АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXIX 1983 Вып. 3.

УДК 534.222

К ПРОБЛЕМЕ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕД С РЕЗОНАНСНЫМ ПОГЛОТИТЕЛЕМ

Руденко О. В.

Показано, что введение в среду поглотителей на специально выбранных частотах препятствует растеканию энергии по спектру и повышает эффективность полезных нелинейных процессов. Развит математический аппарат для расчета волновых взаимодействий в средах при наличии поглотителя.

Необходимость создания сред с заданными свойствами для реализации избранных нелинейных взаимодействий осознана в акустике давно. Обсуждение проблемы и обзор первых работ даны в книге [1]. Известно, что в обычной нелинейной среде без дисперсии энергия исходных волн растекается по большому числу гармонических составляющих; направить поток энергии в какую-либо нужную волну (усиливаемый сигнал, например) не удается. Если число волн ограничено, процессы идут гораздо эффективнее. Например, теоретически можно добиться 100%-ной перекачки энергии во вторую гармонику, когда организован синхронизм для волн ω_0, $2\omega_0$, а расстройки фазовых скоростей остальных гармоник велики. В недиспергирующей среде соответствующий предел равен 13%. Еще хуже ситуация для параметрического процесса. При резонансном взаимодействии трех волн вся энергия накачки может переходить к субгармоникам, амплитуды которых усиливаются во много раз по экспоненциальному закону. В обычной же акустической среде амплитуда субгармоники в лучшем случае насыщается на уровне 1,27 от исходного значения; почти вся энергия накачки уходит вверх по спектру.

Число взаимодействующих волн можно ограничить, используя искусственную диспергирующую среду [1]. Для акустики перспективен и другой способ — введение в обычные среды резонансных поглотителей, уменьшающих эффективность высших каскадных процессов на квадратичной нелинейности. Последние качественные соображения на эту тему были опубликованы [2, 3].

Дискуссия [2, 3] связана, по-видимому, с неочевидными следствиями введения поглотителя. Допустим, например, что на вход нелинейной среды подан сигнал с частотой ω_0, а поглотитель диссипирует вторую гармонику $2\omega_0$. При этом высшие каскадные процессы $3\omega_0=\omega_0+2\omega_0$, $4\omega_0=2\omega_0+2\omega_0$ и т. д. протекают непременно с участием второй гармоники. Если она подавлена, то волна гораздо слабее обогащается высшими гармониками. Поэтому ударный фронт образуется на более далеких расстояниях или не образуется вовсе, а эффекты нелинейного затухания и нелинейного насыщения должны быть ослаблены. Однако не ясно, как это повлияет на волну основной частоты ω_0: станет ли она слабозатухающей благодаря подавлению «паразитных» нелинейных процессов или же, несмотря на квазисинусоидальность профиля, канал отбора энергии $\omega_0\to2\omega_0$ и далее в тепло просто заменит прежний поток вверх по спектру $\omega_0\to2\omega_0\to3\omega_0\to\to\ldots n\omega_0\to\ldots$.

Итак, необходимо развить аппарат количественного описания нелинейных волн в резонансно-поглощающей среде. Дисперсионная характеристика среды с поглотителем, например, на частоте второй гармоники может быть записана в виде

$$k=\frac{\omega}{c_0}-i\frac{b\omega^2}{2c_0^3\rho_0}-id[\delta(\omega-2\omega_0)+\delta(\omega+2\omega_0)].\tag{1}$$

Здесь k, ω — волновое число и частота; c_0, ρ_0, b — скорость звука, плотность и диссипативный коэффициент, d — константа, характеризующая величину резонансного поглощения. Для линейной волны вида $u=A\cdot\exp(i\omega t-ikx)$ попытки сконструировать на основе (1) дифференциальное уравнение, заменяя k, ω операторами $k=i\partial/\partial x$, $\omega=-i\partial/\partial t$ [4], приводят к уравнению бесконечно высокого порядка из-за наличия дельта-функции. Даже замена ее простейшей гладкой лоренцевой кривой с шириной $\Delta\ll\omega_0$:

$$\delta(\omega-2\omega_0)+\delta(\omega+2\omega_0)\to\frac{\Delta/\pi}{\Delta^2+(\omega-2\omega_0)^2}+\frac{\Delta/\pi}{\Delta^2+(\omega+2\omega_0)^2} \tag{2}$$

