АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXX 1984 Вып. 1

УДК 534.26

ДИФРАКЦИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА ШЕРОХОВАТОЙ СФЕРЕ

Попов Ю. Ю., Скипа М. И., Фишков Ф. А.

Рассчитано среднее поле точечного источника в присутствии статистически неровной сферы.

Задача дифракции акустической волны на телах конечных размеров неправильной формы исследовалась ранее во многих работах. Поверхности тел предполагались детерминированными [1—4] или статистически неровными [5, 6]. Для определения характеристик рассеяния волн статистически неровными сферами предлагалось использовать метод последовательных приближений; результаты получены в предельных случаях малых [5] или больших [6] волновых размеров сфер, причем границы применимости решения не определялись. В настоящей работе модифицированным методом малых возмущений находится среднее поле сферической волны, рассеянной на шероховатой сфере.

Рассмотрим поле точечного источника, положение которого определяется в пространстве сферическими координатами $\{r_0, \theta_0, \varphi_0\}$, рассеянное на неровной сфере, поверхность которой определяется уравнением $r=a+\xi(\theta, \varphi)$. Неровности описываются случайной функцией $\xi(\theta, \varphi)$, такой, что $\langle\xi\rangle=0$ (поверхность в среднем сферическая), a — радиус сферы, угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций ξ. Будем искать среднее поле $\langle p\rangle$ в предположении малости и пологости неровностей, что делает возможным применение теории возмущений [7].

Поле $p(r, \theta, \varphi)$ в области $r>a+\xi(\theta, \varphi)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial p}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2}+k^2p= \\ =-4\pi\frac{\delta(\theta-\theta_0)\delta(r-r_0)\delta(\varphi-\varphi_0)}{kr^2\sin\theta}, \qquad (1)$$

где k — волновое число, временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем всюду опускать. На поверхности шероховатой сферы зададим граничное условие Дирихле (поверхность предполагается абсолютно мягкой) $p=0$, $r=a+\xi(\theta, \varphi)$. Перенеся это граничное условие на поверхность гладкой сферы $r=a$, путем разложения в ряд по малому параметру ξ, с использованием формулы Грина несложно получить решение уравнения (1) в виде ряда итераций. После усреднения по ансамблю реализаций среднее поле определяется рядом

$$\langle p\rangle=p_0+\frac{(k\sigma)^2}{4\pi}\iint W(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2)\frac{\partial p_0(r, r_1=a)}{\partial r_1}\times \\ \times V_1\frac{\partial p_0(r_1=a, r_2=a)}{\partial r_2}V_2p_0(r_2=a, r_0)\,dS_1, dS_2+\ldots, \qquad (2)$$

интегрирование производится по поверхности сферы радиуса a, $V_i=\partial/\partial r_i+1/r_i$, $\sigma^2=\langle\xi^2\rangle$, $W(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2)=\langle\xi(\theta_1, \varphi_1)\xi(\theta_2, \varphi_2)\rangle/\sigma^2$, $p_0(r, r_0)$ — решение уравнения (1) с граничным условием $p_0(r=a, r_0)=0$.

В правой части (2) можно выполнить пересуммирование с помощью диаграммной техники Фейнмана, заимствованной из квантовой теории поля. Тогда ряд (2) принимает вид уравнения Дайсона, из которого при

$r=a$ получается нелокальное граничное условие [7]. В данном случае оно имеет вид

$$\langle p(r, \theta, \varphi)\rangle|_{r=a}=\int M(\theta, \varphi, \theta_1, \varphi_1)\, V_1 \langle p(r_1=a, \theta_1, \varphi_1)\rangle dS \qquad (3)$$

массовый оператор M определяется рядом

$$M(\theta, \varphi, \theta_1, \varphi_1)=\frac{k\sigma^2}{4\pi} W(\theta, \varphi, \theta_1, \varphi_1)\, V \frac{\partial p_0(r=a, r_1=a)}{\partial r_1}+$$

$$+\left(\frac{k}{4\pi}\right)^3 \sigma^4 \iint V \frac{\partial p_0(r=a, r_2=a)}{\partial r_2} V_2 \frac{\partial p_0(r_2=a, r_3=a)}{\partial r_3}\times$$

$$\times V_3 \frac{\partial p_0(r_3=a, r_1=a)}{\partial r_3} W(\theta, \varphi, \theta_1, \varphi_1) W(\theta_2, \varphi_2, \theta_3, \varphi_3)\, dS_2 dS_3+\ldots \qquad (4)$$

Представляя среднее поле в виде ряда Фурье

$$\langle p\rangle=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty} e^{im\varphi} p_F(r, \theta, m); \qquad p_F=\int_0^{2\pi} e^{-im\varphi}\langle p\rangle d\varphi. \qquad (5)$$

