

УДК 534.539.3

**ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ТРЕЩИН ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ**

*Назаренко А. М., Фильштинский Л. А.*

Предложена схема анализа волновых полей напряжений продольного сдвига в полупространстве, ослабленном криволинейными туннельными трещинами. Задача эквивалентна дифракции световых волн на периодической системе криволинейных экранов в полуплоскости. Приведен расчет динамических коэффициентов интенсивности напряжений.

Динамическая задача теории упругости для прямолинейных туннельных разрезов в условиях антиплоской деформации рассматривалась в работах [1–4]; было дано обобщение на случай криволинейных разрезов [5].

В настоящей работе дается решение задачи для полупространства с периодическими криволинейными туннельными трещинами продольного сдвига.

Рассмотрим упругостное полупространство  $y \geq 0$ , ослабленное  $2L$  – периодической системой не выходящих на границу  $y=0$  криволинейных туннельных вдоль оси  $Oz$  разрезов  $l_j = l \pmod{2L}$  (фиг. 1.) Пусть из бесконечности излучается монохроматическая волна сдвига ( $\omega$  – круговая частота,  $\gamma_2$  – волновое число,  $\tau$  – амплитуда падающей волны)

$$w_0 = \text{Re} \{ W_0 \exp(-i\omega t) \}, \quad W_0 = \tau \exp(-i\gamma_2 y), \quad (1)$$

а к берегам разрезов приложена гармоническая во времени нагрузка  $X_n^\pm = Y_n^\pm = 0, Z_n^\pm = \text{Re} \{ Z^\pm \exp(-i\omega t) \}$ , причем  $Z^+ = -Z^- = Z$ .

Будем предполагать, что  $l$  – простая разомкнутая дуга с началом в точке  $a$  и концом в точке  $b$ , кривизна которой, так же как и  $Z$ , есть функция класса  $H$  на  $l$  (удовлетворяет условию Гельдера [6]). В этих условиях возникает сингулярное  $2L$  – периодическое волновое поле напряжений продольного сдвига  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ .

Суммарное волновое поле в области, занятой средой, зададим следующим образом:

$$w(x, y, t) = \text{Re} \{ (W + W_0) \exp(-i\omega t) \}, \quad (2)$$

где  $W$  – комплексная функция, характеризующая поле возмущений и удовлетворяющая уравнению Гельмгольца:

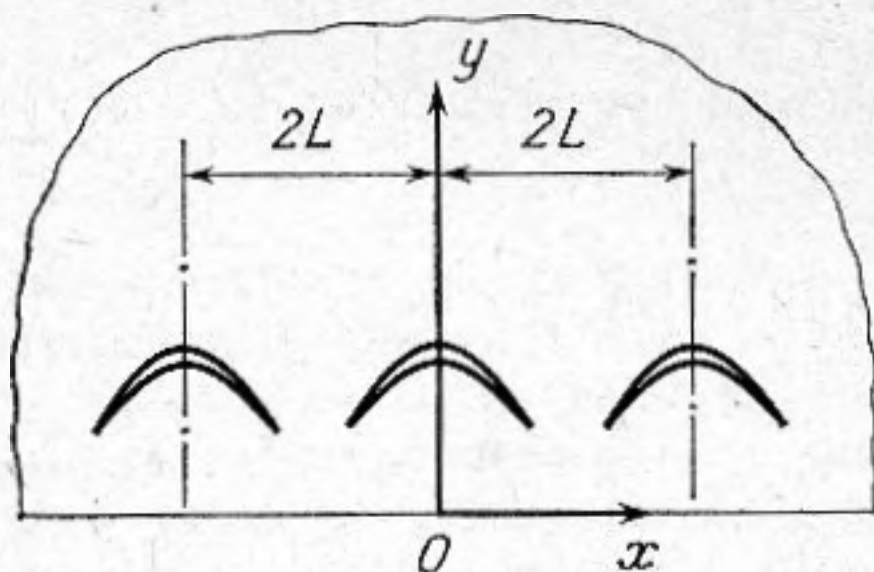
$$\nabla^2 W + \gamma_2^2 W = 0. \quad (3)$$

Напряжения продольного сдвига выражаются через смещения  $w$  в виде ( $\mu$  – модуль сдвига)

$$\tau_{xz} = \mu \partial w / \partial x, \quad \tau_{yz} = \mu \partial w / \partial y. \quad (4)$$

