АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXIX 1983 Вып. 5

УДК 535.222.1:517.972.5

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ДЛЯ ЗАДАЧ АКУСТИКИ НЕОДНОРОДНЫХ ПОТОКОВ ГАЗА

Осипов А. А.

Сформулирован вариационный принцип, описывающий линейные, гармонические по времени акустические колебания в неоднородных потоках газа, которые могут включать поверхности тангенциального разрыва. С его помощью решена задача о распространении трехмерных звуковых волн в каналах медленно изменяющегося по длине поперечного сечения, содержащих стационарный поток газа.

Разработке вариационных принципов для различных газодинамических течений посвящено немало работ [1–3]. В большинстве из них такие принципы строились и применялись для непрерывных течений. Для течений с сильными разрывами вариационные принципы, записанные в эйлеровых переменных, в наиболее общем виде получены в работе [4]. Кроме того, в указанной работе дано обобщение формулировки принципа Бейтмена [1] на пространственные нестационарные потоки с контактными разрывами. Для волновых задач гидродинамики вариационный принцип получен в работе [5].

В последнее время интерес к вариационным принципам возрос в связи с их использованием в рамках метода конечных элементов. Имеются работы, где конечно-элементные схемы, основанные на вариационном принципе, применяются для расчета акустических полей в однородной покоящейся среде [6, 7]. Применительно к вопросам аэроакустики представляет значительный интерес вариационная формулировка задачи расчета линейных, гармонических по времени акустических колебаний в неоднородных потоках газа. Соответствующий вариационный принцип получен в настоящей работе применительно к кусочно-изоэнтропическим кусочно-изоэнергетическим потокам газа, содержащим поверхности тангенциального разрыва типа границы струи. С его помощью получена конечная формула, описывающая распространение акустических возмущений какой-либо моды, соответствующей одной из собственных форм колебаний, в канале медленно изменяющегося по длине поперечного сечения при наличии стационарного неоднородного потока газа.

Рассмотрим акустические колебания в среде, представляющей собой стационарный изоэнтропический безвихревой поток идеального газа. Ограничимся анализом линейных гармонических по времени колебаний акустических величин, описываемых множителем $\exp(-i\omega t)$, где t – время, ω – круговая частота. Тогда для амплитуды колебаний потенциала скорости φ можно получить уравнение

$$L(\varphi)\equiv\Delta\varphi-(\mathbf{M}\nabla)(\mathbf{M}\nabla\varphi)-\nabla\varphi\{2\mathbf{M}(\mathbf{M}\nabla\ln\rho+\nabla\mathbf{M})-$$
$$-2i\eta\mathbf{M}-\nabla\ln\rho\}+\varphi\{\eta^2-2i\eta(\mathbf{M}\nabla\ln\rho+\nabla\mathbf{M})\}=0. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{M}=\mathbf{V}/c$, где $\mathbf{V}$ – вектор скорости газа в стационарном потоке, c – скорость звука в нем, ρ – плотность стационарного потока, $\eta=\omega/c$. Все величины будем считать обезразмеренными по некоторым характерным значениям линейного масштаба задачи, скорости звука и плотности газа. Далее будем рассматривать такой стационарный поток газа, в котором имеются различные области непрерывного течения, разделенные поверхностями тангенциального разрыва. При этом ограничимся исследованием таких случаев, когда неустойчивость тангенциального разрыва не приводит к слишком большой раскачке его поверхности в пределах рассматриваемой области течения. Таким образом, будем рассматривать достаточно малые колебания в таком диапазоне частот, чтобы амплитуды колебаний акустического потенциала φ и смещения поверхности тангенциального разрыва h относительно ее стационарного положения оставались величинами порядка $\varepsilon \ll 1$. При сделанных ограничениях условия непрерывности давления и нормальной компоненты скорости газа на возмущенной поверхности тангенциального разрыва в рамках линейного анализа эквивалентны следующим соотношениям на невозмущенной поверхности разрыва S_τ:

$$\left[\rho c(i\eta\varphi - \mathbf{M}\nabla\varphi) + h\frac{\partial P}{\partial n}\right] = 0, \tag{2}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -i\eta h + M\left(\frac{\partial h}{\partial l} - h\frac{\partial\beta}{\partial n}\right). \tag{3}$$

