АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXIX 1983 Вып. 5

УДК 534.222

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ ЭНЕРГИИ В МНОГОСЛОЙНЫХ РЕЗОНАНСНЫХ СИСТЕМАХ

Красильников М. В.

Рассчитаны структуры полей бегущих волн в симметричном и асимметричном резонаторах с зеркалами, состоящими из чередующихся слоев двух сред с близкими акустическими свойствами, и слабопоглощающим рабочим слоем. Получены условия оптимального поглощения энергии в таких системах.

Исследование волновых процессов в слоистых системах представляет большой интерес как с физической точки зрения, так и для приложений. Многослойные интерференционные системы (оптические и акустические фильтры, просветляющие покрытия, высокоэффективные отражатели [1—3] и т. п.) в настоящее время хорошо изучены. Вместе с тем, определенный интерес представляют более сложные системы с ярко выраженными резонансными свойствами [4]. В этой работе изучались возможности создания условий максимального поглощения энергии в таких системах. Был предложен ряд принципиально новых устройств для достижения этой цели [5, 6]. Однако расчет, выполненный на базе метода импедансных характеристик [1] для систем с «резкими» границами, небольшим числом слоев и сильным отличием их свойств [4], для систем с большим числом вариаций неоднородности при слабом отличии их акустических свойств был бы чрезвычайно громоздким.

В процессе развития теории нелинейных волн были предложены асимптотические методы для расчета волновых взаимодействий в периодических структурах. Эти методы, основанные на факте существования малого параметра-коэффициента глубины пространственной модуляции свойств слоистой среды, упростили решение ряда сложных линейных задач и позволили продвинуться вперед в описании нелинейных волновых процессов [7—9...].

В настоящей работе рассмотрена система типа многослойного интерференционного поглотителя волновой энергии (геометрию задачи см. [9, фиг. 1], где в рабочий слой *2* внесена слабая диссипация), расчет интегральных характеристик которой выполнен на основе метода медленно меняющихся амплитуд.

Для описания волны в слабонеоднородных средах 1, 3 воспользуемся уравнением [10] в координатах Лагранжа

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}-\frac{1}{c_0^2}[1-mf(x)]\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=0. \qquad (1)$$

Здесь ξ — смещение; c_0 — скорость звука; функция $f(x)$ описывает пространственную модуляцию свойств среды; $m\ll 1$ — коэффициент глубины модуляции.

Пусть акустические параметры зеркал 1, 3 изменяются по гармоническому закону. Для левой и правой симметричных структур положим соответственно

$$f_1=-\sin 2k(x+l), \quad f_3=\sin 2k(x-l), \qquad (2)$$

где $k=2\pi/\lambda$ — волновое число. Из условия непрерывности $f(x)$ на границе структуры $\sin 2k(L-l)=0$ следует $d=L-l=n\lambda/4$, т. е. толщина каждого зеркала равна целому числу четвертьволновых слоев. Поскольку выбор (2) функций $f_{1,3}$ обеспечивает выполнение равенств $f_1(x=-l)=f_3(x=l)=0$, толщина среднего слоя $2l$ может быть любой.

Решения уравнения (1) для сред 1, 3, полученные методом медленно меняющихся амплитуд, и функция, описывающая распространение волны в слабодиссипативном рабочем слое 2, как известно [9, 10], имеют вид:

$$\xi_1=\{[C_1e^{-\alpha(x+L)}+D_1e^{\alpha(x+L)}+[C_1e^{-\alpha(x+L)}-D_1e^{\alpha(x+L)}]\times \times e^{-ik(x-L)+i2kl}\}e^{i\omega t}+\text{к.с.}, \tag{3}$$

$$\xi_2=\{C_2e^{-\beta x-ikx}+D_2e^{\beta x+ikx}\}e^{i\omega t}+\text{к.с.}, \tag{4}$$

$$\xi_3=\{[C_3e^{\alpha(x-L)}+D_3e^{-\alpha(x-L)}]e^{-ik(x-L)}+[C_3e^{\alpha(x-L)}- -D_3e^{-\alpha(x-L)}\times e^{ik(x+L)-i2kl}\}e^{i\omega t}+\text{к.с.}. \tag{5}$$