С учетом (4) граничные условия на берегах разрезов представим так:

$$\mu (\partial w / \partial n)^\pm = \pm Z^\pm. \quad (5)$$



Фиг. 1. Периодическая система криволинейных разрезов в полупространстве  $y \geq 0$



Если пространство закреплено, то условие на границе имеет вид

$$w|_{y=0} = 0. \quad (6)$$

Для свободного от сил полупространства имеем

$$\tau_{yz}|_{y=0} = \mu \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0. \quad (7)$$

Для решения краевой задачи представим амплитуду возмущенной волны в виде

$$W(x, y) = \frac{1}{2} \int_l p(\xi) \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon(z-\xi) - A \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \varepsilon(z-\bar{\xi}) \right] d\xi - \left[ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \varepsilon(z-\xi) - A \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon(z-\bar{\xi}) \right] d\bar{\xi} \right\} - AW_1, \quad (8)$$

$W_1 = \tau \exp(i\gamma_2 y)$ ,  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$ ,  $\xi = \xi + i\eta$ ,  $\bar{\xi} = \xi - i\eta$ ,  $\xi \in l$ . Здесь  $A = -1$  для свободного и  $A = 1$  для закрепленного полупространства,  $p(\xi)$  — искомая плотность. Функция  $\varepsilon(z) - 2L$  — периодическое фундаментальное решение уравнения (3), которое построено при помощи разложения в ряд Фурье по координате  $x$  с последующим интегральным преобразованием Фурье по координате  $y$  в классе  $D'$  функций медленного роста [7].

Это фундаментальное решение имеет вид

$$\varepsilon(z) = \frac{1}{2L} \sum'_{k=-\infty}^{\infty} b_k(y) \exp(i\alpha_k x), \quad (9)$$

$$b_k(y) = -\frac{1}{2|r_k|} \exp(-|r_k y|) \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots), \quad \alpha_k = \pi k/L, \quad r_k^2 = \alpha_k^2 - \gamma_2^2. \quad \text{Здесь}$$

штрих над суммой означает, что член при  $k=0$ , дающий ограниченное решение уравнения (3) и не затухающий при  $|y| \rightarrow \infty$ , следует отбросить;  $\alpha_k$  — точки скольжения [8]. Представление (8) удовлетворяет уравнению Гельмгольца (3) и условиям на границе полупространства (6) или (7). Кроме того,  $W - 2L$  — периодическая функция, экспоненциально затухающая при  $|y| \rightarrow \infty$ .

Для удобства последующих выкладок выделим главную часть  $\varepsilon_0$  функции (9), соответствующую  $2L$  — периодическому фундаментальному решению уравнения Лапласа. Имеем

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_*, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(z) &= \frac{1}{4\pi} \ln \sin \frac{\pi z}{2L} \cdot \sin \frac{\pi \bar{z}}{2L} - \frac{|y|}{4L} + \frac{\ln 2}{2\pi}, \quad \varepsilon_*(z) = \\ &= -\frac{1}{4L} \sum'_{k=-\infty}^{\infty} f_k(y) \exp(i\alpha_k x), \quad f_k(y) = \frac{1}{|r_k|} \exp(-|r_k y|) - \frac{1}{|\alpha_k|} \exp(-|\alpha_k y|). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что  $\varepsilon(z)$  в любой точке  $z \neq 2kL$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) удовлетворяет уравнению (3), а в точках приложения сосредоточенного функционала обладает характеристической особенностью  $\ln r$ . Общий член ряда для  $\varepsilon_*$  затухает как  $k^{-3}$ .

Покажем, что интегральное представление (8) обеспечивает разрыв перемещений на  $l$ . Для этого запишем  $W$  в виде

$$W(x, y) = \frac{i}{8L} \int_l p(\xi) [h(z, \xi) + H(z, \xi)] ds - AW_1, \quad (11)$$



$$h(z, \zeta) = \text{Im} \left\{ \left[ \text{ctg} \frac{\pi(z-\zeta)}{2L} - A \text{ctg} \frac{\pi(\bar{z}-\zeta)}{2L} \right] \exp(i\varphi) \right\},$$

$$H(z, \zeta) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \{ [f_k'(y-\eta) + Af_k'(y+\eta)] \cos \varphi \cos \alpha_k(x-\xi) + \alpha_k [f_k(y-\eta) - \\ - Af_k(y+\eta)] \sin \varphi \sin \alpha_k(x-\xi) \} + \cos \varphi [\text{sign}(y-\eta) + A], \quad f_k'(y) = df_k/dy, \\ f_k''(y) = d^2f_k/dy^2.$$

Здесь  $\varphi$  — угол между касательной к  $l$  в точке  $\zeta$  и осью  $Ox$ .