приводит к уравнению шестого порядка

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial t^4}+2(4\omega_0^2-\Delta^2)\frac{\partial^2}{\partial t^2}+(4\omega_0^2+\Delta^2)^2\right]\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{c_0}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{b}{2c_0^3\rho_0}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)=$$
$$=\frac{2d\Delta}{\pi}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-(4\omega_0^2+\Delta^2)\right]u, \tag{3}$$

решать которое с учетом нелинейных взаимодействий очень трудно.

Можно поступить иначе. Рассмотрим уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial V}{\partial z}-V\frac{\partial V}{\partial\theta}-\Gamma\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}=0, \tag{4}$$

записанное в безразмерных переменных: $V=u/u_0$ — отношение колебательной скорости к ее амплитудному значению, $\theta=\omega_0(t-x/c_0)$, $z=\varepsilon c_0^{2-}\omega_0 u_0 x=$ $=x/x_p$ — расстояние в единицах длин x_p образования разрыва, $\Gamma=b\omega_0/2\varepsilon c_0\rho_0 u_0$ — обратное число Рейнольдса. Если на входе задан сигнал $V(z=0,\ \theta)=\sin\theta$, решение (4) выразится через ряд Фурье по синусным гармоникам:

$$V(z,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n(z)\sin n\theta, \tag{5}$$

где $B_n(z)$ — коэффициенты Бесселя — Фубини. Подставляя (5) в (4), получим эквивалентную запись уравнения Бюргерса (4) в виде бесконечной цепочки связанных обыкновенных уравнений для коэффициентов $B_n(B_{-n}=-B_n)$:

$$\frac{dB_n}{dz}+n^2\Gamma B_n+\frac{n}{4}\sum_{m=1}^{\infty}B_m(B_{m+n}+B_{m-n})=0. \tag{6}$$

Системе (6) можно придать более общий смысл, если заменить диссипативные коэффициенты $n^2\Gamma$ произвольными числами Γ_n. Это позволит описать законы затухания разных гармоник, отличные от квадратичного по частоте.

Однако решать систему укороченных уравнений (6) сложнее, чем полевые уравнения типа (4). Поэтому поступим следующим образом. Рассмотрим, например, среду с резонансным поглотителем на частоте $2\omega_0$. При этом все гармоники, за исключением $n=2$, будут по-прежнему описываться уравнениями (6). Для $n=2$ уравнение примет вид

$$\frac{dB_2}{dz}+4\Gamma B_2+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}B_m(B_{m+2}+B_{m-2})=-DB_2. \tag{7}$$

Здесь D — коэффициент дополнительного затухания, вносимого поглотителем. Умножая теперь уравнения (6) на $\sin n\theta$, а (7) — на $\sin 2\theta$ и суммируя, получим

$$\frac{\partial V}{\partial z}-V\frac{\partial V}{\partial\theta}-\Gamma\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}=-DB_2(z)\sin 2\theta, \tag{8}$$