Здесь C_i, D_i ($i=1, 2, 3$) — шесть констант интегрирования; $\alpha=mk/4$; $\beta=b\omega^2/2c_0^3\rho_0$ — коэффициент затухания [11]; к.с. обозначены выражения, комплексно-сопряженные по отношению к выписанным. Для определения констант воспользуемся следующими граничными условиями [9]:

$$\xi_1^{(+)}|_{x=-L}=A_0, \quad \xi_3^{(-)}|_{x=L}=0, \tag{6}$$

$$\begin{gathered}\xi_1^{(+)}|_{x=-l}=\xi_2^{(+)}|_{x=-l}, \quad \xi_1^{(-1)}|_{x=-l}=\xi_2^{(-)}|_{x=-l},\\ \xi_2^{(+)}|_{x=l}=\xi_3|_{x=l}, \quad \xi_2^{(-)}|_{x=l}=\xi_3^{(-)}|_{x=l},\end{gathered} \tag{7}$$

здесь $\xi^{(+)}$ и $\xi^{(-)}$ — комплексные поля волн бегущих в положительном и отрицательном направлениях оси x. Граничные условия (6) и сшивание решений по формулам (7) позволяют определить все шесть констант:

$$\begin{gathered}C_1=\frac{A_0}{2}e^{\alpha d}(\mathrm{Ch}\,\alpha d e^{2\beta l+i2kl}-\mathrm{Sh}\,\alpha d e^{-2\beta l-i2kl})\times Z^{-1},\\ D_1=\frac{A_0}{2}e^{-\alpha d}(\mathrm{Ch}\,\alpha d e^{2\beta l+i2kl}+\mathrm{Sh}\,\alpha d e^{-2\beta l-i2kl})\times Z^{-1},\\ C_2=A_0\,\mathrm{Ch}\,\alpha d e^{\beta l+i2kl-ikL}\times Z^{-1}, \quad D_2=-A_0\,\mathrm{Sh}\,\alpha d e^{-\beta l-ikL}\times Z^{-1},\\ C_3=D_3=\frac{A_0}{2}e^{-i2kd}\times Z^{-1},\end{gathered} \tag{8}$$

здесь $Z=\mathrm{Ch}^2\,\alpha d e^{2\beta l+i2kl}-\mathrm{Sh}^2\,\alpha d e^{-2\beta l-i2kl}$.

Рассмотрим поведение интегральных характеристик структуры: коэффициента отражения R, прозрачности T и поглощения A, определяемых формулами

$$|R|=|\xi_1^{(-)}|_{x=-L}/A_0, \quad |T|=|\xi_3^{(+)}|_{x=L}/A_0, \tag{9}$$

$$A=1-|R|^2-|T|^2. \tag{10}$$

Из решений (3), (5) следует, что

$$\xi_1^{(-)}=[C_1e^{-\alpha(x+L)}-D_1e^{\alpha(x+L)}]e^{ik(x-L)+i2kl}, \tag{11}$$