Переходя в (11) к предельным значениям при  $z \rightarrow \zeta_0 \in l$ , находим скачок смещений  $w$  на  $l$ :

$$\Delta w = w^+ - w^- = \frac{1}{2} \text{Im} \{ p(\zeta) \exp(-i\omega t) \}. \quad (12)$$

Отсюда следует, что

$$p(a) = p(b) = 0. \quad (13)$$

На основании (13) будем предполагать, что  $p(\zeta)$  — функция класса  $H$ , исчезающая на концах дуги  $l$ .

Для вывода интегрального уравнения краевой задачи вычислим нормальную производную от  $W$ ; полученное выражение с учетом (13) проинтегрируем по частям и затем перейдем к предельным значениям при  $z \rightarrow \zeta_0 \in l$ . В результате получим

$$\int_l [g(\zeta_0, \zeta) + G(\zeta_0, \zeta)] dp(\zeta) + \int_l G_*(\zeta_0, \zeta) p(\zeta) ds = N(\zeta_0), \quad (14)$$

$$g(\zeta_0, \zeta) = \text{Re} \{ \exp(i\varphi_0) / (\zeta - \zeta_0) \},$$

$$G(\zeta_0, \zeta) = -\frac{\pi}{2L} \text{Re} \left\{ \exp(i\varphi_0) \left[ \text{ctg} \frac{\pi(\zeta_0 - \zeta)}{2L} - \frac{2L}{\pi(\zeta_0 - \zeta)} + A \text{ctg} \frac{\pi(\zeta_0 - \bar{\zeta})}{2L} \right] \right\},$$

$$G_*(\zeta_0, \zeta) = -\frac{\pi}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \{ [f_k''(\eta_0 - \eta) + Af_k''(\eta_0 +$$

$$+ \eta)] \cos \varphi \cos \varphi_0 - \alpha_k^2 [f_k(\eta_0 - \eta) - Af_k(\eta_0 + \eta)] \sin \varphi \sin \varphi_0 \} \cos \alpha_k(\xi_0 - \xi) +$$

$$+ \alpha_k [f_k'(\eta_0 - \eta) \sin(\varphi_0 + \varphi) + Af_k'(\eta_0 + \eta) \sin(\varphi_0 - \varphi)] \sin \alpha_k(\xi_0 - \xi),$$

$$N(\zeta_0) = -4\pi iz/\mu - 4\pi\gamma_2 \cos \varphi_0 (W_0 + AW_1), \quad \varphi_0 = \varphi(\zeta_0).$$

Здесь  $p(\zeta)$  — искомая функция, ядро  $g(\zeta_0, \zeta)$  — сингулярно [5], ядро  $G(\zeta_0, \zeta)$  — непрерывно, а  $G_*(\zeta_0, \zeta)$  при  $\eta = \eta_0$  имеет особенность типа  $\ln |\xi_0 - \xi|$ .

Таким образом, рассматриваемая краевая задача сводится к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению (14). Для замыкания алгоритма к нему необходимо добавить дополнительное условие, вытекающее из (13):

$$\int_l p'(\zeta) d\zeta = 0. \quad (15)$$

Решение  $p'(\zeta)$  уравнения (14) будем разыскивать в классе функций, не ограниченных на концах разреза.