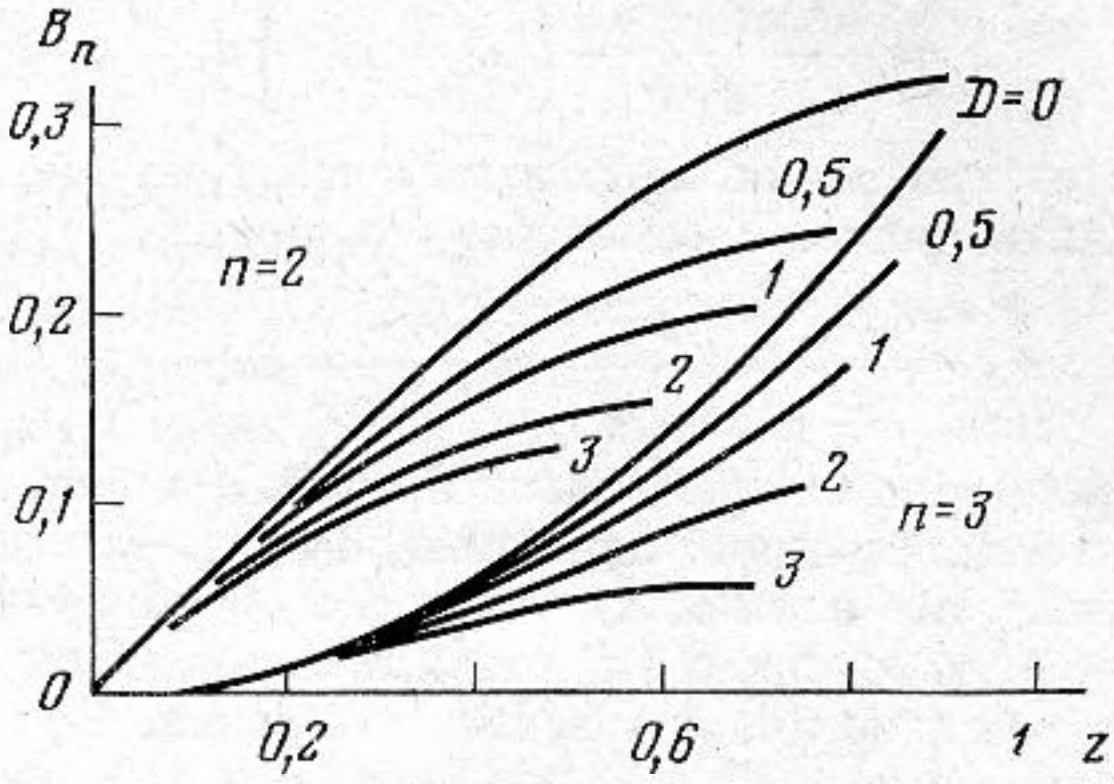
где

$$B_2(z)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi V(z,\theta)\sin 2\theta\,d\theta. \tag{9}$$

Объединяя (8), (9), придем к нелинейному интегродифференциальному уравнению

$$\frac{\partial V}{\partial z}-V\frac{\partial V}{\partial\theta}-\Gamma\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}=-D\sin 2\theta\,\frac{2}{\pi}\int_0^\pi V(z,\theta')\sin 2\theta'\,d\theta'. \tag{10}$$

Выражения (8), (9) или (10) образуют математический аппарат для решения поставленной задачи. Заметим, что (8) представляет собой неоднородное уравнение Бюргерса (при $\Gamma\to 0$ — неоднородное уравнение про-



Зависимости амплитуд B_2, B_3 от расстояния при разных D, иллюстрирующие эффект подавления второй и третьей гармоник с увеличением затухания на частоте $2\omega_0$

стых волн) с гармонической правой частью. Такие уравнения находят применение во многих физических ситуациях и в последние годы интенсивно исследуются [5—7]. Известно, что когда правая часть (8) одновременно зависит от θ и z (а тем более является неизвестной функцией z), найти точное решение не удается и необходимо прибегнуть к численному интегрированию.

Вначале исследуем (8) эволюционным способом. С точностью до членов $\sim z^3$ для исходного сигнала $V(z=0,\ \theta)=\sin\theta$ нетрудно найти (при $\Gamma\to 0$)

$$V=\left(1-\frac{z^2}{8}+\frac{z^3}{24}D\right)\sin\theta+\left(\frac{z}{2}-\frac{z^2}{4}D+\frac{z^3}{12}D^2-\frac{z^3}{6}\right)\sin 2\theta+$$
$$+\left(\frac{3}{8}z^2-\frac{z^3}{8}D\right)\sin 3\theta+\frac{z^3}{3}\sin 4\theta. \tag{11}$$

Поведение амплитуд второй и третьей гармоник при различных значениях D изображено на фигуре. Видно, что с увеличением D процесс генерации гармоник замедляется. Кроме того, с ростом D медленнее убывает амплитуда основной волны.