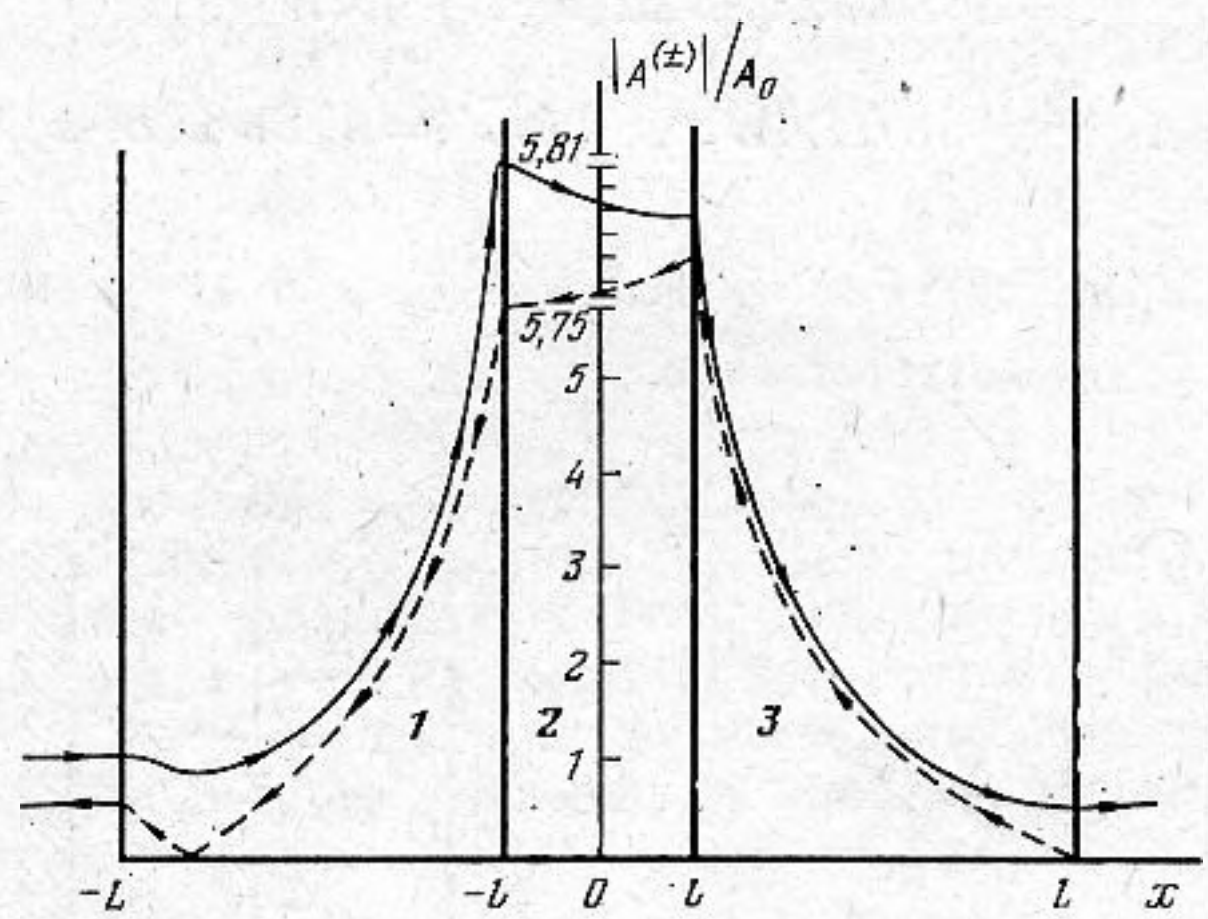
$$\xi_3^{(+)}=[C_3e^{\alpha(x-L)}+D_3e^{-\alpha(x-L)}]e^{-ik(x-L)}. \tag{12}$$

Пользуясь формулами (8) для констант C_1, D_1, C_3, D_3 в случае точного резонанса ($\sin 2kl=0$ [9]), найдем

$$|R|=\mathrm{Sh}\,2\alpha d\,\mathrm{Sh}\,2\beta l/\mathrm{Ch}^2\,\alpha d e^{2\beta l}-\mathrm{Sh}^2\,\alpha d e^{-2\beta l}, \tag{13}$$

$$|T|=1/\mathrm{Ch}^2\,\alpha d e^{2\beta l}-\mathrm{Sh}^2\,\alpha d e^{-2\beta l}. \tag{14}$$