Определим сингулярную часть волнового поля напряжений продольного сдвига  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  в окрестности вершин трещины. Для этого перейдем к пара-



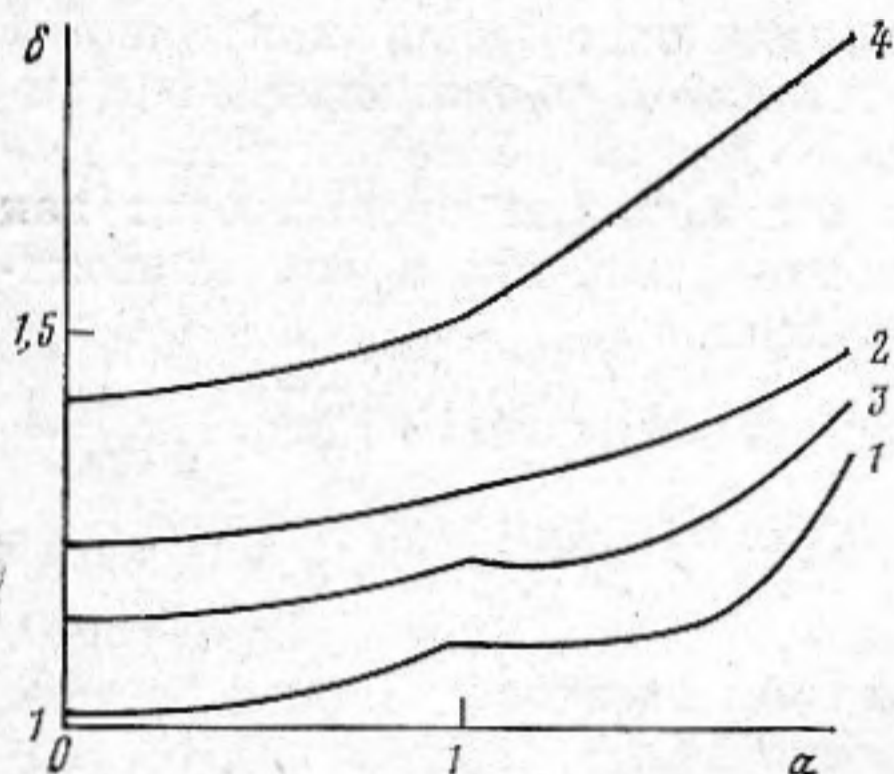
метрическому заданию контура  $\xi = \xi(\beta)$ ,  $-1 \leq \beta \leq 1$ . В соответствии с этим положим  $p'(\xi) = \Omega_0(\beta) / \xi'(\beta) \sqrt{1-\beta^2}$ , где  $\Omega_0(\beta)$  — функция класса  $H$  на  $l$ .

Вычисляя асимптотические значения полученных обобщенных интегралов типа Коши в окрестности вершин разреза [6], получаем сингулярные части волнового поля напряжений

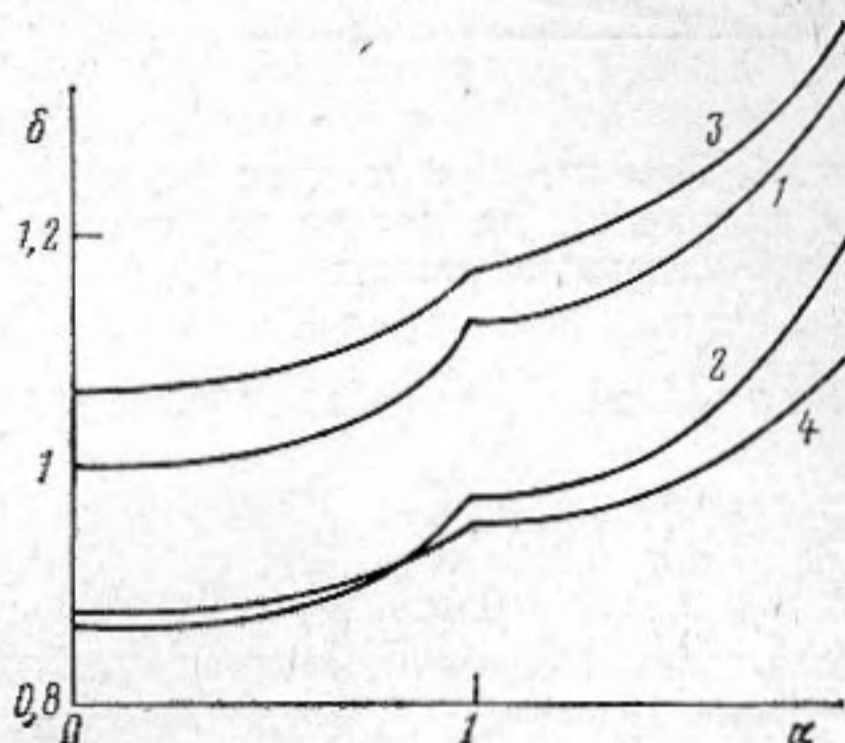
$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = \mp \frac{\mu \exp(-i\varphi_c/2) \operatorname{Im}\{\exp(-i\omega t) \Omega_0(\pm 1)\}}{4\sqrt{2s'(\pm 1)}\sqrt{\mp(z-c)}}, \quad (16)$$

