АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXIX 1983 Вып. 3

УДК 551.510

РАССЕЯНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА СЛУЧАЙНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ АТМОСФЕРНОГО ТУМАНА

Розенфельд С. Х.

Рассчитано эффективное сечение рассеяния звука слышимых частот случайными неоднородностями атмосферного тумана. Выявлены особенности частотно-углового распределения рассеянного излучения. Результаты могут быть использованы для количественной диагностики атмосферных туманов.

Акустическое зондирование атмосферы расширяет сферу своего применения. Известны основополагающие эксперименты [1] по определению структурных постоянных турбулентности в приземном слое воздуха на основе изучения рассеяния звука. В настоящее время созданы устройства и методики, позволяющие определять на этой основе профили температуры и ветра на расстояниях до нескольких километров. Обзор основных методов зондирования можно найти в работе [2], а современное состояние отражено в работах [3, 4]. Актуальным является вопрос о возможностях акустической диагностики атмосферных гидрометеоров, в частности туманов. В некоторых случаях, например при оперативной оценке результатов искусственного воздействия на туман, акустическому методу трудно придумать какую-либо разумную альтернативу.

Между тем принципиальные основы, на которых можно было бы развивать соответствующие экспериментальные методы, далеко еще не сформировались. Попытка учесть влияние капельной жидкости на рассеяние звука содержится в работе [5]. В ней рассеяние трактуется как суперпозиция рассеяний от отдельных капель, каждое из которых описывается формулой Релея. Такой подход едва ли применим к туману, в котором более существенны не детали индивидуального акта рассеяния, а пространственные флуктуации параметров состояния тумана с характерными масштабами порядка длины звуковой волны. Даже и при наличии отдельных крупных капель, когда подход [5] имеет определенный смысл, нельзя игнорировать реакцию самих рассеивателей на звуковую волну, которая выражается в теплообмене капель с волной и захвате капель пульсациями скорости ([6, § 76]). Этим звуковые волны существенно отличаются от электромагнитных, и применимость формулы Релея нуждается в дополнительных обоснованиях.

В данной работе рассеяние звуковых волн на случайных неоднородностях тумана рассматривается с точки зрения общих подходов, развитых в теории распространения волн в случайно-неоднородных средах. Неоднородность тумана вызвана флуктуациями общего содержания капельной жидкости в единице объема (так называемой водности), а также изменениями от точки к точке спектра распределения капель по размерам. Основой гидродинамического описания такой среды являются уравнения [7]. Основным результатом работы является вычисление эффективного поперечника единицы рассеивающего объема.

Ход рассуждений данной работы полностью аналогичен тому, который принят в [8, гл. 2], где рассчитывается рассеяние звука на турбулентных пульсациях. Поэтому будем опускать промежуточные выкладки, выделяя лишь те места, которые специфичны для поставленной задачи.

Уравнения гидродинамики тумана, согласно [7], в линейном по акустическим величинам приближении имеют вид: уравнение неразрывности

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\rho_0}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{v}=0, \qquad (1)$$

уравнение движения среды

$$\rho_0\frac{\partial v_i}{\partial t}+\frac{\partial P_0}{\partial x_i}=\int\limits_0^\infty f(a)\frac{m(a)}{\tau(a)}(V_i-v_i). \qquad (2)$$

Уравнения движения капли радиуса a под действием стоксовой силы трения

$$\frac{dV_i}{dt}=\frac{1}{\tau_\eta}(v_i-V_i); \qquad \tau_\eta(a)=\frac{2}{9}\frac{\rho_{wt}a^2}{\eta}, \qquad (3)$$

уравнения притока тепла

$$\frac{\partial P_0}{\partial t}+\rho_0c_0^2\operatorname{div}v+(\gamma-1)\int\limits_0^\infty f(a)\,\frac{dQ(a)}{dt}=0, \qquad (4)$$

уравнение состояния

$$T_a=T_0(P_a/P_0-\rho_a/\rho_0). \qquad (5)$$

Здесь через $f(a)$ обозначена функция распределения капель по размерам, нормированная условием

$$\int\limits_0^\infty f(a)\,m(a)\,da=\rho_w, \qquad (6)$$

$m(a)$ — масса капли радиусом a; ρ_{wt} — плотность жидкости; ρ_w — масса всей капельной жидкости в единице объема газа-носителя (водность). Остальные обозначения стандартные: v_i — акустическая скорость (скорость среды полагается равной нулю); V_i — скорость капли; η — вязкость газа-носителя; $Q(a)$ — количество теплоты, содержащееся в капле. Индекс «O» относится к невозмущенному состоянию.