Для качественного анализа эволюции формы возмущения положим в правой части (8)

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2V(0,\ \theta)\,dV/d\theta(0,\ \theta)\approx 2V(z,\ \theta)\,\partial V(z,\ \theta)/\partial\theta. \tag{12}$$

Приближенный переход в формуле (12) справедлив для $D\gg 1$, как это следует из предыдущего рассмотрения. Уравнение (8) для $\Gamma=0$ примет вид

$$\frac{\partial V}{\partial z}-[1-2DB_2(z)]\,V\frac{\partial V}{\partial\theta}=0. \tag{13}$$

Решая (13), найдем

$$V=\sin\left[\theta+V\left(z-2D\int_0^z B_2(z')\,dz'\right)\right] \tag{14}$$

Отсюда следует уравнение для неизвестной функции $B_2(z)$:

$$\left[z-2D\int_0^z B_2(z')\,dz'\right]^{-1}\cdot J_2\left[2\left(z-2D\int_0^z B_2(z')\,dz'\right)\right]=B_2(z). \tag{15}$$

Считая приведенное расстояние малым и разлагая функцию Бесселя в ряд, получим

$$B_2=\frac{1}{2D}[1-e^{-Dz}],\qquad V=\sin\left[\theta+\frac{V}{D}(1-e^{-Dz})\right]. \tag{16}$$

Из формулы (16) видно, что введение резонансного поглотителя уменьшает темпы накопления нелинейных искажений. Расстояние образования разрыва z_p определяется из условия

$$\frac{1}{D}(1-e^{-Dz_p})=1\quad\text{или}\quad z_p=-\frac{1}{D}\ln(1-D). \tag{17}$$

При малых D расстояние $z_p\approx 1+D/2$ — линейно увеличивается с ростом D. При $D>1$ разрыв не образуется совсем, и профиль волны остается почти синусоидальным.

Тот факт, что с ростом D происходит подавление нелинейных искажений исходного сигнала $V(z=0,\ \theta)=\sin\theta$, подтверждается и следующим наглядным рассуждением. Как видно из формулы (16), на расстояниях $z\sim 1/D$ (малых при $D\gg 1$ по сравнению с нелинейной длиной) амплитуда второй гармоники выходит на малое стационарное значение $B_2=1/2D$; форма волны при этом почти не искажена и близка к синусоидальной. Подставляя $B_2=1/2D$ в уравнение (8), получим обычное неоднородное уравнение простых волн ($\Gamma=0$):

$$\frac{\partial V}{\partial z}-V\frac{\partial V}{\partial\theta}=-\frac{1}{2}\sin 2\theta. \tag{18}$$

Нетрудно проверить, что точным стационарным решением (18) будет неискажающаяся волна $V(z,\ \theta)=\sin\theta$. Смысл этого решения состоит в следующем: рождающаяся при распространении в среде вторая гармоника в точности компенсируется второй гармоникой, генерируемой в противофазе «внешними источниками» — правой частью уравнения (18). Даже если профиль волны не строго гармонический, решение почти на всем периоде стремится принять вид $V(z,\ \theta)=\sin\theta$; устойчивость в указанном смысле легко проверяется методом фазовой плоскости [6, 7], развитым специально для качественного анализа решений неоднородных уравнений типа (18).