$$s'(\pm 1) = (ds/d\beta)|_{\beta=\pm 1}.$$

Здесь верхний знак относится к концу трещины  $c=b$ , нижний — к началу  $c=a$ ,  $\varphi_c = \varphi(\xi)$  при  $\xi=c$ .



Фиг. 2. Изменение величины  $\delta$  в свободном полупространстве для прямолинейной и параболической трещины



Фиг. 3. Зависимость  $\delta = \delta(\alpha)$  для прямолинейной и параболической трещины в закрепленном полупространстве

В частности, сингулярная часть сдвигового напряжения  $\tau_n$  на продолжении за вершину трещины имеет вид

$$\tau_n = \frac{\mu}{4\sqrt{2rs'(\pm 1)}} \operatorname{Im}\{\exp(-i\omega t) \Omega_0(\pm 1)\}, \quad (17)$$

где  $r$  — расстояние от рассматриваемой точки до вершины  $c$ .

Из формул (16) и (17) видно, что максимальные сдвиговые напряжения имеют место на продолжении трещины за вершину, следовательно, трещина может распространяться только вдоль гладкой траектории. С учетом (17) находим динамический коэффициент интенсивности напряжений [3]

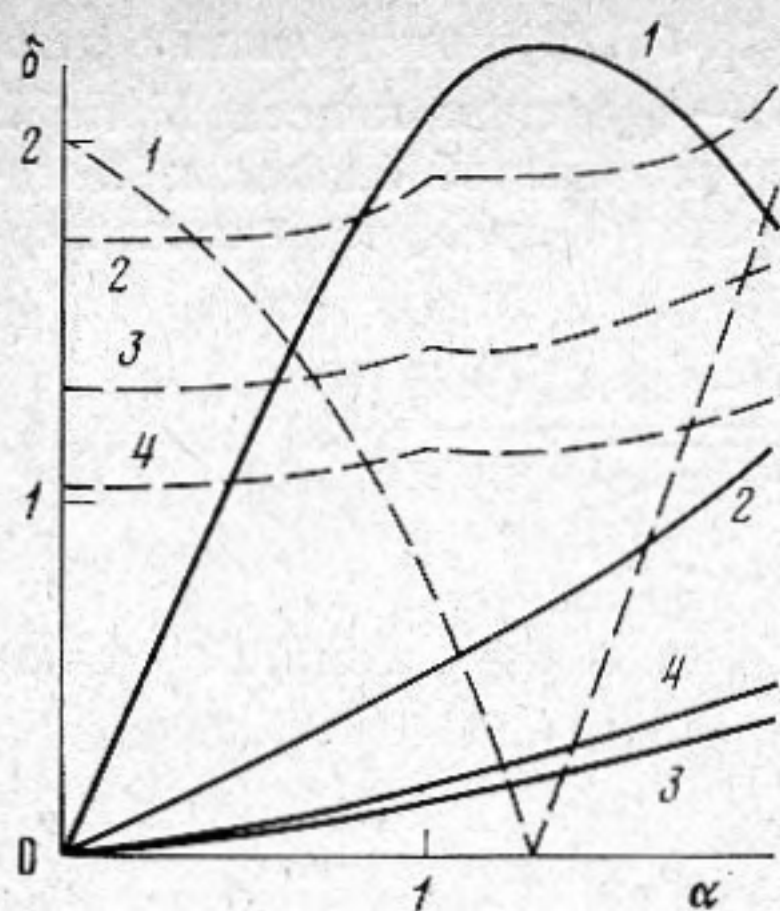
$$K_3 = \sqrt{2\pi r} \tau_n = \frac{\mu}{4} \sqrt{\pi/s'(\pm 1)} \operatorname{Im}\{\exp(-i\omega t) \Omega_0(\pm 1)\}. \quad (18)$$

Численная реализация интегрального уравнения (14) была проведена по схеме типа Мультиппа [9]. Интегральное уравнение (14) сводилось к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений функции  $\Omega_0(\beta)$  в чебышевских узлах интерполяции. Расчеты проводились на ЭВМ ЕС-1022. Принималось, что трещина представляет собой дугу параболы, параметрическое уравнение которой имеет вид  $\xi = p_1\beta$ ,  $\eta = p_2 + p\beta^2$ ,  $-1 \leq \beta \leq 1$ .