Если акустическая температура T_a меняется по гармоническому закону:

$$T_a=\operatorname{Re}\tilde{T}_a\exp(-i\omega t), \qquad (7)$$

то количество теплоты $Q(a)$ меняется по закону (см. [7])

$$Q(a,\ t)=({}^4/_3\pi a^3)\,c_{wt}\rho_{wt}(T_0+\operatorname{Re}\tilde{T}_a\tilde{S}\exp(-i\omega t)), \qquad (8)$$

c_{wt} — теплоемкость единицы массы капельной жидкости;

$$\tilde{S}=\tilde{S}(a,\omega)=\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^\infty\left[n^2+i\frac{\omega\tau_\chi}{2\pi^2}\right]^{-1}; \qquad \tau_\chi=\frac{2a^2}{\chi}, \qquad (9)$$

χ — температуропроводность жидкости.

Считая акустические величины периодическими функциями времени, находим уравнения для комплексных амплитуд:

$$-i\omega\tilde{P}_a+\rho_0c_0^2\partial\tilde{v}_i/\partial x_i-i\omega(\gamma-1)\tilde{T}_ac_w(\omega), \qquad (10)$$

$$-i\omega\rho_0\tilde{v}_i+\partial\tilde{P}_a/\partial x_i=i\omega\tilde{v}_i\rho_w(\omega), \qquad (11)$$

$$-i\omega\tilde{\rho}_a+\rho_0\partial\tilde{v}_i/\partial x_i=0, \qquad (12)$$

$$\tilde{T}_a=T_0(\tilde{P}_a/P_0-\tilde{\rho}_a/\rho_0). \qquad (13)$$

Здесь введены две вспомогательные величины: эффективная на частоте ω плотность массы аэрозоля:

$$\rho_w(\omega)=\int\limits_0^\infty f(a)\,m(a)\frac{da}{1-i\omega\tau_\eta(a)} \qquad (14)$$

и эффективная теплоемкость:

$$c_w(\omega)=c_{wt}\int_0^\infty f(a)\,m(a)\,\tilde{S}(a,\omega)\,da. \qquad (15)$$

Разрешая систему (10)–(13) относительно $\tilde{P}_a$, находим (далее тильду опускаем):

$$\frac{\omega^2}{c_0^2}P_a+\frac{\gamma(\omega)}{\gamma}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\rho_0}{\rho_0+\rho_w}\frac{\partial P_a}{\partial x_i}=0. \qquad (16)$$

Через $\gamma(\omega)$ обозначен эффективный показатель адиабаты:

$$\gamma(\omega)=(c_p+c_w(\omega))/(c_v+c_w(\omega)). \qquad (17)$$

Функция распределения капель по размерам, а также водность являются случайными функциями точки. Поэтому эффективные плотность $\rho_w(\omega)$ и теплоемкость $c_w(\omega)$ также являются случайными функциями точки. Обозначим средние по всему пространству эффективные плотность и теплоемкость через $\langle\rho_w(\omega)\rangle$ и $\langle c_w(\omega)\rangle$, а локальные отклонения от среднего через $\delta\rho_w(\omega)$ и $\delta c_w(\omega)$. Примем во внимание, что флуктуации $\delta\rho_w(\omega)$ и $\delta c_w(\omega)$ могут иметь те же порядки величин, что и соответствующие средние, а отношения c_w/c_p и ρ_w/ρ_0 даже для «тяжелых» туманов составляют не более 0,1%. С учетом этого уравнение (16) переписывается в линеаризованной форме:

$$\frac{\partial^2 P_a}{\partial x_i^2}+\frac{\omega^2}{\langle c^2(\omega)\rangle}P_a=\left[\frac{\delta c_w}{c_p}+(\gamma-1)\frac{\delta\rho_w}{\rho_0}\right]\frac{\partial^2 P_a}{\partial x_i^2}+\frac{\partial P_a}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\delta\rho_w}{\rho_0} \qquad (18)$$

Здесь через $\langle c^2(\omega)\rangle$ обозначен средний по пространству квадрат скорости звука на частоте ω:

$$\langle c^2(\omega)\rangle=c_0^2\left[1-(\gamma-1)\frac{\langle c_w\rangle}{c_p}-\frac{\langle\rho_w\rangle}{\rho_0}\right]. \qquad (19)$$

Если акустические возмущения давления представить как суперпозицию плоской волны:

$$P_0=A\exp(i\mathbf{kr});\; k^2=\omega^2/\langle c^2(\omega)\rangle \qquad (20)$$