Подставим соотношения (13), (14) в формулу для коэффициента поглощения (10). Затем, используя разложение экспоненты в ряд по малому параметру ($2\beta l\ll 1$), получим $A=2\,\mathrm{Ch}\,2\alpha d(2\beta l)/[1+\mathrm{Ch}\,2\alpha d(2\beta l)]^2$. Обозна-



Фиг. 1. Распределения нормированных амплитуд $A^{\pm}/A_0$ прямой (сплошные кривые) и обратной (штриховые кривые) волн в симметричном резонаторе. Кривые построены для $\alpha d=\pi$, $m=0{,}1$. Толщина рабочего слоя $2l=\lambda/2$. Отношение масштабов рабочего слоя *2* и зеркал *1*, *3* – 20 : 1

чая $\mathrm{Ch}\,2\alpha d(2\beta l)=\theta$, запишем

$$A=2\theta/[1+\theta]^2. \tag{15}$$

Это выражение имеет максимум при $\theta=1$, который равен $^1/_2$. Следовательно, при

$$\theta=\mathrm{Ch}\,2\alpha d(2\beta l)=1, \tag{16}$$

$A=A_{\text{макс}}=50\%$. Таким образом, выражение (16) представляет собой условие оптимального поглощения падающей на систему волновой энергии. Как следует из анализа этого выражения, отражательные свойства системы (множитель $\mathrm{Ch}\,2\alpha d$) и поглощающие свойства среднего слоя связаны таким образом, что при любом сколь угодно малом коэффициенте поглощения β найдется такая величина d – толщина зеркала, что условие (16) будет выполнено.

Необходимо отметить, что полученный результат совпадает с данными работы [4], полученными другим способом для аналогичной системы, составленной из пластин с «резкими» границами и сильным различием свойств чередующихся слоев.

Использование метода медленно меняющихся амплитуд для решения этой задачи дает возможность проследить за распределением модулей амплитуд прямой и обратной волн в системе. Действительно, после несложных алгебраических преобразований, в случае слабой диссипации в среде 2 ($2\beta l\ll 1$) и слабой отстройки от резонанса ($\sin 2kl=\Delta\ll 1$), для этих

величин в средах 1, 2, 3 получим следующие выражения:

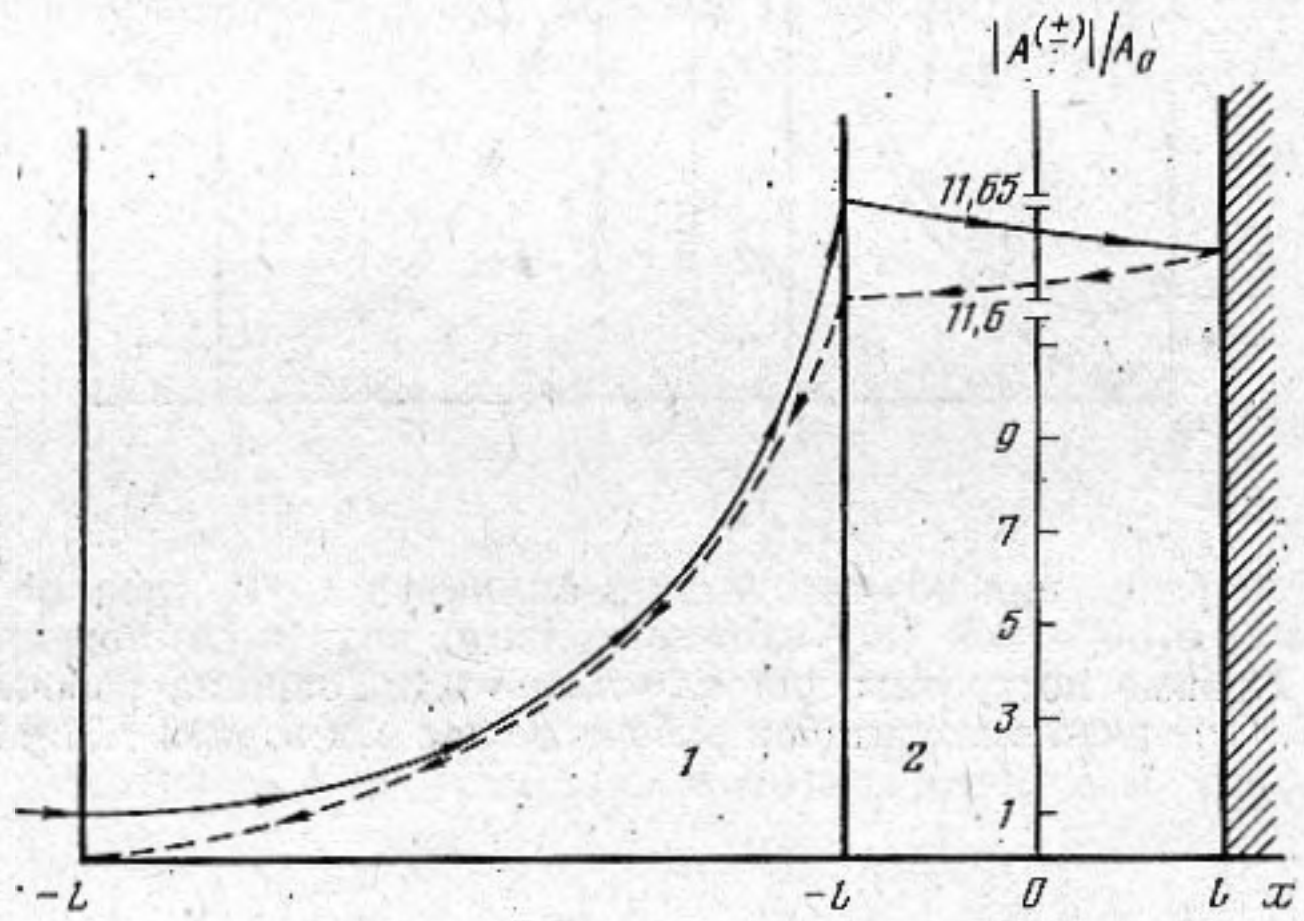
$$|A_1^{(+)}|=A_0|\{[\operatorname{Ch}\alpha(L+x)+2\beta l\operatorname{Ch}\alpha(L-2l-x)]^2-\Delta^2\operatorname{Sh}2\alpha d\times \times\operatorname{Sh}2\alpha(x+l)\}^{1/2}|\times W^{-1}, \tag{17}$$

$$|A_3^{(+)}|=A_0\operatorname{Ch}\alpha(L-x)\times W^{-1},$$

$$|A_1^{(-)}|=A_0|\{[\operatorname{Sh}\alpha(L+x)+2\beta l\operatorname{Sh}\alpha(x+2l-L)]^2- -\Delta^2\operatorname{Sh}2\alpha d\operatorname{Sh}2\alpha(x+l)\}^{1/2}|\times W^{-1},$$

$$|A_2^{(-)}|=A_0e^{\beta(x-l)}\operatorname{Sh}\alpha d\times W^{-1},\quad |A_3^{(-)}|=A_0\operatorname{Sh}\alpha(L-x)\times W^{-1},$$

где $W=[(1+2\beta l\operatorname{Ch}2\alpha d)^2+\Delta^2\operatorname{Sh}^2 2\alpha d]^{1/2}$; $A_{1,2,3}^{(+)}$ и $A_{1,2,3}^{(-)}$ — амплитуды прямой и обратной волн соответственно.