На фиг. 2, 3 представлены результаты расчетов величины  $\delta = \mu |\Omega_0(1)| / 4Z\sqrt{ls'(1)}$  в функции от  $\alpha = L\gamma_2/\pi$  при  $\lambda = \pi l/L = 0,4$ ,  $p_1 = 1$ ,  $\tau = 0$ ,  $Z \neq 0$ .

На фиг. 2 показано изменение величины  $\delta$  для свободного от сил полупространства ( $A = -1$ ), на фиг. 3 — для закрепленного полупространства ( $A = 1$ ). Кривые 1, 2 отвечают прямолинейной трещине ( $p = 0$ ) при  $p_2 = 3$  и 0,5 соответственно. Кривые 3, 4 построены для параболической трещины,





Фиг. 4. Кривые  $\delta = \delta(\alpha)$  для случая падающей на разрез гармонической волны

вогнутой в сторону границы полупространства ( $p = -1$ ) при  $p_2 = 3$  и  $1,5$  соответственно.

Коэффициент интенсивности  $K_3$  выражается через  $\delta$  следующим образом:  $K_3 = Z\sqrt{\pi l} \delta \cos \omega t$ .

Результаты расчетов подтверждают аномальные явления, отмеченные в работах [4, 8] в окрестности точки скольжения  $\alpha = 1$  ( $\gamma_2 = \pi/L$ ). Наиболее сильно они проявляются для прямолинейной трещины в свободном полупространстве, когда эта трещина сравнительно удалена от границы. С приближением трещины к границе или с искривлением ее аномальные эффекты затухают. Для закрепленного полупространства эти эффекты проявляются как для прямолинейных, так и для криволинейных трещин.

На фиг. 4 представлены результаты расчетов величины  $\delta = \sqrt{2r\tau_n} / \sqrt{l}\tau_{23}^{\max} = \Omega_0(1) / 4\gamma_2\tau \sqrt{ls'(1)} (\tau_{23}^{\max} = \tau\gamma_2\mu - \text{максимальное напряжение в падающей волне})$  в зависимости от  $\alpha = L\gamma_2/\pi$  при  $\lambda = \pi l/L = 0,4$ ,  $p_1 = 1$ ,  $Z = 0$ ,  $\tau \neq 0$ . Сплошные кривые отвечают свободному от сил полупространству ( $A = -1$ ), штриховые — закрепленному полупространству ( $A = 1$ ). Кривые 1—4 построены для тех же параметров и в том же соответствии, что на фиг. 2, 3.

Коэффициенты интенсивности напряжений для рассматриваемых случаев имеют вид  $K_3 = \tau_{23}^{\max} \sqrt{\pi l} \delta \cos \omega t$  в случае полупространства, свободного от сил и  $K_3 = \tau_{23}^{\max} \sqrt{\pi l} \delta \sin \omega t$  для закрепленного полупространства.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бородачев Н. М. Динамическая задача о трещине в случае деформации продольного сдвига. — Проблемы прочности, 1973, № 4, с. 23—25.
2. Паргон В. З., Морозов Е. М. Механика упруго-пластического разрушения. М.: Наука, 1974, с. 416.
3. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974, с. 640.
4. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. Киев: Наукова думка, 1978, с. 307.
5. Фильштинский Л. А. Динамическая задача теории упругости для области с криволинейными разрезами (деформация продольного сдвига) — Докл. АН СССР, 1977, т. 236, № 6, с. 1327—1330.
6. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968, с. 511.
7. Бремерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М.: Мир, 1968, с. 276.
8. Wood R. W. Anomalous diffraction drating. — Phys. Rev., 1935, № 48, p. 928—933.
9. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973, с. 304.

Харьковский политехнический институт им. В. И. Ленина  
Сумский филиал

Поступила в редакцию  
9.III.1981  
после исправления  
26.II.1982