Выше была рассмотрена задача распространения интенсивной гармонической волны с подавлением ее нелинейных искажений. В более широком смысле введение резонансных поглотителей может решить ряд других практически важных проблем. Если, например, поглотитель введен для нескольких частот $n\omega_0$, то правая часть уравнения (10) примет вид

$$-\sum_n D_n\sin n\theta\,\frac{2}{\pi}\int_0^\pi V(z,\theta')\sin n\theta'\,d\theta'. \tag{19}$$

Нетрудно обобщить это уравнение также и на случай, когда существенны фазовые сдвиги между гармониками (как при параметрическом взаимодействии [1]) и, кроме синусных, нужно учитывать еще и косинусные составляющие.

Как следует выбирать указанные частоты? Очевидно, это нужно делать таким образом, чтобы в полосу поглощения не попадали те компоненты волнового спектра ω_i, ω_j, которые должны эффективно взаимодействовать друг с другом. Напротив, все нелинейные процессы первого порядка, рождающие на квадратичной нелинейности «паразитные» волны

$$2\omega_i,\ 2\omega_j,\ \omega_i\pm\omega_j, \tag{20}$$

должны быть подавлены, т. е. поглотитель следует вводить на частотах (20) или в полосе частот, перекрывающей (если это возможно) все комбинации (20) и не затрагивающей самих ω_i, ω_j. При этом будут подавлены также высшие каскадные процессы и «растекания» энергии по спектру не произойдет.

Допустим, что мы намерены создать эффективный генератор второй акустической гармоники. В этом случае должны синхронно взаимодействовать только волны ω_0, $2\omega_0$, частоты $3\omega_0$, $4\omega_0$ следует подавить поглощением.

При вырожденном параметрическом усилении субгармоники $\omega_0/2$ в поле мощной накачки ω_0 подавлять нужно волны $3\omega_0/2$, $2\omega_0$.

Если параметрический процесс не вырожден и распад волны $\omega_3\to\omega_1+\omega_2(\omega_3=\omega_1+\omega_2)$ приводит к усилению целой полосы $[0,\ \omega_3]$, ограничивать нужно все частоты в области $[\omega_3,\ 2\omega_3]$. Когда усиливается только одна низкочастотная компонента, например ω_1, требуется вводить поглотитель на частотах $\omega_2-\omega_1$, $\omega_3+\omega_1$, $\omega_3+\omega_2$, $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$.

В заключение укажем, что не составляет принципиальных трудностей распространить развитый здесь подход на другие аналогичные задачи и получить результат (зависимости коэффициентов усиления, преобразования и т. п. от свойств поглотителя — например, величин D_i) методами численного интегрирования. Но эта деятельность важна, на наш взгляд, лишь при параллельной экспериментальной реализации высказанных соображений. Отдельного обсуждения заслуживает проблема создания нелинейных сред с заданными диссипативно-дисперсионными свойствами. Эти результаты мы рассчитываем опубликовать позднее.

Автор выражает благодарность С. А. Ахманову, Ф. В. Бункину и участникам его семинара, В. Э. Гусеву и А. А. Карабутову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
2. *Moffett M. B., Mellen R. H.* On absorption as a means of saturation suppression.— J. Sound Vibr., 1981, v. 76, № 2, p. 295–297.
3. *Woodsum H. C.* Author's reply.— J. Sound Vibr., 1981, v. 76, № 2, p. 297–298.
4. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн. М.: Наука, 1979.
5. *Карабутов А. А., Руденко О. В.* Нелинейные плоские волны, возбуждаемые объемными источниками в движущейся с трансзвуковой скоростью среде.— Акуст. ж., 1979, т. 25, № 4, с. 536–542.
6. *Гусев В. Э., Карабутов А. А.* К вопросу о возбуждении акустических импульсов распределенными источниками, движущимися с трансзвуковой скоростью.— Акуст. ж., 1981, т. 27, № 2, с. 213–219.
7. *Гусев В. Э.* Нелинейные режимы возбуждения акустических волн и потоков распределенными внешними источниками. Автореф. дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1982.

Московский государственный
университет
им. М. В. Ломоносова,
физический факультет

Поступила в редакцию
22.III.1982