и рассеянного излучения P_s, то в зоне дифракции Фраунгофера последнее выразится формулой

$$P_s(\mathbf{r})=-\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\int_V d\mathbf{r}'e^{-ik(\mathbf{nr}')}\left\{\left[\frac{\delta c_w}{c_p}+(\gamma-2)\frac{\delta\rho_w}{\rho_0}\right]\Delta P_0+\frac{\delta\rho_w}{\rho_0}ik\mathbf{n}\nabla P_0\right\}. \qquad (21)$$

Поток энергии рассеянного излучения, усредненный по периоду звуковой волны, равен:

$$\mathbf{S}=\frac{1}{4i\omega}\left(\frac{P_s^*}{\rho_0+\rho_w^*}\nabla P_s-\frac{P_s}{\rho_0+\rho_w}\nabla P_s^*\right)=\frac{1}{2\omega}\operatorname{Im}\left(\frac{P_s^*}{\rho_0+\rho_w^*}\nabla P_s\right). \qquad (22)$$

Вводя обозначение

$$\Delta(\mathbf{r},\mathbf{k})=\left[\frac{\delta c_w}{c_p}+(\gamma-2)\frac{\delta\rho_w}{\rho_0}\right]+\mathbf{n}\boldsymbol{\nu}\frac{\delta\rho_w}{\rho_0}, \qquad (23)$$

(22) можно преобразовать к виду

$$\mathbf{S}=\frac{A^2}{2\omega}\operatorname{Im}\frac{1}{16\pi^2r^2}e^{i(K-K^*)r}\frac{i\mathbf{n}k}{\rho_0+\rho_w}\int d\mathbf{r}'\int d\mathbf{r}''e^{i(\mathbf{Kr}''-\mathbf{K}^*\mathbf{r}')}k^4\Delta(\mathbf{r}')\Delta^*(\mathbf{r}''). \qquad (24)$$

В формулах (22), (23): $\mathbf{K}=\mathbf{k}-k\mathbf{n}$; $\mathbf{n}=\mathbf{r}/r$; $\boldsymbol{\nu}=\mathbf{k}/k$.

Скорость звука на частоте ω, введенная соотношением (19), является комплексной, а вместе с ней и волновой вектор k тоже является комплексным. Поэтому уравнение (23) описывает не только рассеяние звука на неоднородностях тумана, локализованных в объеме V, но также и поглощение звука. Произведение флуктуаций $\Delta(\mathbf{r}')\Delta^*(\mathbf{r}'')$ имеет второй порядок малости по величинам отношений $\delta c_w/c_p$ и $\delta\rho_w/\rho_0$, а поправки, связанные с поглощением и наличием ρ_w в знаменателе (24),— третий порядок малости. Ограничиваясь только главными членами, можно всюду заменить $\mathbf{k}$ на $\mathrm{Re}\,\mathbf{k}$ и получить

$$\mathbf{S}=\frac{1}{2\omega}\frac{\mathbf{n}}{16\pi^2r^2}k^5\frac{1}{\rho_0}\mathrm{Re}\int d\mathbf{r}'\int d\mathbf{r}''\Delta(\mathbf{r}')\Delta^*(\mathbf{r}'')e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}''-\mathbf{r}')}. \tag{25}$$

Усредним рассеянный поток энергии по множеству реализаций и будем предполагать, что в пределах рассеивающего объема поле флуктуаций $\delta\rho_w$ и δc_w является статистически однородным. Тогда ковариация флуктуаций имеет вид

$$Q(\mathbf{r}',\ \mathbf{r}'')=\langle\Delta(\mathbf{r}')\Delta^*(\mathbf{r}'')\rangle=Q(\mathbf{r}'-\mathbf{r}''), \tag{26}$$

а интеграл (25) приводится к стандартному виду

$$\langle\mathbf{S}\rangle=\frac{1}{2\omega}\frac{\pi}{2}\frac{V}{r^2}k^5\frac{\mathbf{n}}{\rho_0}\mathrm{Re}\,\Phi_Q(\mathbf{K});\quad \Phi_Q(\mathbf{K})=\frac{1}{8\pi^3}\int d\mathbf{q}Q(\mathbf{q})e^{i\mathbf{K}\mathbf{q}}. \tag{27}$$

Заметим, что ковариация Q, вообще говоря, не является действительной величиной. Относя поток (27) к потоку энергии падающей волны

$$\mathbf{S}_0=(A_0/\rho_0)(k/2\omega), \tag{28}$$

находим эффективный поперечник рассеяния в направлении $\mathbf{n}$ единицы рассеивающего объема:

$$\sigma(\mathbf{n})=\frac{|\langle\mathbf{S}\rangle|}{|\langle S_0\rangle|}\frac{r^2}{V}=\frac{\pi}{2}k^4\,\mathrm{Re}\,\Phi_Q(\mathbf{K}). \tag{29}$$