Здесь $\partial/\partial n$ — производная по нормали к S_τ, $\partial/\partial l$ — производная вдоль линии тока невозмущеного потока газа, давление в котором обозначено через P, а β — угол между вектором $\mathbf{M}$ и плоскостью, касательной к S_τ в рассматриваемой точке поверхности разрыва. Соотношение (3) выполняется с обеих сторон от S_τ. Квадратные скобки в (2) означают разность значений записанной в скобках величины с одной и с другой стороны S_τ.

Перейдем к формулировке вариационного принципа, обеспечивающего выполнение уравнения (1), условий (2) и (3). Для решения этой задачи воспользуемся принципом Бейтмена [1] и рассмотрим функционал

$$\int\limits_T \iiint\limits_G p\,dG\,dt. \tag{4}$$

Здесь $G=G(t)$ — рассматриваемая область течения с постоянными значениями энтропии и полной энтальпии, T — период колебаний, p — статическое давление газа. Зависимость G от t в данном случае связана с тем, что частью границы этой области является колеблющаяся поверхность тангенциального разрыва.

Обозначим через p' и p'' соответственно линейную и квадратичную по φ части возмущения давления. Тогда с помощью интеграла Коши — Лагранжа можно получить формулы $p'=\rho c(i\eta\varphi - \mathbf{M}\nabla\varphi)\exp(-i\omega t)$, $p''=-(1/2)\rho\{(\nabla\varphi)^2-(\mathbf{M}\nabla\varphi)^2+2i\eta\varphi\mathbf{M}\nabla\varphi-(i\eta\varphi)^2\}\exp(-2i\omega t)$.

Изменяющуюся во времени область интегрирования $G(t)$ представим в виде суммы фиксированной ее части G_0, соответствующей стационарному положению поверхности тангенциального разрыва S_τ, и колеблющейся части G'. Тогда для интересующей нас части функционала (4) с точностью до ε^2 получим выражение

$$\int\limits_T \left\{\iiint\limits_{G_0} (p'+p'')\,dG + \iiint\limits_{G'} (P+p')\,dG\right\} dt, \tag{5}$$

где T — период колебаний.

В первом слагаемом выражения (5), соответствующем интегрированию по G_0, можно поменять порядок интегрирования по времени и по пространству. Тогда интеграл от p' обращается в ноль в силу гармонической зависимости p' от времени. Интеграл от p'' можно преобразовать с помощью известной формулы для вычисления средних по времени величин, представленных в комплексном виде. В результате получим

$$\int\limits_T p''\,dt = -(1/4)T\rho\{\nabla\varphi\nabla\varphi^* - (\mathbf{M}\nabla\varphi)\times$$
$$\times(\mathbf{M}\nabla\varphi^*) + i\eta(\varphi\mathbf{M}\nabla\varphi^* - \varphi^*\mathbf{M}\nabla\varphi) - \eta^2\varphi\varphi^*\},$$

где звездочка означает комплексно-сопряженную величину. Область G' в каждый момент времени представляет собой слой переменной толщины $h'=h\exp(-i\omega t)$, заключенный между невозмущенной и возмущенной поверхностями тангенциального разрыва. При введенных выше ограничениях относительно амплитуды колебаний величину p' с точностью до ε можно считать неизменной поперек слоя. Тогда получим соотношение

$$\iiint\limits_{G'}(P+p')\,dG=\iint\limits_{S_\tau}\left\{Ph'+\frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial n}h'^2+p'h'\right\}dS.$$