Фиг. 2. Распределения нормированных амплитуд $A^{\pm}/A_0$ прямой (сплошные кривые) и обратной волн (штриховые кривые) в асимметричном резонаторе. Кривые построены для $\alpha d=\pi$, $m=0{,}1$. Толщина рабочего слоя $2l=\lambda/2$. Отношение масштабов рабочего слоя *2* и зеркал *1* – 20 : 1

Распределение модулей амплитуд прямой и обратной волн в системе в случае точного резонанса и выполнения условия (16) представлено на фиг. 1. Заметим, что с помощью формул (17) легко учесть влияние расстройки от резонанса или, что то же самое, разброс зеркал по толщине, а также влияние величины диссипации в среде *2* при невыполнении условия (16) на характеристики резонатора.

При замене правого зеркала резонансной системы (см. [9], фиг. 1) на идеальный отражатель, резонатор резко изменяет свои свойства. Эта замена дает возможность считать коэффициент прозрачности системы равным нулю. Это означает (см. определение (10)), что условие полного поглощения энергии будет следовать из условия равенства нулю коэффициента отражения.

Функции, описывающие распространение волны в такой системе, определяются формулами (3), (4). Для нахождения констант интегрирования C_1, D_1, C_2, D_2 воспользуемся следующими граничными условиями:

$$\xi_1^{(+)}|_{x=-L}=A_0,\quad \xi_1^{(+)}|_{x=-l}=\xi_2^{(+)}|_{x=-l},$$
$$\xi_2^{(-)}|_{x=-l}=\xi_1^{(-)}|_{x=-l},\quad \xi_2^{(+)}|_{x=l}=-\xi_2^{(-)}|_{x=l}. \tag{18}$$

Для констант можно получить следующие выражения:

$$C_1=\frac{A_0}{2}e^{\alpha d}(e^{2\beta l+i2kl}-e^{-2\beta l-i2kl})\times Z^{-1},$$
$$D_1=\frac{A_0}{2}e^{-\alpha d}(e^{2\beta l+i2kl}+e^{-2\beta l-i2kl})\times Z^{-1}, \tag{19}$$
$$C_2=A_0e^{\beta l+i2kl-ikL}\times Z^{-1},\quad D_2=-A_0e^{-\beta l-ikL}\times Z^{-1},$$

здесь $Z=\mathrm{Ch}\,\alpha d e^{2\beta l+i2kl}-\mathrm{Sh}\,\alpha d e^{-2\beta l-i2kl}$. Используя формулы (9), (11), (19), в случае точного резонанса ($\sin 2kl=0$) найдем:

$$|R|=\frac{\mathrm{Sh}\,\alpha d e^{2\beta l}-\mathrm{Ch}\,\alpha d e^{-2\beta l}}{\mathrm{Ch}\,\alpha d e^{2\beta l}-\mathrm{Sh}\,\alpha d e^{-2\beta l}}. \tag{20}$$

Ограничиваясь рассмотрением случая слабой диссипации в рабочем слое ($2\beta l\ll 1$), проанализируем формулу (20). Легко показать, что знаменатель этого выражения не обращается в нуль. Действительно, используя разложение экспоненты в ряд по малому параметру, запишем $\mathrm{Ch}\,\alpha d e^{2\beta l}-\mathrm{Sh}\,\alpha d e^{-2\beta l}=e^{-\alpha d}+e^{\alpha d}(2\beta l)\neq 0$, так как все члены положительны. Для нахождения условия полного поглощения энергии достаточно приравнять нулю числитель формулы (20): $\mathrm{Sh}\,\alpha d e^{2\beta l}-\mathrm{Ch}\,\alpha d e^{-2\beta l}=-e^{-\alpha d}+e^{\alpha d}(2\beta l)=0$, т. е. $2\beta l=e^{-2\alpha d}$. (21)

Таким образом, из определения (10) следует, что условие (21) означает полное поглощение падающей на систему волны, т. е. $A=100\%$. Полученный результат также согласуется с данными работы [4].