и используя преобразование Лежандра [8]

$$p_F(r, \theta, m)=\sum_{n=m}^{\infty} P_n^m(\cos\theta)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\left(n+\frac{1}{2}\right) p_g(r, n, m),$$

$$p_g(r, n, m)=\int_0^{\pi} p_F(r, \theta, m) P_n^m(\cos\theta)\sin\theta d\theta, \qquad (6)$$

где P_n^m – присоединенные полиномы Лежандра, получим из (1)

$$p_g''+\frac{2}{r}p_g'+\left[k^2-\frac{n(n+1)}{r^2}\right]p_g=-4\pi e^{-im\varphi_0}P_n^m(\cos\theta_0)\frac{\delta(r-r_0)}{kr^2}.$$

Решение этого уравнения с учетом условия излучения на бесконечности можно представить в виде

$$p_g(r, n, m)=4\pi i\frac{e^{-im\varphi_0}P_n^m(\cos\theta_0)}{h_n(ka)}\left[A_n^m h_n(kr)+\right.$$

$$\left.+\begin{cases}\psi_n(kr)h_n(kr_0), & r<r_0\\ \psi_n(kr_0)h_n(kr), & r>r_0\end{cases}\right], \qquad (7)$$

где $\psi_n(z)=j_n(z)h_n(ka)-j_n(ka)h_n(z)$, $j_n(z)$ и $h_n(z)$ – сферические функции Бесселя и Ханкеля первого рода, A_n^m – коэффициенты, не зависящие от координат точки наблюдения. Среднее поле, согласно (5), (6), восстанавливается по формуле

$$\langle p(r, \theta, \varphi)\rangle=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} e^{im\varphi}P_n^m(\cos\theta)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\left(n+\frac{1}{2}\right)p_g(r, n, m). \qquad (8)$$

Будем предполагать шероховатости статистически изотропными. Тогда коэффициент корреляции W зависит только от угла ϑ между лучами, проведенными из центра сферы через точки $\{a, \theta, \varphi\}$ и $\{a, \theta_1, \varphi_1\}$. В этом случае и массовый оператор M зависит лишь от угла ϑ, и, следовательно, его можно разложить в ряд

$$M(\vartheta)=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\vartheta)\left(n+\frac{1}{2}\right)\overline{M}_n, \qquad \overline{M}_n=\int_0^{\pi} M(\vartheta)P_n(\cos\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta. \qquad (9)$$

Подставляя (8) и (9) в (3), используя теорему сложения для многочленов

Лежандра [9]

$$P_n(\cos\vartheta)=\sum_{m=-n}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\vartheta)P_n^m(\cos\theta_1)e^{im(\varphi-\varphi_1)},$$

$$\cos\vartheta=\cos\theta\cos\theta_1+\sin\theta\sin\theta_1\cos(\varphi-\varphi_1)$$

и производя интегрирование, получаем $p_s(a, n, m)=2\pi a^2\bar{M}_n[p_s'(a, n, m)+p_s(a, n, m)/a]$. Учитывая выражение для $p_s(r, \theta, \varphi)$ (8) и используя соотношение $j_n(z)h_n'(z)-j_n'(z)h_n(z)=i/z^2$, находим

$$A_n^m=-\frac{2\pi i}{k}\frac{\bar{M}_n h_n(kr_0)}{h_n(ka)(1-2\pi a\bar{M}_n)-2\pi a^2 k\bar{M}_n h_n'(ka)}.$$

Теперь из (8) и (7) получаем окончательно среднее поле в форме

$$\langle p(r,\theta,\varphi)\rangle=2i\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}e^{im(\varphi-\varphi_0)}\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}$$

$$\frac{P_n^m(\cos\theta)P_n^m(\cos\theta_0)}{h_n(ka)-2\pi ka^2\bar{M}_n[h_n'(ka)+h_n(ka)/(ka)]}\times$$

$$\times\begin{cases}\Phi_n(kr)h_n(kr_0), & r<r_0,\\ \Phi_n(kr_0)h_n(kr), & r>r_0,\end{cases}\qquad(10)$$

где $\Phi_n(z)=\psi_n(z)+2\pi\bar{M}_n ka^2\{h_n(z)[j_n'(ka)-j_n(ka)/(ka)]-j_n(z)[h_n'(ka)+h_n(ka)/(ka)]\}$. Обозначив через ϑ угол между лучами, проведенными через точки $\{a, \theta, \varphi\}$ и $\{a_0, \theta_0, \varphi_0\}$, среднее поле (10) можно записать в виде

$$\langle p(r,\theta,\varphi)\rangle=2i\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)P_n(\cos\vartheta)\left[-h_n(kr)\times\right.$$