Так как S_τ — фиксированная поверхность, то интегрирование по t правой части последнего равенства можно выполнить внутри интеграла по S. Учитывая гармоническую зависимость h' и p' от времени, получим

$$\int\limits_T\left\{\iiint\limits_{G'}(P+p')\,dG\right\}dt=\frac{T}{4}\iint\limits_{S_\tau}\Big\{\rho c(i\eta\varphi-\mathbf{M}\nabla\varphi)h^*-$$
$$-\rho c(i\eta\varphi^*+\mathbf{M}\nabla\varphi^*)h+\frac{\partial P}{\partial n}hh^*\Big\}dS.$$

Условимся считать положительной внешнюю по отношению к G_0 нормаль. Тогда, опуская несущественные постоянные множители, получим функционал

$$I=\iiint\limits_{G_0}\rho\{\nabla\varphi\nabla\varphi^*-(\mathbf{M}\nabla\varphi)(\mathbf{M}\nabla\varphi^*)+i\eta(\varphi\mathbf{M}\nabla\varphi^*-\varphi^*\mathbf{M}\nabla\varphi)-\eta^2\varphi\varphi^*\}\,dG,$$
$$-\iint\limits_{S_\tau}\left\{i\eta\rho c(\varphi h^*-\varphi^*h)-\rho\mathbf{V}(\nabla\varphi h^*+\nabla\varphi^*h)+\frac{\partial P}{\partial n}hh^*\right\}dS. \tag{6}$$

Искомый вариационный принцип формулируется для функционала, представляющего собой сумму величин I, записанных для каждой из областей, разделенных поверхностью тангенциального разрыва. При этом следует иметь в виду, что при выбранном положительном направлении нормали к поверхности разрыва в той области, где эта нормаль оказывается внутренней, интеграл по S_τ в (6) должен иметь другой знак.

Для первой вариации δI можно записать

$$\delta I=-\iiint\limits_{G_0}\rho\{L(\varphi)\delta\varphi^*+L(\varphi^*)\delta\varphi\}\,dG+$$
$$+\iint\limits_{S_\tau}\rho c\left\{\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial n}+i\eta h\right)\delta\varphi^*+Mh\frac{\partial\delta\varphi^*}{\partial l}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi^*}{\partial n}-i\eta h^*\right)\delta\varphi+Mh^*\frac{\partial\delta\varphi}{\partial l}\right\}dS-$$
$$-\iint\limits_{S_\tau}\left\{\left[\rho c(i\eta\varphi-\mathbf{M}\nabla\varphi)+h\frac{\partial P}{\partial n}\right]\delta h^*+\left[\rho c(-i\eta\varphi^*+\mathbf{M}\nabla\varphi^*)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+h^*\frac{\partial P}{\partial n}\right]\delta h\right\}dS+\iint\limits_{S}\rho\left\{\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}+M_n(i\eta\varphi-\mathbf{M}\nabla\varphi)\right]\delta\varphi^*+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\partial\varphi^*}{\partial n}-M_n(i\eta\varphi^*+\mathbf{M}\nabla\varphi^*)\right]\delta\varphi\right\}dS. \tag{7}$$

Здесь S — отличные от S_τ неподвижные участки границы области G_0, а M_n — величина нормальной к S составляющей вектора $\mathbf{M}$.

Следует иметь в виду, что вариации $\delta\varphi$ и $\delta\varphi^*$, а также δh и δh^* не являются независимыми. Независимы вариации действительных и мнимых частей этих функций. Чтобы выразить δI через вариации независимых параметров, в подинтегральных выражениях формулы (7) сделаем преобразование следующего вида: $L(\varphi)\delta\varphi^*+L(\varphi^*)\delta\varphi=2\,\mathrm{Re}\{L(\varphi)\delta\varphi^*\}=2\{\mathrm{Re}[L(\varphi)]\,\mathrm{Re}(\delta\varphi)-\mathrm{Im}[L(\varphi)]\,\mathrm{Im}(\delta\varphi)\}$.

Приравнивая нулю коэффициенты при вариациях действительных и мнимых частей φ и h, из первого интеграла в (7) получим уравнение (1), а из третьего — условие (2).