Возвращаясь к обозначениям (23) и полагая $\mathbf{n}\boldsymbol{\nu}=\cos\theta$, где θ — угол между волновым вектором падающей волны и направлением рассеяния, находим

$$\sigma(\theta)=\frac{\pi}{2}k^4\,\mathrm{Re}\frac{1}{8\pi^3}\int d\mathbf{q}e^{i\mathbf{K}\mathbf{q}}\times$$

$$\times\Big\{(\gamma-2+\cos\theta)^2\frac{\langle\delta\rho_w(\mathbf{r})\delta\rho_w^*(\mathbf{r}+\mathbf{q})\rangle}{\rho_0^2}+\frac{\langle\delta c_w(\mathbf{r})\delta c_w^*(\mathbf{r}+\mathbf{q})\rangle}{c_p^2}+$$

$$+(\gamma-2+\cos\theta)\frac{\langle\delta c_w(\mathbf{r})\delta\rho_w^*(\mathbf{r}+\mathbf{q})+\delta\rho_w(\mathbf{r})\delta c_w^*(\mathbf{r}+\mathbf{q})\rangle}{\rho_0c_p}\Big\} \tag{30}$$

Как уже упоминалось, пространственные флуктуации эффективной массы $\delta\rho_w$ и теплоемкости δc_w аэрозоля могут быть вызваны различными причинами. В частности, флуктуировать может водность при примерном постоянстве от точки к точке спектра и среднего размера капель. Другой тип флуктуаций возникает тогда, когда и водность и спектр приблизительно постоянны, но средний размер меняется от точки к точке. Возможны и более сложные случаи, когда, например, и водность и средний размер постоянны, но варьируется сам спектр или любая комбинация перечисленных случаев. Каждому такому случаю соответствует свой характер угловой и частотной зависимости эффективного сечения рассеяния. Принципиально, по-видимому, возможно решить и обратную задачу, а именно располагая полным видом угловой и частотной зависимости $\sigma(\theta,\ \omega)$, найти соответствующие флуктуации функции распределения, приведшие к такой зависимости. Оставляя решение всех этих вопросов на будущее, в данной работе извлечем лишь некоторые следствия из общего соотношения (30).

Допустим, что функция $f(a)m(a)$ имеет более или менее четко выраженную моду a_0. Тогда эффективную на частоте ω массу аэрозоля (14) можно приближенно представить в виде

$$\rho_w(\omega)=\rho_w/(1-i\omega\tau_\eta(a_0)), \tag{31}$$

а эффективную теплоемкость (15) в виде

$$c_w(\omega)=\rho_wc_{wt}\mathcal{S}(Q_0,\ \omega). \tag{32}$$

Рассмотрим простейший случай, когда флуктуирует лишь водность при неизменности от точки к точке среднего размера. Тогда легко найти, что

$$\sigma(\theta,\omega)=\frac{\pi}{2}\frac{\omega^4}{c_0^4}A(\theta,\omega)\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{8\pi^3}\int d\mathbf{q}e^{i\mathbf{K}\mathbf{q}}Q_\rho(\mathbf{q}), \tag{33}$$

где обозначено

$$Q_\rho(q)=\langle\delta\rho_w(\mathbf{r})\,\delta\rho_w(\mathbf{r}+\mathbf{q})\rangle/\rho_0^2, \tag{34}$$

$$A(\theta,\omega)=\frac{(\gamma-2+\cos\theta)^2}{1+\omega^2\tau_\eta^2(a_0)}+\frac{\rho_0 c_{wt}}{c_p}(\gamma-2+\cos\theta)\times$$

$$\times\left[\frac{S^*(a_0,\omega)}{1-i\omega\tau_\eta(a_0)}+\frac{S(a_0,\omega)}{1+i\omega\tau_\eta(a_0)}\right]+\left(\frac{\rho_0 c_{wt}}{c_p}\right)^2 SS^*.$$

Интенсивность рассеянного излучения определяется главным образом тем, в каком соотношении находятся длина волны падающего излучения и характерный масштаб неоднородностей. Примем для оценок, что

$$Q_\rho(\mathbf{q})=D_\rho\exp\left(-q^2/r_0^2\right). \tag{35}$$

Это соответствует дисперсии относительных флуктуаций D_ρ и их радиусу корреляции $\sim r_0$. В этом случае

$$\sigma(\theta,\omega)=\frac{\pi}{2}\frac{\omega^4 r_0^4}{c_0^4}\frac{D_\rho}{(2\sqrt{\pi})^3 r_0}A(\theta,\omega)\exp\left(-\frac{\omega^2 r_0^2}{c_0^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right). \tag{36}$$