(11)

$$\left.\times h_n(kr_0)\frac{j_n(ka)}{h_n(ka)}C_n+\left\{\begin{matrix}j_n(kr)h_n(kr_0), & r<r_0\\ j_n(kr_0)h_n(kr), & r>r_0\end{matrix}\right\}\right],$$

где коэффициенты C_n в приближении Бурре (в этом случае в ряде (4) для массового оператора удерживается лишь первый член)

$$C_n=\frac{1-(ka\sigma)^2[j_n'(ka)/j_n(ka)+(ka)^{-1}]I_n/2}{1-(ka\sigma)^2[h_n'(ka)/h_n(ka)+(ka)^{-1}]I_n/2}\qquad(12)$$

$$I_n=\int_0^{\pi}P_n(\cos\vartheta)W(\vartheta)V\frac{\partial p_0(r=a, r_1=a)}{\partial r_1}\sin\vartheta d\vartheta.$$

Для сравнения выражения (11) с решением, получаемым по методу последовательных приближений (такой способ предлагалось использовать в работах [5, 6], где имеются ошибки), определим среднее поле путем вычисления поправки к полю нулевого приближения p_0, оставляя в ряде (3) первые два члена. После несложных, но громоздких преобразований среднее поле представляется рядом (11) с коэффициентами $C_n=1+i\sigma^2 I_n/2$. Этот результат, как и следовало ожидать, получается из (12) в качестве частного случая в предположении малости второго слагаемого в знаменателе дроби.

Для определения границ применимости решения в форме (11), (12) следует сохранить в ряде (4) два члена и произвести оценку отброшенных при выводе (12) членов. Определим «угол корреляции» θ_0 как интеграл $\theta_0=\int_0^{\pi}W(\vartheta)d\vartheta$. В случае медленно меняющейся функции $W(\vartheta)$, когда угол корреляции удовлетворяет условию $\theta_0\gg 1$, коэффициент кор-

реляции в (4) можно вынести за знак интеграла. В результате имеем $(k\sigma)^2[1/ka+h_n'(ka)/h_n(ka)]\ll 1$. При $ka\ll 1$, учитывая, что в этом случае $h_n'(ka)/h_n(ka)\approx-(n+1)/(ka)$, получаем оценку $(\sigma n/a)^2\ll 1$, где n – максимальное количество членов ряда (11), которые должны быть учтены для данной величины ka. В обратном случае «коротких» неровностей, которые видны из центра сферы под малым углом ($\theta_0\ll 1$), соответствующие неравенства принимают вид $k\sigma^2/\theta_0 a[h_n'(ka)/h_n(ka)+1/ka]\ll 1$ и при $ka\ll 1$ $(\sigma/a)^2 n/\theta_0\ll 1$.

В заключение заметим, что вычисление среднего поля по формулам (10), (11) целесообразно производить при не слишком больших значениях ka [10], когда ряды сходятся достаточно быстро. При больших волновых размерах сферы решение в форме (10) следует преобразовать по методу Зоммерфельда – Ватсона к интегральному виду и ряду по вычетам подынтегрального выражения. Рассмотрение этого вопроса выходит за рамки работы. Однако следует отметить, что в отличие от решения, получаемого методом последовательных приближений, выражение (10) благодаря наличию в знаменателе поправочного члена позволяет определить влияние неровностей на затухание волн, огибающих сферу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баранцев Р. Г.* Метод разделения переменных в задаче рассеяния на теле произвольной формы.– Докл. АН СССР, 1962, т. 147, № 3, с. 569–570.
2. *Mitzner K. M.* Effect of small irregularities on electromagnetic scattering from an interface of arbitrary shape.– J. Math. Phys., 1964, v. 5, № 12, p. 1776–1786.
3. *Euges L., Nelson A.* Perturbation theory of scattering from irregular bodies.— Ann. Phys. (USA). 1976. v. 100, № 1–2, p. 37–61.
4. *Newman K. E., Teitel S., Domany E.* The distorted wave Born approximation. Application to elastodynamics.– J. Appl. Phys., 1981, v. 52, № 7, p. 4363–4370.
5. *Chen Y. M., Kim S. J.* Scattering of acoustic waves by a Penetrable Sphere with Statistically Corrugated Surface.– J. Acoust. Soc. Amer., 1967, v. 42, № 1, p. 1–5.
6. *Chen Y. M.* Scattering of Scalar Waves by a Convex Transparent Objest with Statistically Surface Irregularities.– J. Math. Phys., 1968, v. 9, № 3, p. 439–450.
7. *Басс Ф. Г., Фукс И. М.* Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М.: Наука, 1972.
8. *Дыхта В. В.* Метод интегральных преобразований в волновых задачах гидроакустики. Киев. Наук. думка, 1981.
9. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцедентные функции. Ч. 1. М.: Наука, 1965.
10. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964.

Одесское отделение
Морского гидрофизического института
Академии наук УССР

Поступила в редакцию
2.VIII.1982