Используя преимущество, которое дает метод медленно меняющихся амплитуд в исследовании данной задачи, для модулей амплитуд прямой и обратной волн в средах 1, 2 в случае слабой диссипации в среде 2 и слабой отстройки от резонанса получим следующие выражения:

$$|A_1^{(+)}|=A_0|\{[e^{\alpha(x+l)}+2\beta l e^{-\alpha(x+l)}]^2-2\Delta^2\,\mathrm{Sh}\,2\alpha(x+l)\}^{1/2}|\times V^{-1},$$
$$|A_2^{(+)}|=A_0e^{\beta(l-x)}\times V^{-1},\quad |A_1^{(-)}|=A_0|\{[e^{\alpha(x+l)}-2\beta l e^{-\alpha(x+l)}]^2- \tag{22}$$
$$-2\Delta^2\,\mathrm{Sh}\,2\alpha(x+l)\}^{1/2}|\times V^{-1},\quad |A_2^{(-)}|=A_0e^{\beta(x-l)}\times V^{-1},$$

где $V=[(e^{-\alpha d}+2\beta l e^{\alpha d})^2+2\Delta^2\,\mathrm{Sh}\,2\alpha d]^{1/2}$; $A_{1,2}^{(+)}$ и $A_{1,2}^{(-)}$ — амплитуды прямой и обратной волн соответственно.

Поведение модулей амплитуд прямой и обратной волн в системе в случае точного резонанса и выполнения условия (21) представлено на фиг. 2.

Применение метода медленно меняющихся амплитуд для решения данной задачи значительно упрощает расчеты и позволяет получить более наглядную, с физической точки зрения, картину процессов, происходящих в многослойных резонансных системах. В частности, появляется принципиально новая возможность (в отличие от метода, использующегося в работе [4]) проследить за распространением прямой и обратной волн в системе. С помощью этого метода не представляет трудности рассчитать поле стоячей волны в таких и аналогичных резонансных системах. Резонаторы, рассмотренные в этой работе, представляют интерес как накопители энергии, что значительно повышает эффективность нелинейных волновых взаимодействий в рабочем слое многослойной системы.

Автор благодарен О. В. Руденко и Ю. А. Пирогову за ценные замечания по ряду вопросов, затронутых в данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреховских Л. М.* Волны в средах. М.: Наука, 1973.
2. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1973.
3. *Бриллюен Л., Пароди М.* Распространение волн в периодических структурах. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
4. *Козарь А. В., Колесников В. С., Пирогов Ю. А.* О применении метода импедансных характеристик для анализа распространения волн в многослойных структурах с поглощением.– Вестн. МГУ. Сер. физ., астр., 1978, т. 19, № 2, с. 76–83.
5. *Козарь А. В., Колесников В. С., Пирогов Ю. А.* В кн.: Всес. симп. по приборам, технике и распространению миллиметровых и субмиллиметровых волн в атмосфере (тез. докл.) М.: 1976, с. 131.
6. *Баскаков А. Н., Козарь А. В., Колесников В. С., Пирогов Ю. А., Тихонравов А. В.* В кн.: Всес. симп. по приборам, технике и распространению миллиметровых и субмиллиметровых волн в атмосфере (тез. докл.). М.: 1976, с. 77.
7. *Ашитков С. И., Колесников В. С., Пирогов Ю. А.* Оптимальные условия эффективной генерации гармоники в акустическом резонаторе со слабой нелинейностью.– Акуст. ж., 1980, т. 26, № 3, с. 321–327.
8. *Ланина Э. П., Руденко О. В., Шмальгаузен В. И.* Акустические взаимодействия в средах со слабыми периодическими неоднородностями.– Акуст. ж., 1978, т. 24, № 5, с. 556–562.
9. *Красильников М. В., Руденко О. В.* Генерация второй гармоники в резонаторе типа многослойного интерференционного фильтра.– Акуст. ж., 1979, т. 25, № 5, с. 744–748.
10. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
11. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн. М.: Наука, 1979.

Институт радиотехники
и электроники
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
5.IV.1982