Характерная величина сечения рассеяния легко устанавливается из соображений размерности. Она имеет порядок

$$\sigma(\theta,\ \omega)=D\rho/r_0. \tag{37}$$

Если задаться характерной водностью порядка 1 г/м^3, ее флуктуацией порядка 0,1 г/м^3 и характерными размерами неоднородностей порядка метров, то эффективные сечения имеют порядок $10^{-10}-10^{-11}$ см^2/см^3. Такие величины, как показывает опыт акустического зондирования (см. [3]), могут уверенно регистрироваться современными акустическими локаторами.

Можно установить некоторые важные особенности частотной зависимости рассеянного излучения. Для этого введем характеристическую частоту ω_0, удовлетворяющую соотношениям $\omega_0\tau_\eta\approx 1$; $\omega_0\tau_\chi\approx 1$ (нетрудно проверить, что $\tau_\eta/\tau_\chi\approx 1$, так как $\rho_{wt}=1$ г/см^3, $\chi=1{,}43\cdot 10^{-3}$ см^2/с для воды; $\eta=1{,}7\cdot 10^{-4}$ г/см для воздуха). Максимум выражения

$$\left(\frac{\omega c_0}{r_0}\right)^4\exp\left(-\frac{\omega^2 r_0^2}{c_0^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \tag{38}$$

приходится на частоту $\omega=2c_0/r_0\sin\dfrac{\theta}{2}$. Если эта частота существенно меньше, чем ω_0, то, согласно (14) и (15), эффективные теплоемкость и масса взвешенного аэрозоля будет стремиться соответственно к обычным теплоемкости и массе, а эффективное сечение будет иметь вид

$$\sigma(\theta,\omega)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\omega^2 r_0^2}{c_0^2}\right)^2\frac{D_\rho}{(2\sqrt{\pi})^3 r_0}\left[(\gamma-2+\cos\theta)+\frac{\rho_0 c_{wt}}{c_p}\right]^2\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{\omega^2 r_0^2}{c_0^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right). \tag{39}$$

Если частота (38) существенно больше, чем ω_0, то туман становится акустически «прозрачным», так как эффективные теплоемкость и масса быстро стремятся к нулю. Таким образом, если частота ω_0, при которой туман становится «прозрачным», определена, то между средним размером капель и характерным масштабом неоднородностей должно существовать соотношение $\left(2c_0/r_0 \sin\frac{\theta}{2}\right)(2a_0^2/\chi)\approx 1$, откуда

$$a_0\approx\sqrt{(r_0\chi)/(2c_0)\sin(\theta/2)}. \qquad (40)$$

Разумеется, соотношение (40) не решает задачу определения характеристик тумана полностью, но позволяет сократить число параметров, подлежащих определению.

Автор благодарит А. Б. Шупяцкого за полезные обсуждения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каллистратова М. А.* Экспериментальное исследование рассеяния звуковых волн в атмосфере.– В кн.: Атмосферная турбулентность: Тр. ИФА АН СССР, 1962, № 4, с. 203–256.
2. *Литтл К.* Акустические методы дистанционного зондирования атмосферы.– ТИИЭР, 1969, т. 57, № 4, с. 222–230.
3. *Съедин В. Я.* Акустическое зондирование параметров атмосферы. Обзор достижений.– V Всес. симп. по лазерному и акустическому зондированию атмосферы. Ч. III. Томск, Ин-т оптики атм. СО АН СССР, 1978. 152 с.
4. *Brown E. H.* Some recent NOAA theoretical work on echo-sounding in the atmosphere.– J. Geophys. Res., 1974, v. 79, № 11, p. 5567–5571.
5. *Little C. G.* On detectability of Fog, Cloud, Rain, Snow by acoustic echo-sounding methods.– J. Atmos. Sci., 1972, v. 29, № 5, p. 748–755.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехтеориздат, 1954. 795 с.
7. *Розенфельд С. Х.* Дисперсия и поглощение звука в атмосферном тумане.– Акуст. ж., 1983, т. 29, № 2, с.
8. *Татарский В. И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.
9. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. Т. 2. М.: Наука, 1967. 720 с.

Центральная аэрологическая обсерватория

Поступила в редакцию 19.I.1982