Чтобы избавиться от вариации производной $\delta(\partial\varphi/\partial l)$ во втором интеграле, надо перейти к криволинейным координатам ξ, ψ_1, ψ_2 с ортами, направленными соответственно вдоль градиентов потенциала скорости стационарного потока газа и двух функций тока, первая из которых постоянна, на поверхности S_τ. Тогда после интегрирования по частям с использованием уравнений стационарного течения рассматриваемое слагаемое во втором интеграле формулы (7) приводится к виду

$$\iint\limits_{S_\tau}\rho V\left[\left(\frac{h^*}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial l}-\frac{\partial h^*}{\partial l}\right)\delta\varphi+\left(\frac{h}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial l}-\frac{\partial h}{\partial l}\right)\delta\varphi^*\right]dS,$$

где g_{22} — компонента метрического тензора, соответствующая координате ψ_1, для которой справедливо соотношение $(1/\sqrt{g_{22}})(\partial\sqrt{g_{22}}/\partial l)=(\partial\beta/\partial n)$. В результате из второго интеграла в (7) получается условие (3) на S_τ.

Рассмотрим теперь последний интеграл в формуле (7). Его вклад в δI равен нулю на тех участках S, где потенциал φ задан. На непроницаемых участках границы S $M_n=0$ и условием стационарности функционала I является условие непротекания $\partial\varphi/\partial n=0$.

Для того, чтобы установить вклад интеграла по S на прочих участках границы, сделаем следующее преобразование. Обозначим через $\mathbf{M}_0$ значение $\mathbf{M}$ в какой-либо точке S и введем в окрестности этой точки локальную декартову систему координат, ось x которой направлена вдоль $\mathbf{M}_0$. Произведем замену переменных $x'=x$, $y'=y(1-M_0^2)^{1/2}$, $z'=z(1-M_0^2)^{1/2}$, а потенциал φ представим в виде

$$\varphi=\Phi\exp\left(-i\frac{\eta M_0}{1-M_0^2}x\right). \tag{8}$$

Тогда последний интеграл в выражении (7) можно записать в виде

$$\iint\limits_{S}\rho[(1-M^2)(1-M^2\cos^2\alpha)]^{1/2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n'}\delta\Phi^*+\frac{\partial\Phi^*}{\partial n'}\delta\Phi\right)dS, \tag{9}$$

где $\partial/\partial n'$ — производная по нормали к S в координатах x', y', z', а α — угол между вектором $\mathbf{M}$ и нормалью $\mathbf{n}$ к S в координатах x, y, z.

Формула (9) может оказаться полезной при вариационной формулировке граничных условий на проницаемых участках границы S. В частности, если на некотором участке границы поток газа равномерный с числом Маха $M=\mathrm{const}$, то для функции Φ, определяемой формулой (8), справедливо уравнение Гельмгольца, описывающее акустические поля в однородной покоящейся среде. Тогда с помощью выражения (9) при добавлении соответствующего слагаемого в исходный функционал I такие граничные условия, как условие излучения или импедансное, могут быть получены из вариационного принципа как естественные [8].

Найденный вариационный принцип может быть использован как для численного [8], так и для аналитического решения задач аэроакустики. Ниже в качестве примера с его помощью решена задача о распространении трехмерных звуковых волн в канале медленно изменяющегося по длине поперечного сечения, содержащем безвихревой изоэнтропический поток газа. Ранее эта задача была рассмотрена в работах [9, 10], где с помощью метода многих масштабов исследовалось асимптотическое решение системы дифференциальных уравнений, эквивалентных уравнению (1).

Итак, рассмотрим осесимметричный канал, координата стенки которого в плоскости (z, r) цилиндрической системы координат z, r, θ описывается функцией $r=r_w(z)$. Далее, через ε_1 будем обозначать малый параметр, такой, что $dr_w/dz \sim \varepsilon_1 \ll 1$. Как показано в работе [9], для компонент вектора **M** вдоль осей z и r с точностью до ε_1 можно записать формулы

$$M_z = M, \quad M_r = \varepsilon_1 M r (d \ln r_w / d\xi). \tag{10}$$

Здесь $\xi \equiv \varepsilon_1 z$, а через M обозначено значение числа Маха стационарного потока, вычисленное в одномерном приближении. С той же точностью в качестве ρ можно взять значение плотности в одномерном приближении.

