных напряжений равен $\mu(0) c_{21} (2l)^{-1/2}$, где c_{21} определено в (23).

На фиг. 2 представлен график зависимости величины $K_{\sigma}(\sigma_z \sqrt{l})^{-1}$, взятой по модулю, от нормализованного волнового числа для нормально падающей продольной волны четной по x в среде, описанной в первой колонке таблицы. Безразмерный параметр $b/2k_2$ принят равным 0,8, остальные параметры неоднородности среды равны нулю, а коэффициент Пуассона $\nu=0,25$. При этом решения уравнений движения становятся точными. Пунктирная кривая является графиком той же зависимости для однородной среды [1].

В заключение заметим, что метод сведения рассмотренной задачи к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений является эффективным при низкочастотных колебаниях. Высокочастотный диапазон колебаний можно рассмотреть методом Винера — Хопфа. При этом можно показать, что если выполняются неравенства $\omega^2 v_2^{-2}(z) \gg (\gamma^2(z) - 1) g_1'(z) + \mu'(z) \mu^{-1}(z) g_1(z)$, $\omega^2 v_2^{-2}(z) |g_1(z) - \rho'(z) \rho^{-1}(z)| \gg g_1''(z) - \mu''(z) \mu^{-1}(z) \cdot g_1(z)$, то вторым уравнением (2) можно пренебречь. Следовательно, три функции $\mu(z)$, $\rho(z)$, $v(z)$ будут связаны только одним дифференциальным уравнением.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sih G. C., Loeber J. F.* Wave propagation in an elastic solid with a line of discontinuity or finite crack.— *Quart. appl. Math.*, 1969, v. 27, № 2, p. 193–213.
2. *Alverson R. C., Gair F. C., Hook J. F.* Ancoupled equations of motion nonhomogeneous elastic media.— *Bulletin Seismol. Soc. America*, 1963, v. 53, № 5, p. 1023–1030.
3. *Hook J. F.* Determination of inhomogeneous media for which the vector wave equation of elasticity is separable.— *Bulletin Seismol. Soc. America*, 1965, v. 55, № 6, p. 975–987.
4. *Hook J. F.* Contributions to a theory of separability of the vector wave equation of elasticity for inhomogeneous media.— *J. acoust. Soc. America*, 1962, v. 34, № 7, p. 946–953.
5. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
6. *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. Киев: Наукова думка, 1966.
7. *Найфе А. Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976.
8. *Олвер Ф.* Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978.
9. *Хединг Д.* Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). М.: Мир, 1965.
10. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1966.
11. *Сеймов В. М.* Динамические контактные задачи. Киев: Наукова думка, 1976.
12. *Гринченко В. Т.* Равновесие и установившиеся колебания тел конечных размеров. Киев: Наукова думка, 1978.

Харьковский политехнический институт
им. В. И. Ленина, Сумский филиал

Поступила в редакцию
26.VI.1980
после исправления
1.II.1982