Следуя работе [9], для потенциала φ запишем разложение

$$\varphi = (\varphi_0 + \varepsilon_1 \varphi_1) \exp(i\vartheta - im\theta), \tag{11}$$

где m — целая константа, φ_0 и φ_1 являются функциями ξ и r, а осевое волновое число $k \equiv d\vartheta/dz$ — величина порядка единицы.

Подставив формулы (10) и (11) в выражение (6), с точностью до ε_1 получим разложение $I = I_0 + \varepsilon_1 I_1$, где I_0 и I_1 при действительных k определяются выражениями

$$I_0 = \int_{z_1}^{z_2}\int_0^{r_w} \rho \left\{ \left[k^2 - (Mk-\eta)^2 + \frac{m^2}{r^2} \right] \varphi_0 \varphi_0^* + \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} \frac{\partial \varphi_0^*}{\partial r} \right\} r\, dr\, dz,$$

$$I_1 = \int_{z_1}^{z_2}\int_0^{r_w} \rho \left\{ \left[k^2 - (Mk-\eta)^2 + \frac{m^2}{r^2} \right] (\varphi_0 \varphi_1^* + \varphi_0^* \varphi_1) + \right.$$
$$+ \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_0^*}{\partial r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - iMr \frac{d \ln r_w}{d\xi} (Mk-\eta) \left(\varphi_0 \frac{\partial \varphi_0^*}{\partial r} - \varphi_0^* \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} \right) +$$
$$\left. + i[k - M(Mk-\eta)] \left(\varphi_0 \frac{\partial \varphi_0^*}{\partial \xi} - \varphi_0^* \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} \right) \right\} r\, dr\, dz,$$

где $z=z_1$ и $z=z_2$ — сечения, ограничивающие рассматриваемый участок канала.

Для вариации δI_0 получим формулу

$$\delta I_0 = \int_{z_1}^{z_2} \left[\rho \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial r} \delta \varphi_0^* + \frac{\partial \varphi_0^*}{\partial r} \delta \varphi_0 \right) \right]_w r_w\, dz -$$
$$- \int_{z_1}^{z_2}\int_0^{r_w} \rho [Q(\varphi_0) \delta \varphi_0^* + Q(\varphi_0^*) \delta \varphi_0] r\, dr\, dz,$$

$$Q(\varphi) \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \left(\lambda^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \varphi, \qquad \lambda^2 \equiv (Mk-\eta)^2 - k^2.$$

Условию стационарности I_0 удовлетворяют функции $\varphi_0 = B(\xi) J_m(\lambda r)$, описывающие возмущения какой-либо моды, являющейся одной из собственных форм колебаний в цилиндрическом канале. Здесь $J_m(\lambda r)$ — функция Бесселя первого рода, а значение параметра $\lambda = \lambda(\xi)$ в каждом сечении канала находится из уравнения $J_m'(\lambda r_w) = 0$. Если значения k, найденные из дисперсионного выражения действительны, то полученное решение описывает волну, распространяющуюся вверх или вниз по потоку. Амплитуда волны $B(\xi)$ определяется из условия стационарности функционала I_1.

Стационарную точку функционала I_1 будем искать в классе функций $\varphi_0=BJ_m(\lambda r)$. Тогда с точностью до несущественного постоянного множителя выражение для I_1 преобразуется к виду

$$I_1=\int\limits_{z_1}^{z_2}\rho r_w^2[k-M(Mk-\eta)]\left(B\frac{dB^*}{d\xi}-B^*\frac{dB}{d\xi}\right)dz.$$

Из условия равенства нулю вариации δI_1 получим соотношение $\rho r_w^2[k-M(Mk-\eta)]B^2=\text{const}$.

Если использовать введенный в [9] параметр $\Omega=\eta/\lambda$, то последнее равенство можно записать в виде

$$B^2\rho r_w(\Omega^2+M^2-1)^{1/2}=\text{const}. \tag{12}$$

Следует отметить, что в работе [9] метод многих масштабов, примененный к дифференциальным уравнениям, описывающим линейные возмущения параметров течения, привел к довольно громоздкому дифференциальному соотношению для амплитуды возмущения давления $D(\xi)$, решение которого оказывается эквивалентным решению (12) для амплитуды акустического потенциала $B(\xi)$. Таким образом, полученный в данной работе вариационный принцип позволил более простым (по сравнению с [9]) путем получить решение задачи в виде конечной формулы.

Отметим, что соотношение (12) имеет вид интеграла сохранения по длине канала потока акустической энергии, осредненного по периоду колебаний. В работе [10] наличие этого интеграла было установлено численно. Из формулы (12) видно, кроме того, что изменение амплитуды по длине канала не зависит ни от направления стационарного потока газа в канале, ни от направления распространения волны.

При частотах ниже частоты отсечки, когда k — комплексная величина, соотношение (12) остается справедливым, однако его вывод оказывается несколько более сложным. Указанное соотношение в этом случае не означает сохранения потока акустической энергии по длине канала, который в рассматриваемом одномодовом возмущении оказывается равным нулю [10].

Отметим еще, что, как показано в работах [9, 10], решение (12) является трехмерным аналогом одномерного ВКБ-приближения и неприменимо на тех участках канала, где частота близка к частоте отсечки и имеет место интенсивное отражение падающей волны. На участках канала, где частота ниже частоты отсечки, возмущение данной моды представляет собой совокупность экспоненциально растущего и затухающего по длине канала возмущений, между которыми также имеется интенсивное взаимодействие. Последнее, однако, обычно носит односторонний характер: амплитуда одного возмущения не зависит от амплитуды второго, в то время как амплитуда второго целиком определяется амплитудой первого. В этом случае формула (12) применима только к амплитуде первого из указанных возмущений.

Автор выражает благодарность А. Н. Крайко за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bateman H.* Notes on a differential equation which occurs in the two-dimensional motion of a compressible fluid and the associated variational problems.— Proc. Roy. Soc. (A), 1929, v. 125, № A799, p. 598–618.
2. *Manwell A. R.* A variational principle for steady homenergic compressible flow with finite shocks.— Wave Motion, 1980, № 2, p. 83–95.
3. *Шмыглевский Ю. Д.* Вариационный принцип газовой динамики.— ЖВММФ, 1980, т. 20, № 6, с. 1598–1600.

4. *Крайко А. Н.* Вариационные принципы для течений идеального газа с сильными разрывами, записываемые в эйлеровых переменных.– ПММ, 1981, № 45, вып. 2, с. 256–265.
5. *Рыбак С. А.* Звуковые волны с отрицательной энергией.– Акуст. ж., 1980, т. 26, № 2, с. 248–256.
6. *Craggs A.* A finite element method for modelling dissipative muffles with a locally reactive lining.– J. Sound and Vibr., 1977, v. 54, № 2, p. 285–296.
7. *Kagawa Y., Yamabuchi T., Yoshikawa T., Ooie S., Kyouno N., Shindou T.* A finite element approach to a coupled structural-acoustic radiation system with application to loudspeaker characteristic calculation.– J. Sound and Vibr., 1980, v. 69, № 2, p. 229–243.
8. *Левин М. П., Осипов А. А., Ширковский И. А.* Использование метода конечных элементов для расчета двумерных акустических полей, излучаемых из открытого конца канала.– Акуст. ж., 1982, т. 26, № 2, с. 250–257.
9. *Осипов А. А.* Распространение трехмерных акустических возмущений в осесимметричных каналах медленно изменяющегося поперечного сечения.– Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 5, с. 124–132.
10. *Осипов А. А.* Распространение трехмерных акустических возмущений в каналах переменной площади поперечного сечения при частотах, близких к частоте отсечки.– Изв. АН СССР, МЖГ, 1980, № 6, с. 149–159.

Центральный институт
авиационного моторостроения
им. П. И. Баранова

Поступила в редакцию
22.VI.1982